سلسلة ملخصات شوم
نظريات ومسائل فى

حساب التفاضل والتكامل

تأليف: فرانك آيرز

يحتوى الكتاب على أكثر من ١١٧٠ مسألة
محلولة حلاً كاملاً

دار ماكجروهيل للنشر

ملخصات شوم

نظريات ومسائل

في

حساب التفاضل والتكامل

تأليف

الدكتور فرانك آيرز

أستاذ ورئيس قسم الرياضيات
كلية دبكنسون

نسق نسخة النظام المتري

جاك أولت، ماجستير

محاضر في الرياضيات
جامعة ليستر

ترجمة

نخبة من الأساتذة المتخصصين

مراجعة

الدكتور محمود أبوزيد

جامعة المنصورة
قسم الطبيعة - جمهورية مصر العربية



دار ماكجروهيل للنشر

لندن . نيويورك . سانت لويس . سان فرانسيسكو . اوكلاند . بوجوتا . دوسلدورف .
جوهانسبرج . مدريد . المكسيك . مونتريال . نيودلهي . بنما . باريس . ساوباولو .
سنغافورة . سيدني . طوكيو . تورنتو .



المملكة العربية السعودية — الرياض — ص.ب ١٤٣٩

دار المريخ
المملكة العربية السعودية – الرياض – ص.ب ١٤٣٩

مقدمة

إن الهدف من هذا الكتاب هو ، كما ذكرنا فى مقدمة الطبعة الأولى أن يزود الطلاب المبتدئين فى دراسة حساب التفاضل والتكامل الابتدائى بمجموعة من المسائل النموذجية المحلولة بعناية ، وبالإضافة إلى ذلك فإن هذا الكتاب يخدم طلاب العلوم والهندسة الذين يشعرون بحاجة إلى نظرة عامة فى الدراسة النظرية الأساسية وإلى مسائل فى هذا الموضوع . وبما أن هذه الطبعة قد اشتملت على براهين النظريات وطرق استنتاج التفاضل والتكامل ، وعلى العدد الوفير من المسائل الإضافية فإنه من الممكن استخدامه ككتاب مناسب لمقرر دراسى منهجى .

أما مخطط الكتاب فهو لا يختلف اختلافا جوهريا عن الطبعة السابقة ، فكل فصل منه يبدأ بسرد التعاريف والمبادىء والنظريات المتعلقة بالموضوع ، يلى ذلك مادة توضيحية ومسائل محلولة تم اختيارها بحيث لا تخدم فى توسيع المادة النظرية فقط ، بل تزود الطالب بشكل عملى بما يساعده فى صياغة المسائل وحلها واستعادة المبادىء الأساسية الضرورية من أجل تعليم مثمر ، ومن أجل مواجهة الصعوبات التى يلاقيها المبتدئون عادة ، ومن أجل توضيح العديد من تطبيقات حساب التفاضل والتكامل بالإضافة لذلك فلقد ضمنا المسائل المحلولة العديدة من براهين النظريات والنتائج الأساسية . إن استخدام هذا الكتاب سواء بشكل فعال أو باعتباره مرجعا إضافيا لكتاب مقرر ، يتطلب أكثر من دراسة معلقة للمسائل المحلولة إذ ينبغى أن نتعلم من كل مسألة شيئا جديدا ، الأمر الذى يتم على وجه أفضل بإعادة حل المسائل خطوة خطوة فإذا ما فعلنا ذلك فإننا سوف لا نلاقى صعوبة تذكر عند حل أغلب المسائل الإضافية .

إن الزيادة فى حجم الطبعة والتى تبلغ خمسين فى المائة عن الطبعة السابقة تقريبا تعود بوجه خاص إلى الإضافات التى ألحنا إليها . كذلك فإننا نلفت النظر إلى إضافات وتغيرات أخرى كالمعالجة الأكثر شمولا لمفهوم النهاية واتصال الدوال والمتسلسلات غير المنتهية والمنتهية ، الموسعة نوعا ما والمتعلقة بالمتجهات المستوية أو الفراغية .

ولكى يمكن وضع الحساب الابتدائى فى التكامل وحساب المساحات والحجوم إلخ ، بترتيب يختلف عن ترتيب هذا الكتاب ، فلقد صيغت هذه الفصول بحيث يمكن النظر فى أقسام واسعة منها مباشرة بعد الفصل السادس . وهكذا فإن الذين يستخدمون هذا الكتاب كمرجع إضافى سوف لا يجدون صعوبة فى جعله ملائما لحاجاتهم .

وفى الختام يود المؤلف أن ينتهز هذه المناسبة ليعبر عن شكره لدار سشوم للنشر لما قدمته من عون فى هذا الصدد .

كارليل ، بنا
(مارس ١٩٦٤)

فرانك آيرز

مقدمة الطبعة العربيـــة

يؤكد تاريخ العلوم أن الحضارة الحديثة تدين بازدهارها أساسا لحضارة العربية الإسلامية بما نقلت عنها من أصول العلم وتفرعاته . كما أن الأمة العربية تواجه اليوم تحديا بأن تطوع لغتها لتشمل وتستوعب كل النظريات والاكتشافات سريعة التطور والتجدد ، مما يساعدها على استعادة مركزها الذى تخلفت عنه زمناً طويلا .

ولا شك أن المكتبة العربية تفتقر كثيرا إلى الكتب العلمية فى مختلف فروع العلم النظرية والتطبيقية والتكنولوجية ، كما أن الدراسة فى جامعاتنا العربية لا زالت فى أمس الحاجة إلى وجود العديد من المراجع المكتوبة باللغة العربية فى تخصصات هذه العلوم . والعمل على سد هذا النقص يسهم إلى حد كبير فى إعداد الأجيال التى نريد لها أن تبنى صرح النهضة والحضارة على أسس وطيدة من المعرفة الحقة والتخطيط السليم .

ومن هذا المنطلق ، استهلت دار ماكجروهيل للنشر McGraw-Hill Book Company نشاطها بالشروع فى إصدار الطبعة العربية من سلسلة سشوم Schaum Series التى لقيت فى طبعتها الأصلية نجاحا لا مثيل له . وهناك فكرة أساسية بسيطة تكمن وراء سلسلة ملخصات سشوم Schaum Outline Series مؤداها أن كل عنوان من عناوينها يتناول رقعة خاصة بموضوع معين حدد تحديدا جيدا ، مثل نظرية الاحتمالات ، أو حساب التفاضل والتكامل ، أو الإحصاء ، أو الدوائر الكهربائية ، فيقدم عرضا تمهيديا للنظرية الأساسية لهذه الموضوعات . وكتب سشوم تصلح ككتب مدرسية ، أومذكرات تكميلية معينة ، أو ككتب للمطالعة بقصد التقويم والمراجعة ، أو باعتبارها مراجع يحال إليها .

المحتويات

الفصـــل		الصفحة
الفصل السادس والعشرون	التكامل بالتجزئة	١٧٢–١٧٨
الفصل السابع والعشرون	التكاملات المثلثية	١٧٩–١٨٢
الفصل الثامن والعشرون	التعويضات المثلثية	١٨٣–١٨٥
الفصل التاسع والعشرون	التكامل بالكسور الجزئية	١٨٦–١٩٠
الفصل الثلاثون	تعويضات متنوعة	١٩١–١٩٤
الفصل الحادى والثلاثون	تكامل الدوال الزائدية	١٩٥–١٩٦
الفصل الثانى والثلاثون	تطبيقات على التكامل غير المحدد	١٩٧–٢٠١
الفصل الثالث والثلاثون	التكامل المحدد	٢٠٢–٢١١
الفصل الرابع والثلاثون	حساب المساحات المستوية بالتكامل	٢١٢–٢١٨
الفصل الخامس والثلاثون	حجوم أجسام دورانية	٢١٩–٢٢٣
الفصل السادس والثلاثون	حجوم الأجسام ذات المقاطع المعلومة	٢٢٤–٢٢٦
الفصل السابع والثلاثون	المراكز المتوسطة للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة	٢٢٧–٢٣٣
الفصل الثامن والثلاثون	عزوم القصور الذاتى للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة	٢٣٤–٢٣٩
الفصل التاسع والثلاثون	ضغط السائل	٢٤٠–٢٤٤
الفصل الأربعون	الشغل	٢٤٥–٢٤٨
الفصل الحادى والأربعون	طول قوس	٢٤٩–٢٥٢
الفصل الثانى والأربعون	مساحة السطح الدورانى	٢٥٣–٢٥٦
الفصل الثالث والأربعون	المركز المتوسط وعزوم القصور الذاتى لأقواس المنحنيات والسطوح الدورانية	٢٥٧–٢٦٠
الفصل الرابع والأربعون	مساحات السطوح المستوية ومراكزها المتوسطة فى الاحداثيات القطبية	٢٦١–٢٦٥
الفصل الخامس والأربعون	أطوال الأقواس ومراكزها المتوسطة. مساحات السطوح الدورانية فى الاحداثيات القطبية	٢٦٦–٢٧٠
الفصل السادس والأربعون	التكاملات المعتلة	٢٧١–٢٧٧
الفصل السابع والأربعون	المتواليات والمتسلسلات غير المنتهية (اللانهائية)	٢٧٨–٢٨٣
الفصل الثامن والأربعون	اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الموجبة	٢٨٤–٢٩١
الفصل التاسع والأربعون	المتسلسلات ذات الحدود السالبة	٢٩٢–٢٩٥
الفصل الخمسون	الحساب بالمتسلسلات	٢٩٦–٣٠١
الفصل الحادى والخمسون	متسلسلات القوى	٣٠٢–٣٠٨
الفصل الثانى والخمسون	فك الدوال فى متسلسلات	٣٠٩–٣١٥
الفصل الثالث والخمسون	صيغ ماكلورين وتايلور مع البواقى	٣١٦–٣١٩
الفصل الرابع والخمسون	حسابات عددية باستخدام متسلسلات قوى	٣٢٠–٣٢٣
الفصل الخامس والخمسون	القيمة التقريبية للتكامل	٣٢٤–٣٢٨
الفصل السادس والخمسون	المشتقات الجزئية	٣٢٩–٣٣٥

الفصل الأول

« المتغيرات والدوال »

تتكون مجموعة الأعداد الحقيقية من الأعداد القياسية ، أى الأعداد الصحيحة (الموجبة والسالبة والصفر والكسور العادية a / b حيث a و b عددان صحيحان) ومن الأعداد غير القياسية (الكسور العشرية غير المنتهية ، مثل . . . $\sqrt{2} = 1.4142...$, $\pi = 3.141559...$ و . . . . و . . . التى ليست نسباً بين أعداد صحيحة) .

لاتلعب الأعداد الجبرية التخيلية دوراً هنا واستعمالنا لهذا المصطلح فقط يرجع إلى أن هذه الأعداد غير متضمنة ، وحيث أنه لا مكان للالتباس فإن مصطلح العدد سيستعمل فيما يلى ليدل على عدد حقيق .

تعرف القيمة المطلقة أو العددية ($|N|$) لعدد (حقيق) N فإن :

$|N| = N$ إذا كان N صفراً أو عدداً موجباً .

$|N| = -N$ إذا كان N عدداً سالباً .

فمثلا $2 = |3 - 5| = |5 - 3|$, $|3| = |-3| = 3$

$|x - a| = x - a$ إذا كانت $x \geq a$

$|x - a| = a - x$ إذا كانت $x < a$.

وعموماً إذا كانا a و b أى عددين فإن

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

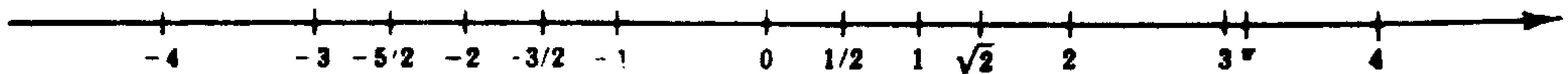
$$|a \pm b| = |b \pm a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0;$$

$$|a + b| \geq |a| - |b|; \quad |a - b| \leq |a| + |b|;$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|; \quad |a - b| \geq |a| - |b|.$$

السلم العددى : هو تمثيل بيانى للأعداد الحقيقية بوساطة نقط الخط المستقيم ، فكل عدد يقابل نقطة (ونقطة واحدة فقط) وبالعكس ، وعلى هذا فإن مصطلحى عدد ونقطة (على السلم العددى) يستعملان دون تمييز لأحدهما على الآخر .

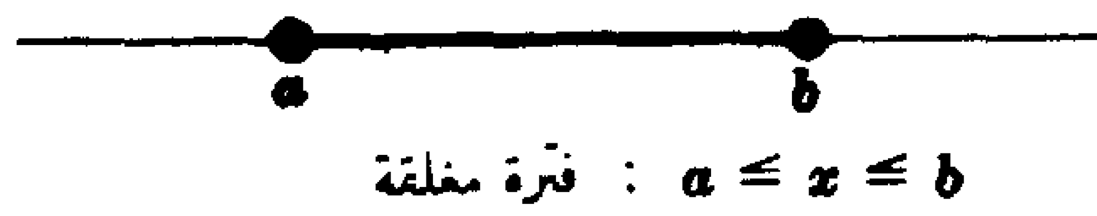
ولتمثيل سلم عددى على مستقيم مفروض (i) نختار نقطة ما من نقطة المستقيم كنقطة أصل (مقابلة للعدد 0) . (ii) نختار اتجاهاً نعتبره موجباً (نرمز له برأس سهم) . (iii) نحدد بالإستعانة بوحدة قياس مناسبة النقطة 1 + التى تبعد عن 0 بوحدة المسافة . عندئذ يكون العددان (النقطتان) $N -$ و $N +$ على جهتين متقابلتين بالنسبة لـ 0 وتبعدان $|N|$ وحـدة عنه .



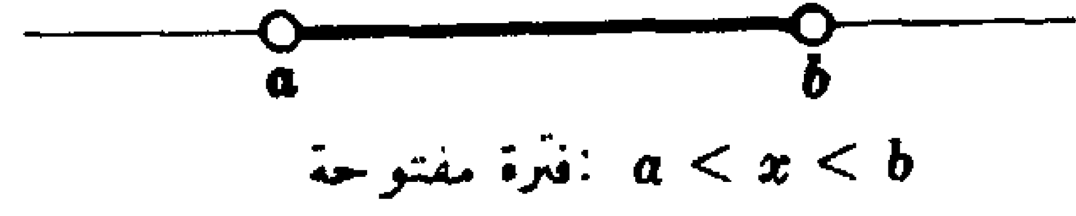
إذا كان a و b عددين مختلفين ، عندئذ تعنى $a < b$ أن a على يسار b فى السلم بينما تعنى $a > b$ أن a على يمين b.
وأما المسافة الموجهه من a إلى b فتعطى بـ $b - a$ وتكون سالبة إذا كان $a > b$ وموجبة إذا كان $a < b$ وفى كلا الحالتين تكون b على المسافة غير الموجهه $|b - a| = |a - b|$ من a .

الفترات المحددة : ليكن a و b عددين بحيث يكون $a < b$ تسمى مجموعة جميع الأعداد x بين a و b بالفترة المفتوحة من a إلى b وتكتب بالشكل $a < x < b$ ، وتسمى النقطتان a و b بنقطتى النهاية للفترة . والفترة المفتوحة لاتتضمن نقطتى نهايتها .

تسمى الفترة المفتوحة $a < x < b$ بالإضافة إلى نقطتى نهايتها b و a بالفترة المغلقة من a إلى b وتكتب $a \leq x \leq b$



فترة مغلقة : $a \leq x \leq b$



فترة مفتوحة: $a < x < b$

الفترات غير المحددة : ليكن a عدداً ما . نسمى مجموعة جميع الأعداد x التى تحقق العلاقة $x > a$ بالفترات غير المحددة . يمكن تعريف فترات غير محددة أخرى بـ $x \leq a$ و $x < a$ و $x \geq a$. (أنظر المسألتين ١ — ٢)

الثابت والمتغير : نلاحظ فى تعريف الفترة $a < x < b$ أن :

(i) كلا من الرمزين a و b يمثل عدداً واحداً يسمى ثابتاً .

(ii) أما الرمز x فيمثل أى عدد من مجموعة من الأعداد ويسمى متغيراً . .

وتعبير مدى المتغير هو اسم آخر لهذه المجموعة من الأعداد التى يمثلها هذا المتغير ، مثال ذلك :

(١) x هو مجلد من مجموعة كتب من عشرة مجلدات ، إذن مدى x هو مجموعة الأعداد الصحيحة $1, 2, 3, \ldots, 10$
(٢) x هو يوم من شهر يوليو (تموز) ، إذن مدى x هو المجموعة $1, 2, 3, \ldots, 31$
(٣) x هى كية الماء (باللترات) التى يمكن سحبها من خزان مملوء سعته أربعون لتراً ، إذن مدى x هو الفترة $0 \leq x \leq 40$

المتباينات : مثل $2x - 3 > 0$ و $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ وهى تحدد فترات على السلم العددى .

مثـــال ١ : حل المتباينة (أ) $2x - 3 > 0$ ، (ب) $x^2 - 5x - 24 \leq 0$.

(أ) ضع $2x - 3 = 0$ فتحصل على $x = 3/2$ اعتبر بعد ذلك الفترتين $x < 3/2$ ، $x > 3/2$. لأية قيمة لـ x فى الفترة $x < 3/2$ ، $x = 0$ مثلا ، نجد أن $2x - 3 < 0$ ولأية قيمة لـ x فى الفترة $x > 3/2$ ، $x = 3$ مثلا ، نجد أن $2x - 3 > 0$ وعلى هذا فإن $2x - 3 > 0$ لجميع قيم x فى الفترة $x > 3/2$.

(ب) ضع $x^2 - 5x - 24 = (x+3)(x-8) = 0,$ فتحصل على $x = -3$ و $x = 8$ واعتبر الفترات $x < -3$, $-3 < x < 8$ و $x > 8$ فنجد أن $x^2 - 5x - 24 > 0$ فى الفترتين $x < -3$ و $x > 8$ فى حين أن $x^2 - 5x - 24 < 0$ فى الفترة $-3 < x < 8$. ولهذا يكون $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ فى الفترة $-3 \leq x \leq 8$. أنظـــر المسألة ٣

دالة المتغير : نقول عن متغير y إنه دالة لمتغير آخر x إذا أعطيت قاعدة أو وسيلة بحيث تقابل كل قيمة لـ x فى مداها قيمة لـ y . يسمى المتغير y الذى تعتمد قيمته على القيمة التى نختارها لـ x ، متغيرا غير مستقل فى حين يسمى x متغيرا مستقلا . أما القاعدة أو الوسيلة فقد تكون جدولا للقيمة المتقابلة (جدول اللوغاريتمات مثلا) أو بيانا أو معادلة .

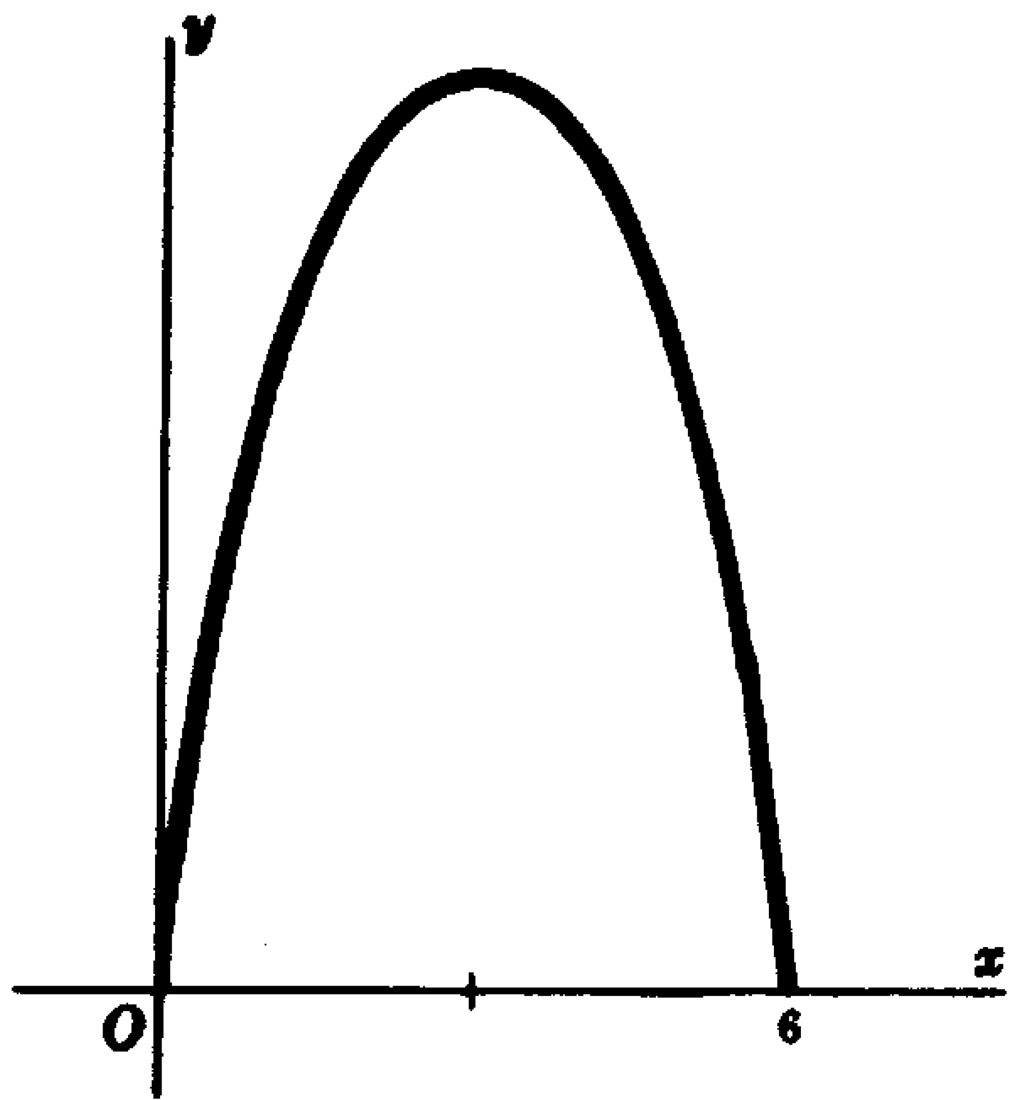
مثـــال ٢ : فى المعادلة $x^2 - y = 10$ ، حيث x متغير مستقل ، تقرن قيمة لـ y مع كل قيمة لـــ x والدالة المعرفة هى $y = x^2 - 10$ ولنفس المعادلة إذا أخذنا y متغيرا مستقلا ، فإن قيمتين لـ x بوجه عام تقابل كل قيمة لـ y . وبهذا يتعرف لدينا ، دالتان لـ y هما $x = \sqrt{10 + y}$ و $x = -\sqrt{10 + y}$.

يعرف بعض المؤلفين y على أنها دالة لـ x عندما تقرن بكل قيمة لـــ x فى مداها قيمة واحدة أو أكثر لـ y عندئذ تسمى y فى المثال ٢ ،دالة وحيدة القيمة فى x بينما تسمى x دالة مضاعفة القيم (بعبارة أدق ، دالة ثنائية القيمة) فى y وعلى كل فإنه فى الحساب التفاضل والتكامل ، علينا أن نعتبر أن الدالة المضاعفة القيمة مكونة من عدة دوال وحيدة القيمة . عندئذ يكون تعريفنا لمصطلح دالة معدلا بحيث ينطوى على هذه الخاصية لوحدة (وحدانية) القيمة .

يستعمل الرمز $f(x)$ ، والذى يقرأ الدالة f لـ x أو f لـ x ولكنه لا يقرأ أبدا x مرة f ، ليشير إلى دالة مفروضة فى x وإذا صادف أن تضمنت المسألة دالة أخرى لـ x فعندئذ ينبغى أن نستعمل رمزا آخر مثال ...,$g(x), h(x). F(x), \theta(x)$

ومن الضرورى عند دراسة الدالة $y = f(x)$ أن نعرف دوما مدى المتغير المستقل والذى نسميه حيز (مجال) التعريف الدالة .

مثال ٣ :



شكل ١ — ١

(ا) الدالة $f(x) = 18x - 3x^2$ معرفة لكل عدد x ، أى أن $18x - 3x^2$ هو عدد حقيقى ، بدون استثناء ، طالما x عدد حقيقى ، وعلى هذا فإن مدى x أو حيز التعريف للدالة هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية .

(ب) المساحة (y) لمستطيل مفروض طول أحد أضلاعه x هى $y = 18x - 3x^2$ هنا ينبغى أن يكون كل من x, $18x - 3x^2$ موجبا .

ويتضح من الشكل المرافق أو من المسألة ٣ (ا) أن حيز التعريف هو الفترة $0 < x < 6$.

(جـ) حيز التعريف للدالة $y = x^2 - 10$ فى المثال (٢) هو مجموعة جميع الأعداد الحقيقية . أما بالنسبة للدالتين $x = \sqrt{10+y}$ و $x = -\sqrt{10 + y}$ فينبغى أنيكون $10 + y \geq 0$ ، وحيز التعريف،إذن ، لكلمنهما هو $y \geq -10$.

نقول عن دالة $f(x)$ إنها معرفة فى فترة ما إذا كانت معرفة لكل نقطة من نقط الفترة . وإذا كانت $f(x)$ دالة مفروضة لـ x وكانت a من حيز تعريفها فعندئذ نعنى بـ $f(a)$ العدد الذى نحصل عليه باستبدال x بـ a فى $f(x)$ أو القيمة التى تتخذها $f(x)$ عندما $x = a$.

مثال ٤ : إذا كان $f(x) = x^3 - 4x + 2,$ فعندئذ يكون

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1,$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2,$$
$$f(a) = a^3 - 4a + 2, \text{ etc.}$$

أنظر المسائل (٤ — ١٣) .

المتتابعة (المتوالية) غير المنتهية : هى دالة لمتغير (نرمز له عادة بـ n) يقتصر مداه على مجموعة من الأعداد الصحيحة الموجبة . فمثلا إذا أعطينا n القيمة $1, 2, 3, 4, ...$ على الترتيب فإن الدالة $\frac{1}{n+1}$ تعطى متتابعة أو متوالية الحدود $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ ونقول عن المتوالية إنها متوالية لا نهائية لنعنى بذلك أنه لا يوجد لها حد أخير .

تسمى الدالة ، مثل $\frac{1}{n+1}$ فى الفقرة السابقة ، الحد العام أو الحد n للمتوالية ، ويشار للمتوالية غير المنتهية بوضع حدها العام بين قوسين مثل $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ أو بكتابة عدة حدود من المتوالية مثل $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n+1}$.

انظر المسألتين ١٤ — ١٥

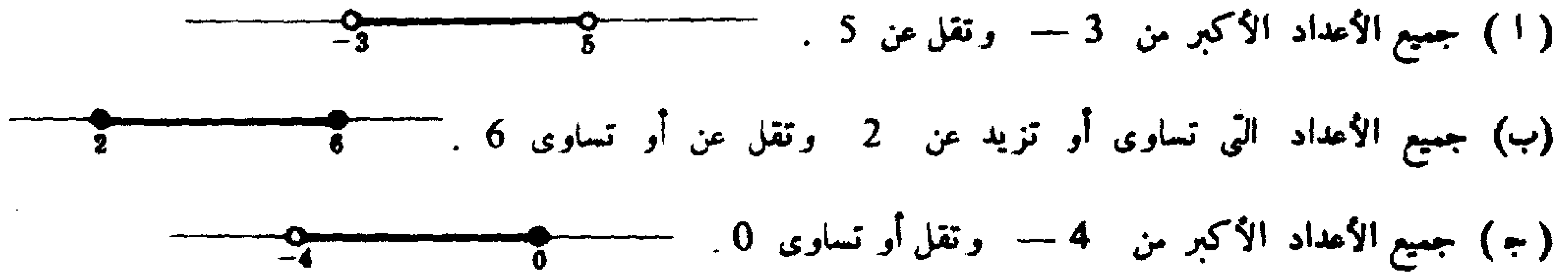
مسائل محلولة

١ — صف الفترات (ا) $-3<x<5$, (ب) $2 \le x \le 6$, (ج) $-4<x\le 0$, (د) $x>5$, (هـ) $x \le 2$. وارسمها بيانيا

(ا) جميع الأعداد الأكبر من 3 — وتقل عن 5 .

(ب) جميع الأعداد التى تساوى أو تزيد عن 2 وتقل عن أو تساوى 6 .

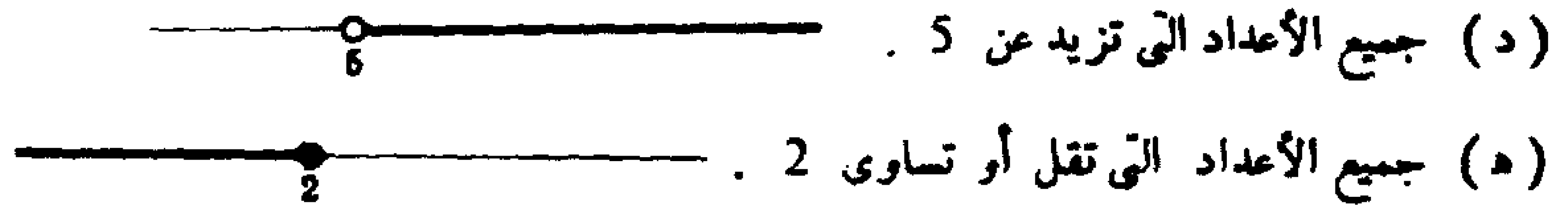
(ج) جميع الأعداد الأكبر من 4 — وتقل أو تساوى 0 .



هذه الفترة المحددة تتضمن إحدى نقط النهاية فقط دون النقطة الأخرى ، وتدعى فترة نصف مفتوحة .

(د) جميع الأعداد التى تزيد عن 5 .

(هـ) جميع الأعداد التى تقل أو تساوى 2 .



٢ — صف الفترات التالية وارسمها بيانيا :

(ا) $|x|<2$; (ب) $|x|>3$; (ج) $|x-3|<1$; (د) $|x-2|<\delta, \delta>0$; (هـ) $0<|x+3|<\delta, \delta>0$.

(ا) هى الفترة المفتوحة $-2<x<2$.

(ب) فترتان غير محددتين هما $x>3$. $x<-3$

(ج) فترة مفتوحة حول النقطة 3 ولإيجاد نقطتى نهايتيها نضع $x-3=1$ فنجد أن $x=4$ ونضع $3-x=1$ فنجد أن $x=2$ (تذكر أن $|x-3|$ تساوى $x-3$ أو $3-x$ على حسب قيمة x). وإذن نقطتا النهاية هما 2, 4 والفترة هى $2<x<4$. لاحظ أن هذه الفترة تتكون من جميع النقط التى يكون بعدها عن 3 أقل من 1 .



(د) لنتصور δ عددا موجبا مفروضا ، عندئذ تتكون الفترة $2-\delta<x<2+\delta$ من جميع النقط التى يكون بعدها عن 2 أقل من δ . وتسمى هذه الفترة δ — المجاورة للعدد 2.



(هـ) المتباينة $\delta > |x+3|$ تعرف الفترة $-3-\delta < x < -3+\delta$ والتي تشمل العدد -3 والشرط الإضافي $0 < |x+3|$ يتطلب أن تكون $x \neq -3$. وهكذا فإن مدى x يتكون من فترتين مفتوحتين هما $-3-\delta < x < -3$ و $-3 < x < -3+\delta$ وتشكل الفترتين جوار محذوف δ للعدد -3.



٣ — حل المتباينات : (أ) $18x - 3x^2 > 0$, (ب) $(x+3)(x-2)(x-4) < 0$, (جـ) $(x+1)^2(x-3) > 0$.

(أ) ضع $18x - 3x^2 = 3x(6-x) = 0$, لنجد أن $x = 0$ و $x = 6$ ثم عين إشارة $18x - 3x^2$ في كل من الفترات $x < 0$ و $0 < x < 6$ و $x > 6$ فنجد أن المتباينة تتحقق لجميع قيم x في الفترة $0 < x < 6$.

(ب) بعد تحديد إشارة $(x+3)(x-2)(x-4)$ في كل من الفترات $x < -3$, $-3 < x < 2$, $2 < x < 4$, و $x > 4$, نستنتج أن المتباينة تتحقق لجميع قيم x في الفترتين $x < -3$ و $2 < x < 4$.

(جـ) الفترات التي ينبغي البحث فيها هي $x < -1$, $-1 < x < 3$, $x > 3$. والمتباينة تتحقق عندما $x > 3$. لاحظ أن $(x+1)^2 > 0$ مهما كانت x ولذلك يمكننا إهمال هذا المضروب. ترى هل يمكن كذلك إهمال المضروب $(x+1)^3$ ؟

٤ — لنفرض $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$, أوجد $f(0)$, $f(-1)$, $f(2a)$, $f(1/x)$ و $f(x+h)$.

$$f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}, \quad f(-1) = \frac{-1-1}{1+2} = -\frac{2}{3}, \quad f(2a) = \frac{2a-1}{4a^2+2},$$

$$f(1/x) = \frac{1/x-1}{1/x^2+2} = \frac{x-x^2}{1+2x^2}, \quad f(x+h) = \frac{x+h-1}{(x+h)^2+2} = \frac{x+h-1}{x^2+2hx+h^2+2}$$

٥ — إذا كان $f(x) = 2^x$ بين أن (أ) $f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$ (ب) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$.

(أ) $f(x+3) - f(x-1) = 2^{x+3} - 2^{x-1} = 2^x(2^3 - \frac{1}{2}) = \frac{15}{2} f(x)$ (ب) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)} = \dfrac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^4 = f(4)$

٦ — إذا كان $f(x) = \log_a 1/x$, فبين أن (أ) $f(a^3) = -3$ (ب) $f(a^{-1/z}) = 1/z$.

(أ) $f(a^3) = \log_a 1/a^3 = \log_a a^{-3} = -3$ (ب) $f(a^{-1/z}) = \log_a 1/a^{-1/z} = \log_a a^{1/z} = 1/z$

٧ — إذا كان $f(x) = \log_a x$ و $F(x) = a^x$, فبين أن $F(f(x)) = f(F(x))$.

$$F(f(x)) = F(\log_a x) = a^{\log_a x} = x = \log_a a^x = f(a^x) = f(F(x)).$$

٨ — عين مدى المتغير المستقل بفرض :

(أ) $y = \sqrt{4-x^2}$, (ب) $y = \sqrt{x^2-16}$, (جـ) $y = \dfrac{1}{x-2}$, (د) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$, (هـ) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$.

(أ) بما أنه ينبغي أن تكون y حقيقية فإن $4 - x^2 \geq 0$ أو $x^2 \leq 4$ ومدى x هو الفترة $-2 \leq x \leq 2$ أو $|x| \leq 2$. وبعبارة أخرى فإن $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ معرفة على الفترة $-2 \leq x \leq 2$ وعلى هذه الفترة فقط.

(ب) يكون هنا $x^2 - 16 \geq 0$ أو $x^2 \geq 16$; ويتكون مدى x من الفترتين $x < -4$ و $x \geq 4$, أو $|x| \geq 4$.

(جـ) إن الدالة معرفة لجميع قيم x باستثناء $x = 2$. ويمكن أن يكون مدى x هو $x < 2$, $x > 2$ أو $x \neq 2$.

(د) الدالة معرفة من أجل $x \neq \pm 3$.

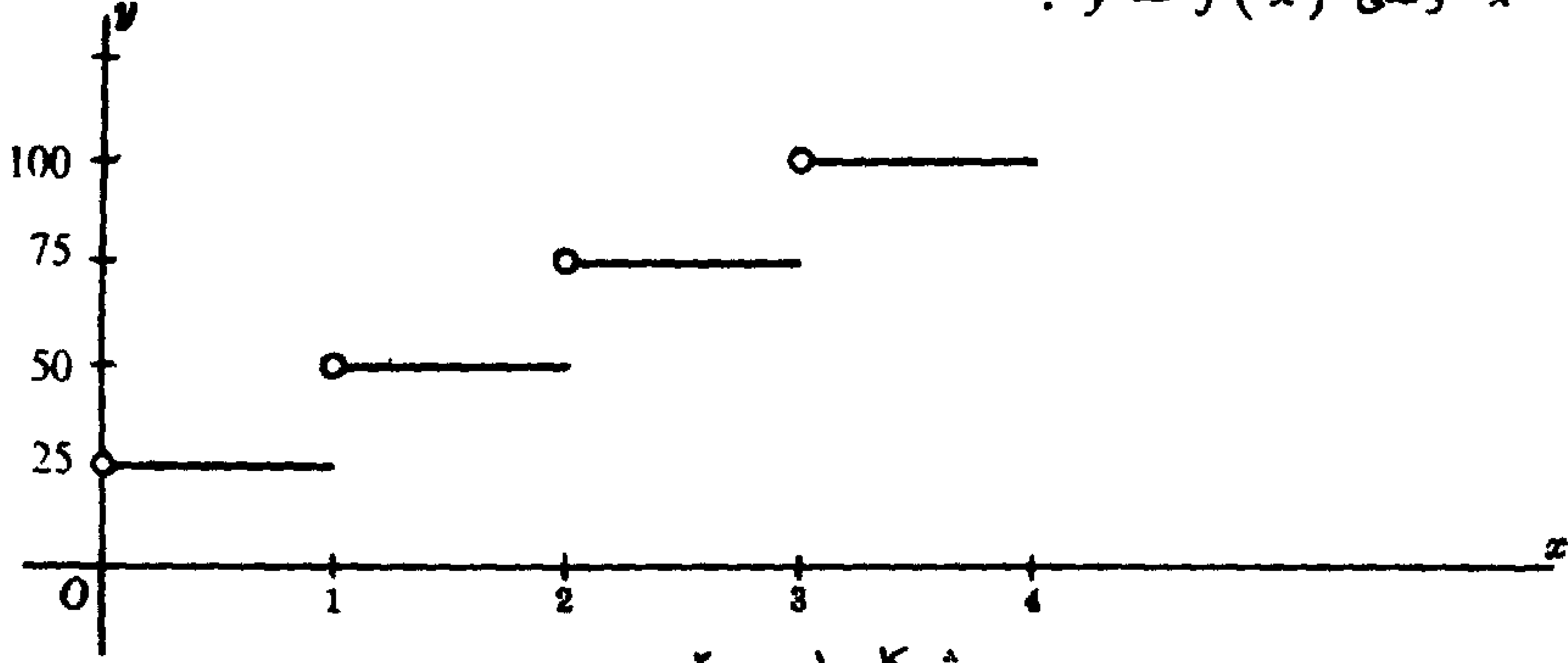
(هـ) بما أن $x^2 + 4 \neq 0$ لجميع قيم x فإن مدى x هو فئة الأعداد الحقيقية.

٩ – ارسم بيانيا الدالة المعرفة بالآتى :

$f(x) = 5$ عندما $0 < x \leq 25$ ، $f(x) = 10$ عندما $25 < x \leq 50$

$f(x) = 15$ عندما $50 < x \leq 75$ ، $f(x) = 20$ عندما $75 < x \leq 100$

وهكذا عين مدى x ومدى $y = f(x)$.



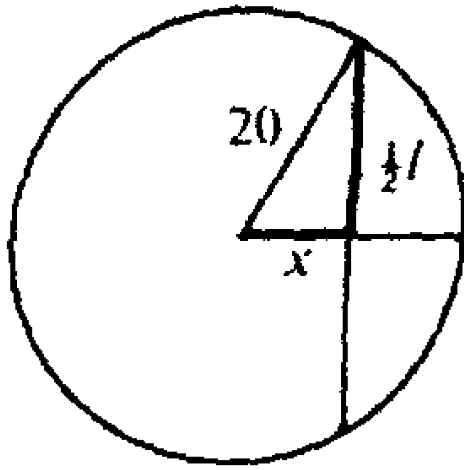
شكل ١ — ٢

تعبر الدالة $f(x)$ عن التكلفة (مقدرة بالسنتات) للبريد الداخلى من الدرجة الأولى للرسالة (أو للطرد) التى وزنها x gm . إن مدى x هو الفترة $x > 0$ ومدى $y = f(x)$ هو مجموعة الأعداد الصحيحة 25, 50, 75, 100,

١٠ – يلزم لإحاطة قطعة أرض مستطيلة 600 m من السياج . فإذا كان أحد الأبعاد x m ، فعبر عن المساحة y (m^3) كدالة لـ x . عين مدى x .

بما أن أحد الأبعاد x فإن البعد الآخر يكون $\frac{1}{2}(600 - 2x) = 300 - x$.

وبذلك تكون المساحة $y = x(300 - x)$ ويكون مدى x $0 < x < 300$.

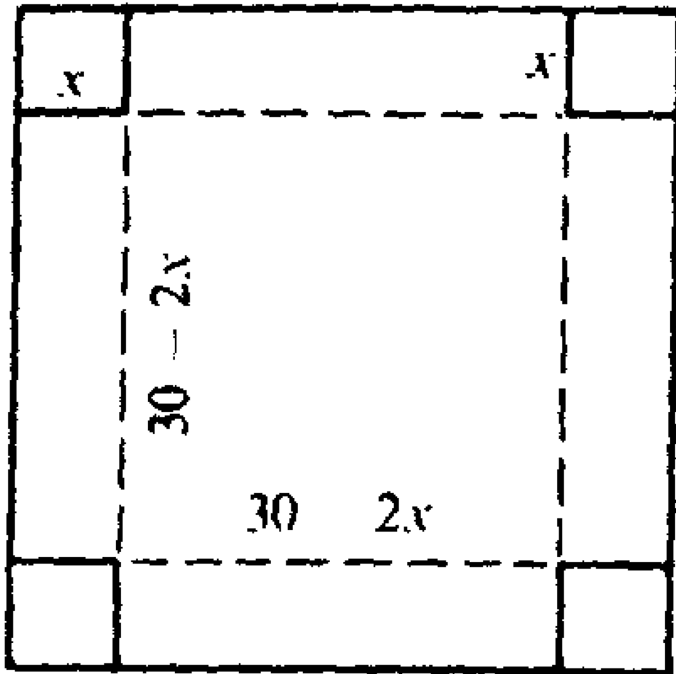


شكل ١ — ٣

١١ – عبر عن الطول l لوتر دائرة نصف قطرها 20 cm كدالة لبعد الوتر عن مركز الدائرة وليكون x cm . عين مدى x .

من الشكل ١ – ٣ يتضح أن $\frac{1}{2}l = \sqrt{400 - x^2}$ و $l = 2\sqrt{400 - x^2}$.

ويكون مدى x هو الفترة $0 \leq x < 20$



شكل ١ — ٤

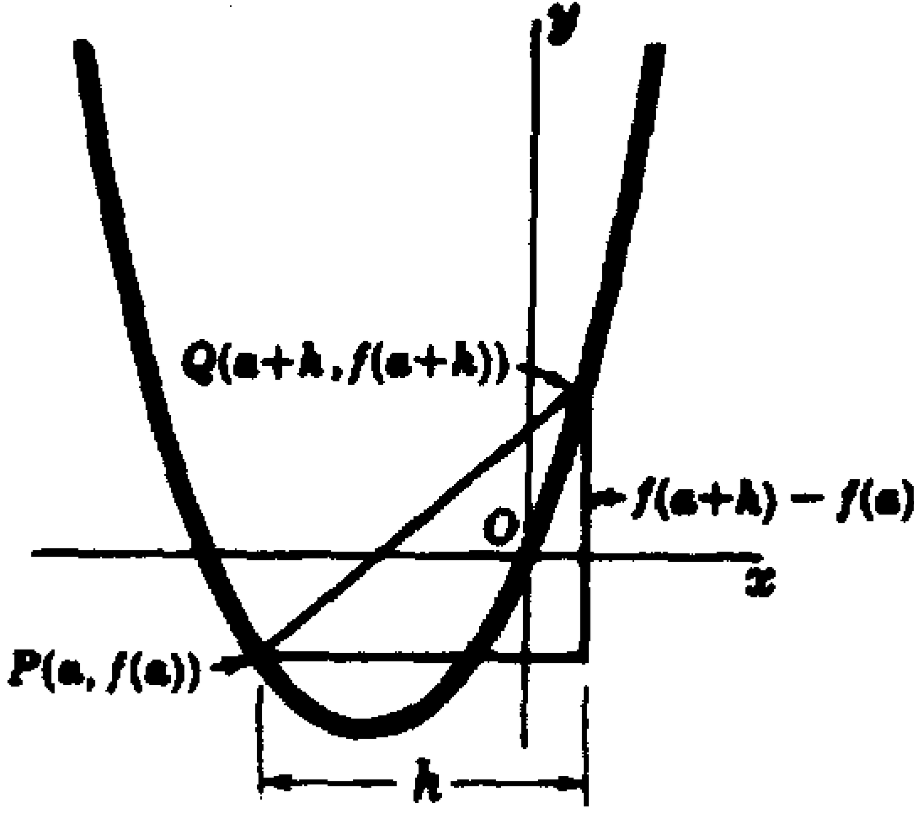
١٢ – إذا قطع من كل ركن من أركان مربع من القصدير ، طول ضلعه 30 cm ؛ مربعا صغيرا طول ضلعه x cm ثم ثنينا الحواف لتشكل علبة مفتوحة . عبر عن الحجم V (m^3) كدالة لـ x ثم ابحث فى مدى كل متغير .

إن قاعدة العلبة مربع طول ضلعه $(30-2x)$ cm وارتفاعها x cm إذن حجمها : $V = x(30-2x)^2 = 4x(15-x)^2$. ومدى x هو الفترة $0 < x < 15$.

وعندما تزداد x فى مداها فإن V تزداد لبرهة ثم تتناقص بعدها . على هذا فإنه من بين العلب التى يمكن تصميمها توجد واحدة ذات أكبر حجم .

وليكن هذا الحجم M ، لتعيين M ينبغى أن نحدد بدقة النقطة (قيمة x) التى تقف فيها V عن الزيادة وسوف ندرس هذه المسألة فى فصل آخر .

١٣ — إذا كان $f(x) = x^2 + 2x$, فأوجد $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ثم فسر النتيجة .



$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h}$$
$$= 2a + 2 + h$$

حدد على بيان الدالة (شكل ١ — ٥) موضعى النقطتين Q و P .

اللذين احداثيهما السينيان هما $a, a+h$ على الترتيب .

والإحداثى الصادى لـ P هو $f(a)$ ولـ Q هو $f(a+h)$ عندئذ تكون :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\text{فرق الإحداثى الصادى}}{\text{فرق الاحداثى السينى}} = \text{ميل } PQ$$

شكل ١ — ٥

١٤ — اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتواليات التالية :

(ا) $\left\{1 - \frac{1}{2n}\right\}$. ضع $s_n = 1 - \frac{1}{2n}$; فتجد $s_1 = 1 - \frac{1}{2\cdot1} = \frac{1}{2}$,

$s_2 = 1 - \frac{1}{2\cdot2} = \frac{3}{4}$, $s_3 = 1 - \frac{1}{2\cdot3} = \frac{5}{6}$, $s_4 = 1 - \frac{1}{2\cdot4} = \frac{7}{8}$, و $s_5 = 9/10$.

والحدود المطلوبة هى . 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10 .

(ب) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}\right\}$. هنا . $s_1 = (-1)^2\frac{1}{3\cdot1-1} = 1/2$,

$s_2 = (-1)^3\frac{1}{3\cdot2-1} = -1/5$, $s_3 = (-1)^4\frac{1}{3\cdot3-1} = 1/8$,

$s_4 = -1/11$, $s_5 = 1/14$. والحدود المطلوبة هى . 1/2, −1/5, 1/8, −1/11, 1/14.

(جـ) $\left\{\frac{2n}{1+n^2}\right\}$. الحدود هى 1, 4/5, 3/5, 8/17, 5/13.

(د) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)(n+2)}\right\}$. والحدود هى $\frac{1}{2\cdot3}, \frac{-2}{3\cdot4}, \frac{3}{4\cdot5}, \frac{-4}{5\cdot6}, \frac{5}{6\cdot7}$.

(هـ) $\{\frac{1}{2}[(-1)^n + 1]\}$. الحدود هى 0, 1, 0, 1, 0.

١٥ — اكتب الحد العام لكل من المتواليات الآتية :

(ا) . 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/9, ...

الحدود هى مقلوبات الأعداد الفردية الصحيحة الموجبة والحد العام هو $\frac{1}{2n-1}$.

(ب) 1, −1/2, 1/3, −1/4, 1/5, ...

إن هذه الحدود ، بغض النظر عن الإشارة ، هى مقلوب الأعداد الصحيحة الموجبة والحد العام هو $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ أو $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

(جـ) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, ...

أن هذه الحدود هى مقلوبات مربعات الأعداد الموجبة والحد العام هو $1/n^2$.

(د) $\frac{1}{2}, \frac{1\cdot3}{2\cdot4}, \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}, \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}, \ldots$ والحد العام هو $\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}$.

(هـ) $1/2, -4/9, 9/28, -16/65, \ldots$

إن البسط بغض النظر عن الإشارة ، هو مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة والمقامات هي مكعبات هذه الأعداد الصحيحة بعد إضافة 1 لها ، والحد العام هو $(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n^3+1}$.

١٦ – برهن أنه إذا كان a و b أي عددين فإن $|a+b| \leq |a| + |b|$.

اعتبر الحالات الآتية (ا) كلا من a و b غير سالب (ب) كلا من a و b سالب (جـ) أحد العددين a و b موجبا والآخر سالباً .

(ا) بما أن $|a| = a, |b| = b,$ فإن $a+b$ صفرا أو عددا موجبا وبالتالي فإن :

$$|a+b| = a+b = |a| + |b|$$

(ب) بما أن $|a| = -a, |b| = -b.$ فإن $a+b$ عدد سالب وبالتالي فإن :

$$|a+b| = -(a+b) = -a + (-b) = |a| + |b|$$

(جـ) لنأخذ $a > 0$ ، $b < 0$ فعندئذ يكون $|a| = a, |b| = -b,$

فإذا كان $|a| > |b|,$ فإن $|a+b| = a+b < a-b = |a| + |b|.$

وإذا كان $|a| < |b|,$ فإن $|a+b| = -a-b < a-b = |a| + |b|.$

وإذا كان $|a| = |b|,$ فإن $|a+b| = 0 < |a| + |b|.$

وهكذا إذا كان $a > 0$ و $b < 0$ أو إذا كان $a < 0$ و $b > 0,$ فإن $|a+b| < |a| + |b|.$

مسائل اضافية

١٧ – ارسم بيان كل من الفترات الآتية :

(ا) $-5 < x < 0$ (ب) $x \leq 0$ (جـ) $-2 \leq x < 3$ (د) $x \geq 1$

(هـ) $|x| < 3$ (و) $|x| \geq 5$ (ز) $|x-2| < \frac{1}{2}$ (ح) $|x+3| > 1$

(ط) $0 < |x-2| < 1$ (ى) $0 < |x+3| < \frac{1}{4}$ (ك) $|x-2| \geq 1$

١٨ – إذا كان $f(x) = x^2 - 4x + 6,$ فأوجد (ا) $f(0)$ ، (ب) $f(3)$ ، (جـ) $f(-2)$

ج : (ا) 6 ، (ب) 3 ، (جـ) 18 برهن أن $f(\frac{1}{2}) = f(7/2)$ و $f(2-h) = f(2+h).$

١٩ – إذا كان $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1},$ فأوجد (ا) $f(0)$ ، (ب) $f(1)$ ، (جـ) $f(-2)$

ج : (ا) -1 (ب) 0 (جـ) 3 .

برهن أن $f(1/x) = -f(x)$ و $f(-1/x) = -1/f(x).$

٢٠ – إذا كان $f(x) = x^2 - x,$ فبرهن أن $f(x+1) = f(-x).$

٢١ – إذا كان $f(x) = 1/x,$ فبرهن أن $f(a) - f(b) = f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right).$

٢٢ – إذا كان $y = f(x) = (5x+3)/(4x-5),$ فبرهن أن $x = f(y).$

٢٣ — عين حيز التعريف لكل من الدوال الآتية :

(ا) $y = x^2 + 4$ (جـ) $y = \sqrt{x^2 - 4}$ (هـ) $y = \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$ (ز) $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

(ب) $y = \sqrt{x^2 + 4}$ (د) $y = \frac{x}{x+3}$ (و) $y = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ (حـ) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$

ج : (ا) ، (ب) ، (ز) جميع قيم x ، (جـ) $|x| \geq 2$; (د) $x \neq -3$; (هـ) $x \neq -1, 2$; (و) $-3 < x < 3$;
(حـ) $0 \leq x < 2$

٢٤ — احسب $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ، بفرض أن (ا) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ عندما $a \neq 2,\ a+h \neq 2$; (ب) $f(x) = \sqrt{x-4}$ عندما $a \geq 4,\ a+h \geq 4$; (جـ) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ عندما $a \neq -1,\ a+h \neq -1$.

ج : (ا) $\frac{-1}{(a-2)(a+h-2)}$ ، (ب) $\frac{1}{\sqrt{a+h-4} + \sqrt{a-4}}$ ، (جـ) $\frac{1}{(a+1)(a+h+1)}$

٢٥ — اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متوالية مما يلي :

(ا) $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ (جـ) $\{a + (n-1)d\}$ (هـ) $\left\{\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right\}$ (ز) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n!}{n^n}\right\}$

(ب) $\left\{\frac{1}{n(n+1)}\right\}$ (د) $\{(-1)^{n+1} ar^{n-1}\}$ (و) $\left\{\frac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$ (حـ) $\left\{\frac{(2n)!}{3^n 5^{n-1}}\right\}$

ج : (ا) $2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5$

(ب) $1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30$

(جـ) $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$

(د) $a, -ar, ar^2, -ar^3, ar^4$

(هـ) $1/\sqrt{2}, 2/\sqrt{5}, 3/\sqrt{10}, 4/\sqrt{17}, 5/\sqrt{26}$

(و) $\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, 2/3, \frac{1}{4}\sqrt{5}, \sqrt{6}/5$

(ز) $1, -1/2, 2/9, -3/32, 24/625$

(حـ) $\frac{2}{3}, \frac{2^3}{3 \cdot 5}, \frac{2^4}{3 \cdot 5}, \frac{7 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^3}, \frac{7 \cdot 2^8}{3 \cdot 5^3}$

٢٦ — عين الحد العام لكل متوالية :

(ا) $1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \ldots$

(ب) $1/2, -1/6, 1/12, -1/20, 1/30, \ldots$

(جـ) $1/2, 1/12, 1/30, 1/56, 1/90, \ldots$

(د) $1/5^3, 3/5^5, 5/5^7, 7/5^9, 9/5^{11}, \ldots$

(هـ) $1/2!, -1/4!, 1/6!, -1/8!, 1/10!, \ldots$

ج : (ا) $\frac{n}{n+1}$ ، (ب) $(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2+n}$ ، (جـ) $\frac{1}{(2n-1)2n}$ ، (د) $\frac{2n-1}{5^{2n+1}}$ ، (هـ) $(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}$

٢٧ — « كلما كان $|x - 4| < 1$ فإن $|f(x)| > 1$ » تعنى أنه كلما كانت x بين 3 و 5 فإن $f(x)$ إما أن تكون أصغر من 1 — أو أكبر من 1 + اشرح كلا مما يلى :

(ا) كلما كان $|x-1| < 2$ فإن $|f(x)| < 10$. (جـ) كلما كان $0 < |x-6| < 1$ فإن $|f(x)| > 0$.

(ب) كلما كان $|x-5| < 2$ فإن $|f(x)| > 0$. (د) كلما كان $|x-3| < 2$ فإن $|f(x) - 9| < 4$.

٢٨ — اعتبر $y = f(x) = 6x - x^2$ ، ارسم المنحنى البيانى وعين أى الفقرات من (ا) إلى (د) فى المسألة ٢٧ صحيحة وأيها خطأ . ج (ب) خطأ

٢٩ — إذا كان a و b أى عددين فبين أن $|a + b| = |b \pm a|$; $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a/b| = |a| / |b|, b \neq 0$; $|a+b| \geq |a| - |b|$; $|a - b| \leq |a| + |b|$; $|a - b| \geq |a| - |b|$.

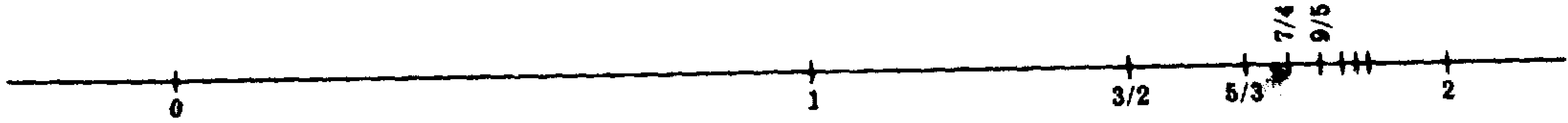
الفصل الثانى

النهايــات

نهاية المتوالية : إذا وقعت النقط المتتالية التى تعطى بحدود المتوالية

(١) $$1,\ 3/2,\ 5/3,\ 7/4,\ 9/5,\ \ldots,\ 2-1/n,\ \ldots$$

على السلم العددى فإننا نلاحظ أنها تتجمع حول النقطة 2 بطريقة ما بحيث أننا نجد نقطاً من المتوالية بعدها عن 2 أقل من أى عدد موجب محسوب مهما كان هذا العدد صغيرا .



فمثلا النقطة 2001/1001 وجميع النقط التى تليها تكون على بعد أقل من 1/1000 عن 2 والنقطة 20000001/10000001 وجميع النقط التى تليها على بعد أقل من 1/1000000 عن 2 وهكذا . نشير إلى هذا الأمر بقولنا إن نهاية المتوالية هى العدد 2 .

وإذا كان x متغيرا ، مداه المتوالية (١) ، فإننا نقول أن x تقترب من 2 كنهاية لها أو أن x تؤول إلى 2 كنهاية لها وتكتب $x\to 2$.

إن المتوالية (١) لا تحتوى على نهايتها وهى العدد 2 كأحد حدودها أما المتوالية $1, 1/2, 1, 3/4, 1, 5/6, 1, \ldots$ فإنها تؤول إلى 1 كنهاية لها وأن كل حد فردى يساوى 1 وبذا نرى أنه يمكن للمتوالية أن تبلغ نهايتها وقد لا يمكنها ذلك . غير أننا سنفهم فيما يلى من أن $x\to a$ تستلزم أن $x \neq a$ أى أنه ينبغى أن ندرك أن أى متوالية مفروضة اختيارية لا تحتوى نهايتها كأحد حدودها .

نهاية الدالة :

لنفترض أن $x\to 2$ على المتوالية (١) عندئذ $f(x)=x^2\to 4$ على المتوالية $1, 9/4, 25/9, 49/16, \ldots, (2-1/n)^2, \ldots$ لنجعل الآن $x\to 2$ على المتوالية

(٢) $$2.1,\ 2.01,\ 2.001,\ 2.0001,\ \ldots,\ 2+1/10^n,\ \ldots$$

فعندئذ $x^2\to 4$ على المتوالية $4.41, 4.0401, 4.004001, \ldots, (2+1/10^n)^2, \ldots$ ويبدو من المعقول أن نقبل أن x^2 تقترب من 4 كنهاية لها عندما تقترب x من 2 كنهاية لها . ونقول تحت هذه الفروض إن نهاية x^2 ، عندما تقترب x من 2 ، تساوى 4 وتكتب $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$

أنظر المسألتين ١ – ٢

النهايتان اليسرى واليمنى :

إن قيمة x عندما $x \to 2$ على المتوالية (١) ، هى باستمرار أصغر من 2 وعلى هذا فإننا نقول x تقترب من 2 من اليسار وتكتب $x \to 2^-$. وبالمثل قيمة x عندما $x \to 2$ على المتوالية (٢) هى باستمرار أكبر من 2 . ونقول فى مثل هذه الحالة إن x تقترب من اليمين وتكتب $x \to 2^+$. ومن الواضح أن وجود العبارة $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ تستلزم وجود تساوى كل من نهاية اليسار $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ ونهاية اليمين $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ على أن وجود نهاية اليمين (اليسار) لا يستلزم وجود نهاية اليسار (اليمين) .

مثـــال ١ :

إن حيز التعريف للدالة $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ هو الفترة $-3 \le x \le 3$ فإذا كان a أى عدد فى الفترة المفتوحة $-3 < x < 3$ فإن $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{9-x^2}$ موجودة وتساوى $\sqrt{9-a^2}$ ، لنعتبر الآن $a = 3$ ولنجعل x تقترب من 3 من اليسار أولا فنجد أن $\lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{9-x^2} = 0$ أما إذا جعلنا x بعد ذلك تقترب من 3 من اليمين فإننا نجد أن $\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة لأن $\sqrt{9-x^2}$ يكون تخيليا عندما $x > 3$ وهكذا نجد أن $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودة .

بالمثل نجد أن $\lim\limits_{x \to -3^+} \sqrt{9-x^2}$ موجودة ومساوية للصفر ولكن $\lim\limits_{x \to -3^-} \sqrt{9-x^2}$ وبالتالى $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{9-x^2}$ غير موجودتين .

نظريات النهايات :

فيما يلى نظريات النهايات التالية للرجوع إليها فيما بعد :

I. إذا كان $f(x) = C$ ، ثابتا ، فإن $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$

إذا كان $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, فإن

II. $\lim\limits_{x \to a} k \cdot f(x) = kA$, حيث K أى ثابت

III. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \pm B$.

IV. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = A \cdot B$.

V. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, بفرض أن $B \neq 0$

VI. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, بفرض أن $\sqrt[n]{A}$ عدد حقيقى

اللانهـاية :

لنفرض أن مدى المتغير x هو المتوالية $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots$; إذن

(i) نقول عن x إنها أصبحت لا نهاية موجبة [$x \to +\infty$] إذا أصبحت فى آخر الأمر أكبر من أى عدد موجب مفروض ، مهما كان كبيرا ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعدا مثال ذلك $x \to +\infty$ على المتوالية $1, 2, 3, 4, \ldots$.

(ii) نقول عن x إنها أصبحت لا نهاية سالبة [$x \to -\infty$] إذا أصبحت فى آخر الأمر أصغر من أى عدد سالب مفروض ، مهما كان صغيرا وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعدا . مثال ذلك . $x \to -\infty$ على المتوالية $-2, -4, -6, -8, \ldots$

(iii) نقول عن x إنها أصبحت لا نهاية [$x \to \infty$] إذا كان $|x| \to \infty$ أى إذا كانت $x \to +\infty$ أو $x \to -\infty$.

نقول عن دالة $f(x)$ إنها أصبحت لا نهاية موجبة عندما $x \to a$ ، $\left[\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \right]$ إذا أصبحت $f(x)$ فى آخر الأمر ، عندما تقترب x من نهايتها a (دون أن تبلغ القيمة a) ، أكبر من أى عدد موجب مفروض ، مهما كان كبيرا ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعدا .

ونقول عن دالة $f(x)$ أنها أصبحت لا نهاية سالبه عندما $x \to a$ $\left[\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \right]$ إذا أصبحت $f(x)$ فى آخر الأمر ، عندما تقترب x من a (دون أن تبلغ القيمة a) أصغر من أى عدد سالب مفروض ، مهما كان صغيرا ، وحافظت على هذا من ذلك الحين فصاعدا .

نقول عن دالة $f(x)$ أنها أصبحت لا نهاية عندما $x \to a$ ، $\left[\lim_{x \to a} f(x) = \infty \right]$ إذا كان $\lim_{x \to a} |f(x)| = +\infty$

مثال ٢ :

(ا) عندما $x \to 2$ على المتولية (١) فإن $f(x) = \frac{1}{2-x} \to +\infty$ على المتوالية $1, 2, 3, 4, \ldots$ وعموما ، إذا كانت $x \to 2^-$ إذن $\frac{1}{2-x} \to +\infty$ ونكتب $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$

(ب) عندما $x \to 2$ على المتوالية (٢) فإن $f(x) = \frac{1}{2-x} \to -\infty$ على المتوالية $-10, -100, -1000, -10000, \ldots$ وعموما إذا كانت $x \to 2^+$ إذن $\frac{1}{2-x} \to -\infty$ ونكتب $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{2-x} = -\infty$

(ج) عندما $x \to 2$ على المتوالية (١) و (٢) فإن $|f(x)| = \left| \frac{1}{2-x} \right| \to +\infty$ ونكتب $\lim_{x \to 2} \frac{1}{2-x} = \infty$

ملاحظة : ليست الرموز $+\infty$ ، $-\infty$ ، ∞ أعدادا جديدة ينبغى أن تضم إلى مجموعة الأعداد الحقيقية إنما وضعت هذه الرموز لتدل على نمط خاص لسلوك المتغير أو الدالة . فعندما تزداد قيمة متغير أو دالة على نحو ثابت دون أن تتجاوز

أبدا عددا معينا M فإن المتغير أو الدالة تقترب من M أو من عدد أصغر كنهاية لها . أما إذا لم يوجد عدد مثل M فإن المتغير أو الدالة تصبح لا نهائية وفى هذه الحالة الأخيرة لا توجد نهاية ويستعمل غالبا رمز نهاية لملاءمته .

انظر المسائل ٣ — ١٢

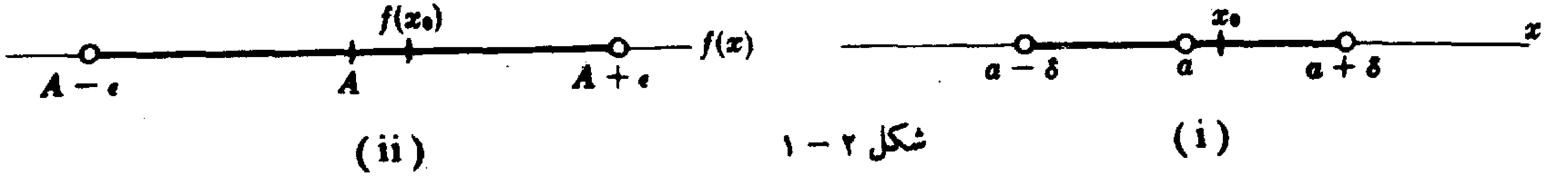
لقد اثبت التعبير : $\lim_{x \to a} f(x) = A$ باختبار سلوك $f(x)$ عندما $x \to a$ على عدد من المتواليات .

فإذا سبق أن وجد أن $f(x) \to A$ فى كل حالة عندئذ يكون قد استنتج أنه يمكن الحصول على نفس النتيجة لجميع المتواليات الأخرى (غير المختبرة) التى نهايتها a والآن إذا كانت $x \to a$ على عدة متواليات فإنه ينبغى على x أن تقترب فى آخر الأمر من a والمعنى الأساسى لمفهوم النهاية هو أنه عندما تقترب x من a ولكنها تبقى مختلفة عنها فإن $f(x)$ تقترب من A ويمكن صياغة هذا المعنى بعبارة أدق على النحو التالى .

(ا) $\lim_{x \to a} f(x) = A$ إذا كان لأى عدد موجب صغير $\in$ مهما كان صغيرا يوجد عددا موجبا δ بحيث

أنه طالما $0 < |x - a| < \delta$ فإن $|f(x) - A| < \in$

وتحدد المتباينتين الفترتين :



شكل ٢ — ١

وجوهر التعريف هو أنه بعد اختيار $\in$ [أى بعد أن نضع الفترة (ii)] يمكن إيجاد δ [أى يمكن تعين الفترة (i)] بحيث طالما $x \neq a$ على المجال (i) ، ولتكن عند x_0 مثلا ، إذن $f(x)$ تبقى على الفترة (ii) .

مثال ٣ :

استعمل التعريف الدقيق لتبرهن أن $\lim_{x \to 2} (x^2 + 3x) = 10.$

لنفترض أننا اخترنا $\in$ فعندئذ ينبغى أن نحصل على $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x - 2| < \delta$ فإن $|(x^2 + 3x) - 10| < \epsilon.$. ونلاحظ أولا أنه إذا كان $0 < |x - 2| < \lambda < 1,$ إذن $|x - 2|^n < \lambda$ مهما كان العدد الصحيح الموجب n . عندئذ

$$|(x^2 + 3x) - 10| = |(x-2)^2 + 7(x-2)| \leq |x-2|^2 + 7|x-2| < \lambda + 7\lambda = 8\lambda$$

ولكن $\in > 8\lambda$ تستلزم $\lambda < \in/8$. وبالتالى فإن أى عدد موجب أصغر من كلا العددين 1 , $\in/8$ يمكن أن يلعب دور δ ونكون بذلك قد أوجدنا النهاية .

انظر المسائل ١٣ — ١٤

نماذج اخرى من النهايات

نعرف

(ب) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ إذا وجد أى عدد موجب M ، مهما كان كبيرا ، عددا موجبا δ بحيث طالما

$0 < |x - a| < \delta$ إذن $|f(x)| > M$ وعندما يكون $f(x) > M$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

وعندما يكون $f(x) < -M$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

(جـ) $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ إذا وجد أى عدد موجب ϵ مهما كان صغيرا ، عددا موجبا M بحيث طالما $|x| > M$

إذن $|f(x) - A| < \epsilon$.

(د) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ إذا وجد أى عدد موجب M ، مهما كان كبيرا ، عددا موجبا P بحيث طالما $|x| > P$

إذن $|f(x)| > M$

إذا وجدت النهايتان $\lim_{x \to \infty} f(x)$ و $\lim_{x \to \infty} g(x)$ فإن نظريات النهايات التى مرت فى هذا الفصل تبقى صحيحة .

غير أنه لا يمكن استعمال هذه النظريات عندما $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ أو عندما $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$

و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ وعلى سبيل المثال ، فإن $\lim_{x \to 1} \frac{x}{1-x} = \infty$ و $\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x^2} = \infty$ بينما

$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x}{1-x} \Big/ \frac{1}{1-x^2} \right) = \lim_{x \to 1} x(1+x) = 2$ كذلك أن $\lim_{x \to +\infty} (x^2+5) = +\infty$ ، و $\lim_{x \to +\infty} (2-x^2) = -\infty$

بينما $\lim_{x \to +\infty} \{(x^2+5) + (2-x^2)\} = \lim_{x \to +\infty} 7 = 7.$

مســــائل محلولة

١ – عين نهاية كل من المتواليات الآتية :

(ا) $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots$ (جـ) $2, 5/2, 8/3, 11/4, 14/5, \ldots$ (هـ) $1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, \ldots$

(ب) $1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, \ldots$ (د) $5, 4, 11/3, 7/2, 17/5, \ldots$ (و) $.9, .99, .999, .9999, .999\,99, \ldots$

(ا) الحد العام هو $1/n$ وعندما نعطى لـ n القيم $1, 2, 3, 4, \ldots$ على الترتيب فإن $1/n$ تتناقص ولكنها تبقى موجبة . إذن النهاية تساوى 0 .

(ب) الحد العام هو $(1/n)^2$ والنهاية تساوى 0 .

(جـ) الحد العام هو $3 - 1/n$ والنهاية تساوى 3 .

(د) الحد العام هو $3 + 2/n$ والنهاية تساوى 3 .

(هـ) الحد العام هو $1/2^n$ والنهاية تساوى 0 كما فى الحالة (ا) .

(و) الحد العام هو $1 - 1/10^n$ والنهاية تساوى 1 .

٢ – وضح سلوك $y = x + 2$ عندما تتغير x بقيم كل متوالية فى التمرين ١ .

(ا) $y \to 2$ على المتوالية $3, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, \ldots, 2+1/n, \ldots$

(ب) $y \to 2$ على المتوالية $3, 9/4, 19/9, 33/16, 51/25, \ldots, 2+1/n^2, \ldots$

(جـ) $y \to 5$ على المتوالية $4, 9/2, 14/3, 19/4, 24/5, \ldots, 5-1/n, \ldots$

(د) $y \to 5$ على المتوالية $7, 6, 17/3, 11/2, 27/5, \ldots, 5+2/n, \ldots$

(هـ) $y \to 2$ على المتوالية $5/2, 9/4, 17/8, 33/16, 65/32, \ldots, 2 + 1/2^n, \ldots$

(و) $y \to 3$ على المتوالية $2.9, 2.99, 2.999, 2.9999, \ldots, 3 - \frac{1}{10^n}, \ldots$

٣ - احسب

(ا) $\lim_{x \to 2} 5x = 5 \lim_{x \to 2} x = 5 \cdot 2 = 10$

(ب) $\lim_{x \to 2} (2x+3) = 2 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

(جـ) $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 1) = 4 - 8 + 1 = -3$

(د) $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim_{x \to 3}(x-2)}{\lim_{x \to 3}(x+2)} = \frac{1}{5}$

(هـ) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2-4}{x^2+4} = \frac{4-4}{4+4} = 0$

(و) $\lim_{x \to 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 4}(25 - x^2)} = \sqrt{9} = 3$

ملاحظة : عدم التصور من هذه المسائل أن $\lim_{x \to a} f(x)$ هي على الدوام مساوية $f(a)$ والمقصود من $f(a)$ هو قيمة $f(x)$ عندما $x = a$ وكما اصطلحنا في الصفحة ١١ أن x لا تساوي a أبدا عندما $x \to a$.

٤ - اختبر سلوك $f(x) = (-1)^x$ عندما تتغير x بالمتواليتين :

(ا) $1/3, 1/5, 1/7, 1/9, \ldots$ (ب) $2/3, 2/5, 2/7, 2/9, \ldots$

ماذا يمكن القول بخصوص $\lim_{x \to 0} (-1)^x$ و $f(0)$ ؟

(ا) $(-1)^x \to -1$ على المتوالية $-1, -1, -1, -1, \ldots$

(ب) $(-1)^x \to +1$ على المتوالية $+1, +1, +1, +1, \ldots$

وحيث أن $(-1)^x$ تقترب من نهايتين مختلفتين على المتواليتين فإن $\lim_{x \to 0} (-1)^x$ غير موجودة ؛

$$f(0) = (-1)^0 = +1$$

٥ - احسب

(ا) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$

إن عملية القسمة على $(x - 4)$ ، قبل إجراء عملية النهاية ، صحيحة لأنه حسب الاصطلاح في الصفحة ١١ يكون $x \neq 4$ عندما $x \to 4$ وبالتالي فإن $x - 4$ لا تساوي الصفر أبدا .

(ب) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}$

(جـ) $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

إن h هنا ، وفي المسألتين ٧ ، ٨ كذلك ، متغير مما يجعلنا نناقش وكأننا في الحقيقة أمام دوال ذات متغيرين . ومع هذا ، معتمدين على أن x متغير لا يلعب أي دور في هذه المسائل فإنه يمكن اعتبار x ثابتا بشكل مؤقت ، كأن تأخذ x إحدى القيم في مداها .

وجوهر هذه المسألة، كما سنرى فى الفصل ٤ ، هو أنه إذا كانت لـ x أية قيمة ولتكن $x = x_0$ ، فى الحيز $y = x^2$ فإن $\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$ تساوى دائماً ضعف القيمة التى اخترناها لـ x .

(د) $$\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}} = \lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2+5})}{(3 - \sqrt{x^2+5})(3 + \sqrt{x^2+5})} = \lim_{x \to 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2+5})}{4 - x^2}$$
$$= \lim_{x \to 2} (3 + \sqrt{x^2+5}) = 6$$

(هـ) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty;$$
ولا توجد نهاية

٦ — احسب قيم ما يلى مبتدئاً بقسم كل من البسط والمقام على أعلى قوة موجودة لـ x ثم استخدم $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$

(ا) $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{9x + 7} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 2/x}{9 + 7/x} = \frac{3 - 0}{9 + 0} = \frac{1}{3}$$

(ب) $$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 + 2x + 1}{6x^2 - 3x + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{6 + 2/x + 1/x^2}{6 - 3/x + 4/x^2} = \frac{6 + 0 + 0}{6 - 0 + 0} = 1$$

(جـ) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x + 1/x^2 - 2/x^3}{4 - 1/x^3} = \frac{0}{4} = 0$$

(د) $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1/x + 1/x^3} = \infty;$$ ولا توجد نهاية

٧ — بفرض $f(x) = x^2 - 3x,$ أوجد $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

بما أن $f(x) = x^2 - 3x,\ f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$ و

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2hx + h^2 - 3x - 3h) - (x^2 - 3x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2 - 3h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} (2x + h - 3) = 2x - 3$$

٨ — بفرض $f(x) = \sqrt{5x+1},$ أوجد $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ عندما $x > -1/5.$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(5x+5h+1) - (5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1})}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

٩ – عين النقط $x = a$ التي يكون عندها المقام مساويا للصفر . ابحث بعد ذلك في y عندما $x \to a^-$ و $x \to a^+$

(أ) $y = f(x) = 2/x$ ينعدم المقام عندما $x = 0$ فإذا كانت $x \to 0^-$ فإن $y \to -\infty$ وإذا كانت $x \to 0^+$ فإن $y \to +\infty$.

(ب) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$. ينعدم المقام عندما $x = -3$ و $x = 2$. فإذا كانت $x \to -3^-$ فإن $y \to -\infty$ وإذا كانت $x \to -3^+$ فإن $y \to +\infty$. وإذا كانت $x \to 2^-$ فإن $y \to -\infty$ ؛ وإذا كانت $x \to 2^+$ فإن $9 \to +\infty$.

(جـ) $y = f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$. ينعدم المقام عندما تكون $x = -2$ و $x = 1$ وذا كانت $x \to -2^-$ فإن $y \to -\infty$ وإذا كانت $x \to -2^+$ فإن $y \to +\infty$ وإذا كانت $x \to 1^-$ فإن $y \to +\infty$ وإذا كانت $x \to 1^+$ فإن $y \to -\infty$.

(د) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$. ينعدم المقام عندما $x = 3$ وإذا كانت $x \to 3^-$ فإن $y \to +\infty$ وإذا كانت $x \to 3^+$ فإن $y \to +\infty$.

(هـ) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(1-x)}{x-3}$. ينعدم المقام عندما $x = 3$ فإذا كانت $x \to 3^-$ فإن $y \to +\infty$ وإذا كانت $x \to 3^+$ فإن $y \to -\infty$.

١٠ – اختبر النهايات : (أ) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$ ، (ب) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$.

(أ) افرض $x \to 0^-$ إذن $1/x \to -\infty,\ 2^{1/x} \to 0$, و $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 1/3.$

ثم افرض $x \to 0^+$ إذن $1/x \to +\infty,\ 2^{1/x} \to +\infty$, و $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 0.$

وبالتالي فإن $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$ غير موجودة

(ب) افرض $x \to 0^-$ إذن $2^{1/x} \to 0$ و $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{1}{3}$.

ثم افرض $x \to 0^+$ عندما $x \neq 0$, $\dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1}$ وحيث أن $\lim_{x\to 0^+} 2^{-1/x} = 0$,

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1} = 1.$ إذن $\lim_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ غير موجودة .

١١ – اختبر y عندما $x \to -\infty$ وعندما $x \to +\infty$ لجميع دوال المسألة ٩ .

(أ) عندما يكون $|x|$ كبيرا يكون $|y|$ صغيرا .

عندما $x = -1000$ يكون $y < 0$ وعندما $x \to -\infty$ فإن $y \to 0^-$ وعندما $x = +1000$ يكون $y > 0$ وعندما $x \to +\infty$ فإن $y \to 0^+$.

(ب) ، (جـ) ذات الأمر كافى (١)

(د) عندما يكون $|x|$ كبيرا يكون $|y|$ قريبا من 1 .

عندما $x = -1000$ يكون $y < 1$ وعندما $x \to -\infty$ فإن $y \to 1^-$ وعندما $x = +1000$ يكون $y > 1$ وعندما $x \to +\infty$ فإن $y \to 1^+$

(هـ) عندما يكون $|x|$ كبيرا يكون $|y|$ كبيرا .

عندما $x = -1000$ يكون $y > 0$ وعندما $x \to -\infty$ فإن $y \to +\infty$ وعندما $x = +1000$ يكون $y < 0$ وعندما $x \to +\infty$ فإن $y \to -\infty$.

١٢ – اختبر الدالة فى المسألة ٩ من الفصل الأول عندما $x \to a^-$ وعندما $x \to a^+$ حيث a أى عدد صحيح موجب .
لنعتبر $a = 2$ فعندما $x \to 2^-$ على المتوالية (1) فإن $f(x) \to 10$ على المتوالية ...5,10,10,10, وعندما $x \to 2^+$ على المتوالية (2) فإن $f(x) \to 15$ وبهذا نجد أن $\lim f(x)$ وبالتالى $\lim f(x)$ غير موجودتين .

١٣ – بين باستخدام التعريف الدقيق أن

$$\text{(أ)}\quad \lim_{x\to 1} (4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) = 5, \qquad \text{(ب)}\quad \lim_{x\to -1} (-2x^3 + 9x + 4) = -3$$

(أ) لنفترض أننا اخترنا ϵ فعندما $0 < |x-1| < \lambda < 1,$ فإن

$$\begin{aligned} |(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| &= |4(x-1)^3 + 15x^2 - 36x + 21| = |4(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 6(x-1)| \\ &\le 4|x-1|^3 + 15|x-1|^2 + 6|x-1| \\ &< 4\lambda + 15\lambda + 6\lambda = 25\lambda \end{aligned}$$

والآن – إذا كان $|(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| < \epsilon$ ، إذن بالتالى فإن أى عدد عندما $\lambda < \epsilon/25;$ موجب أصغر من كل من 1 و $\epsilon/25$ يصلح أن يكون δ وبذلك يثبت وجود النهاية .

(ب) لنفرض أننا اخترنا ϵ فإذا كان $0 < |x+1| < \lambda < 1,$ فإن

$$\begin{aligned} |(-2x^3 + 9x + 4) + 3| &= |-2(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 3(x+1)| \\ &\le 2|x+1|^3 + 6|x+1|^2 + 3|x+1| < 11\lambda \end{aligned}$$

وأى عدد موجب أصغر من كل من 1 و $\epsilon/11$ يصلح أن يكون δ وبذلك يثبت وجود النهاية .

١٤ – نفرض أن $\lim f(x) = A$ و $\lim_{x\to a} g(x) = B,$ أثبت أن

$$\text{(أ)}\quad \lim_{x\to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B, \qquad \text{(ب)}\quad \lim_{x\to a} \{f(x)\cdot g(x)\} = AB,$$

$$\text{(جـ)}\quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B},\ B \ne 0$$

بما أن $\lim_{x\to a} f(x) = A$ و $\lim_{x\to a} g(x) = B,$ فينتج حسب التعريف الدقيق أنه للأعداد $\epsilon_1 > 0$ و $\epsilon_2 > 0$ مهما كانا صغيرين ، وجود عددين $\delta_1 > 0$ و $\delta_2 > 0$ بحيث تكون

(i) طالما $0 < |x-a| < \delta_2$ فإن $|f(x) - A| < \epsilon_1,$

(ii) طالما $0 < |x-a| < \delta_1$ فإن $|g(x) - B| < \epsilon_2.$

لنرمز بـ λ لأصغر العددين δ_1 و δ_2 فيكون

(iii) طالما $0 < |x-a| < \lambda$ فإن $|f(x) - A| < \epsilon_1$ و $|g(x) - B| < \epsilon_2.$

(ا) لنفرض أننا اخترنا ϵ فعندئذ يكون المطلوب إيجاد $\delta > 0$ بحيث

طالما $0 < |x-a| < \delta$ فإن $|\{f(x)+g(x)\} - \{A+B\}| < \epsilon$

والآن $|\{f(x)+g(x)\} - \{A+B\}| = |\{f(x)-A\} + \{g(x)-B\}| \leq |f(x)-A| + |g(x)-B|.$

ومن (iii) نجد أن $|f(x) - A| < \epsilon_1$ طالما $0 < |x-a| <$ ويكون $|g(x) - A| < \epsilon_2$ طالما $0 < |x-a| < \lambda$ حيث λ أصغر العددين δ_1 و δ_2 .

إذن $|\{f(x)+g(x)\} - \{A+B\}| < \epsilon_1 + \epsilon_2$ طالما $0 < |x-a| < \lambda$

بأخذ $\delta = \lambda,\ \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon$ وبهذا الاختيار لـ ϵ_1 و ϵ_2 عندئذ يكون

$|\{f(x)+g(x)\} - \{A+B\}| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ طالما $0 < |x-a| < \delta$

(ب) لنفرض أننا اخترنا ϵ فعندئذ يكون المطلوب إيجاب $\delta > 0$ بحيث

طالما $0 < |x-a| < \delta$ فإن $|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon$

والآن

$$\begin{aligned}|f(x)\cdot g(x) - AB| &= |\{f(x)-A\}\cdot\{g(x)-B\} + B\{f(x)-A\} + A\{g(x)-B\}|\\ &\leq |f(x)-A|\cdot|g(x)-B| + |B|\cdot|f(x)-A| + |A|\cdot|g(x)-B|\end{aligned}$$

ومن (iii) و $|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon_1\epsilon_2 + |B|\epsilon_1 + |A|\epsilon_2$ طالما $0 < |x-a| < \lambda.$

لنأخذ ϵ_1 و ϵ_2 بحيث يتحقق $\epsilon_1\epsilon_2 < \frac{1}{3}\epsilon,\ \epsilon_1 < \frac{1}{3}\frac{\epsilon}{|B|},$ و $\epsilon_2 < \frac{1}{3}\frac{\epsilon}{|A|}$ في آن واحد ولنأخذ $\delta = \lambda$ وبهذا الاختيار لـ ϵ_1 ، و ϵ_2 فعندئذ يكون

$|f(x)\cdot g(x) - AB| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$ طالما $0 < |x-a| < \delta$

(جـ) بما أن $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)},$ فإن النظرية الناتجة من (ب) تمكننا من برهنة أن $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B},\ B \neq 0.$

لنفرض أننا اخترنا ϵ فعندئذ يكون المطلوب إيجاد $\delta > 0$ بحيث

طالما $0 < |x-a| < \delta$ فإن $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon$

والآن $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - g(x)}{B\cdot g(x)}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|B|\cdot|g(x)|} = \frac{|g(x)-B|}{|B|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}.$ ومن (ii)

$|g(x) - B| < \epsilon_2$ طالما $0 < |x-a| < \delta_2$

وبما أننا نبحث أيضا في $\frac{1}{g(x)}$ فإنه ينبغي التأكد من أن δ_2 صغيرة بقدر يكفي لجعل الفترة $a - \delta_2 < x < a + \delta_2$ لا تحوي جذر $g(x) = 0$ لنفرض أن $\delta_3 \le \delta_2$ تحقق هذا الطلب بحيث $|g(x) - B| < \epsilon_2$ و $|g(x)| > 0$ طالما $0 < |x - a| < \delta_3$ وحيث أن $|g(x)| > 0$ في الفترة يقتضي أن $|g(x)| > b > 0$ و $\frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{b}$ في الفترة ، فإننا نحصل على

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\epsilon_2}{|B|} \cdot \frac{1}{b} \qquad \text{طالما} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3$$

لنأخذ $|B|\, b\, \epsilon < \epsilon_2$ إذن $\epsilon < \frac{\epsilon_2}{|B| \cdot b}$ ويكون $\delta = \delta_3$ لهذا الاختيار لـ ϵ_2

وبالتالي فإن $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon$ طالما $0 < |x - a| < \delta$

١٥ ـ أثبت أن (أ) $\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$، (ب) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$، (ج) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$.

(أ) لنفرض أننا اخترنا M لجميع قيم x التي تحقق العلاقة $0 < |x - 2| < \delta$.

فإن $\left|\frac{1}{(x-2)^2}\right| > \frac{1}{\delta^2}$. وبالتالي $\left|\frac{1}{(x-2)^2}\right| > M$ عندما $\frac{1}{\delta^2} > M$ أو $\delta < \frac{1}{\sqrt{M}}$.

(ب) لنفرض أننا اخترنا ϵ لجميع قيم x التي تحقق العلاقة $\frac{1}{M-1} > \frac{1}{|x|-1} \ge \frac{1}{|x+1|} =$ $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right|$ $|x| > M$, وبالتالي $\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \epsilon$ عندما $\frac{1}{M-1} < \epsilon$ أو $M > 1 + \frac{1}{\epsilon}$.

(ج) لنفرض أننا اخترنا M كبيرة بقدر كاف لجميع قيم x التي تحقق العلاقة $|x| > P > 1$

فإن $\left|\frac{x^2}{x-1}\right| \ge \frac{x^2}{|x|+1} > \frac{x^2}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}P$. وبالتالي $\left|\frac{x^2}{x-1}\right| > M$ عندما $P > 2M$.

مسائل اضافية

١٦ ـ صف سلوك $y = 2x + 1$ عندما تتغير x على كل متوالية من متواليات المسألة ١ .

ج . (أ) $y \to 1$، (ب) $y \to 1$، (ج) $y \to 7$، (د) $y \to 7$، (هـ) $y \to 1$، (و) $y \to 3$

١٧ ـ احسب

(أ) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x)$ (هـ) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ (ط) $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

(ب) $\lim_{x\to -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$ (و) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ (ى) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

(جـ) $\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^2}$ (ز) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ (ك) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(د) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ (ح) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$ (ل) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

ج : (ا) 4 (ب) -4 (جـ) 0; (د) $\frac{1}{2}$; (هـ) 0; (و) $\frac{1}{3}$; (ز) -4 (ح) $\frac{1}{2}$; (ط) $\frac{1}{4}$; 0; (ى) ∞ ، لا توجد نهاية (ك) $3x^2$ (ل) 2 .

١٨ – احسب :

(ا) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{4x-5}$ (جـ) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+5}$ (هـ) $\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2+5x+6}$ (ز) $\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(ب) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$ (د) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+1}$ (و) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

ج : (ا) $\frac{1}{2}$ ، (ب) $2/3$ ، (جـ) 0 ، (د) ∞ ، لا توجد نهاية (هـ) 0 ، (و) 1 (ز) -1

١٩ – أوجد $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لكل دالة من دوال المسألة ٢٤ فى الفصل الأول

ج : (ا) $\frac{-1}{(a-2)^2}$, (ب) $\frac{1}{2\sqrt{a-4}}$, (جـ) $\frac{1}{(a+1)^2}$

٢٠ – ماذا يمكن قوله حول $\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$ ، حيث $a_0\,b_0\neq 0$ وحيث m, n عددان صحيحان موجبان عندما

(ا) $m>n$, (ب) $m=n$, (جـ) $m<n$?

ج : (ا) لا توجد نهاية (ب) a_0/b_0 (جـ) 0

٢١ – ابحث فى سلوك $f(x)=|x|$ عندما $x\to 0$ ارسم المنحنى .

إرشاد : اختبر $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. ج : $\lim_{x\to 0}|x|=0$

٢٢ – ابحث فى سلوك $\begin{cases} f(x)=x, & x>0 \\ f(x)=x+1, & x\leq 0\end{cases}$ عندما $x\to 0$ ارسم المنحنى .

ج : $\lim_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة .

٢٣ – (ا) استخدم النظرية IV والاستقراء الرياضى لإثبات أن

$\lim_{x\to a} x^n=a^n$ حيث n عدد صحيح موجب .

(ب) استخدم النظرية III والاستقراء الرياضى لإثبات أن

$$\lim_{x\to a}\{f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x)+\lim_{x\to a} f_2(x)+\cdots+\lim_{x\to a} f_n(x)$$

٢٤ ـــ استخدم النظرية II ونتيجتي المسألة ٢٣ لإثبات أن

$\lim_{x\to a} P(x) = P(a),$ حيث $P(x)$ متعددة الحدود في x .

٢٥ ـــ بفرض $f(x) = 5x - 6,$ أوجد $\delta > 0$ عندما يكون $0 < |x-4| < \delta$ طالما $|f(x) - 14| < \epsilon,$ وذلك عندما (١) $\epsilon = \frac{1}{2},$ (ب) $\epsilon = 0.001.$ ج : (١) $1/10,$ (ب) 0.0002

٢٦ ـــ استخدم التعريف الدقيق لإثبات أن :

(١) $\lim_{x\to 3} 5x = 15,$ (ب) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4,$ (ج) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x + 5) = 3.$

٢٧ ـــ استخدم التعريف الدقيق لإثبات أن :

(١) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty,$ (ب) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \infty,$ (ج) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$ (د) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+1} = \infty.$

ج : (١) $\delta < 1/M,$ (ب) $\delta < \frac{1}{M+1},$ (ج) $M > 1 + \frac{1}{\epsilon},$ (د) $P > 2M$

٢٨ ـــ أثبت أنه إذا كانت $f(x)$ معرفة لجميع قيم x القريبة من $x = a$ وكان لها نهاية عندما $x \to a$ فإن هذه النهاية وحيدة .

إرشاد : افرض أن $\lim_{x\to a} f(x) = B,$ $\lim_{x\to a} f(x) = A,$ وأن $B \neq A.$ اختر $\epsilon_1, \epsilon_2 < \frac{1}{2}|A-B|.$ عين δ_1, δ_2 بعد ذلك النهايتين وناخذ δ أصغر العددين δ_1, δ_2 بين بعد ذلك أن $|A-B| = |\{A - f(x)\} + \{f(x) - B\}| < |A - B|,$ وهذا تناقض .

٢٩ ـــ نفرض $f(x), g(x), h(x)$ بحيث يكون (i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ لجميع قيم x القريبة من $x = a$ (ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A.$ بين أن $\lim_{x\to a} g(x) = A.$

إرشاد : بفرض $\epsilon > 0$ مهما كانت صغيرة ، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x-a| < \delta$ فإن $|f(x) - A| < \epsilon$ و $|h(x) - A| < \epsilon$ أو $A - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \epsilon.$

٣٠ ـــ اثبت أنه إذا كان $f(x) \leq M$ لجميع قيم x وإذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = A$ فإن $A \leq M$.

إرشاد : افرض $A > M$ ثم اختر $\epsilon = \frac{1}{2}(A - M)$ فتصل إلى تناقض .

الفصل الثالث

الاستمرار (الاتصال)

نقول عن دالة $f(x)$ إنها مستمرة (متصلة) عند $x = x_0$ إذا كان (i) $f(x_0)$ معرفة (ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ موجودة (iii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

فمثلا $f(x)=x^2+1$ مستمرة عند $x=2$ لأن $\lim_{x \to 2} f(x)=5=f(2)$ ويستلزم الشرط (i) إن الدالة يمكن أن تكون مستمرة فقط وعند نقط حيز التعريف لها . فالدالة $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ليست مستمرة عند $x=3$ لأن $f(3)$ تخيلى أى أنه غير معرف .

يقال عن الدالة المستمرة عند كل نقطة من نقط فترتها المفتوحة أو المغلقة إنها مستمرة فى تلك الفترة . ويقال عن دالة $f(x)$ إنها مستمرة إذا كانت مستمرة عند كل نقطة من حيز التعريف لها . فالدالة $f(x)=x^2+1$. وجميع الدوال متعددة الحدود فى x دوال مستمرة . والدوال $e^x, \sin x, \cos x$. أمثلة أخرى على ذلك .

إذا كان حيز التعريف لدالة هو فترة مغلقة $a \leq x \leq b$ فعندئذ لا يتحقق الشرط (ii) عند نقطتى النهاية a و b وسنقول عن دالة مثل هذه إنها مستمرة إذا كانت مستمرة فى الفترة المفتوحة $a < x < b$ وكان $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ فالدالة $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ يمكن أن يقال عنها إنها دالة مستمرة . (انظر المثال ١ من الفصل الثانى) . إن دوال حساب التفاضل والتكامل الابتدائى مستمرة فى حيز تعريفها مع احتمال استثناء عدد من النقط المنعزلة .

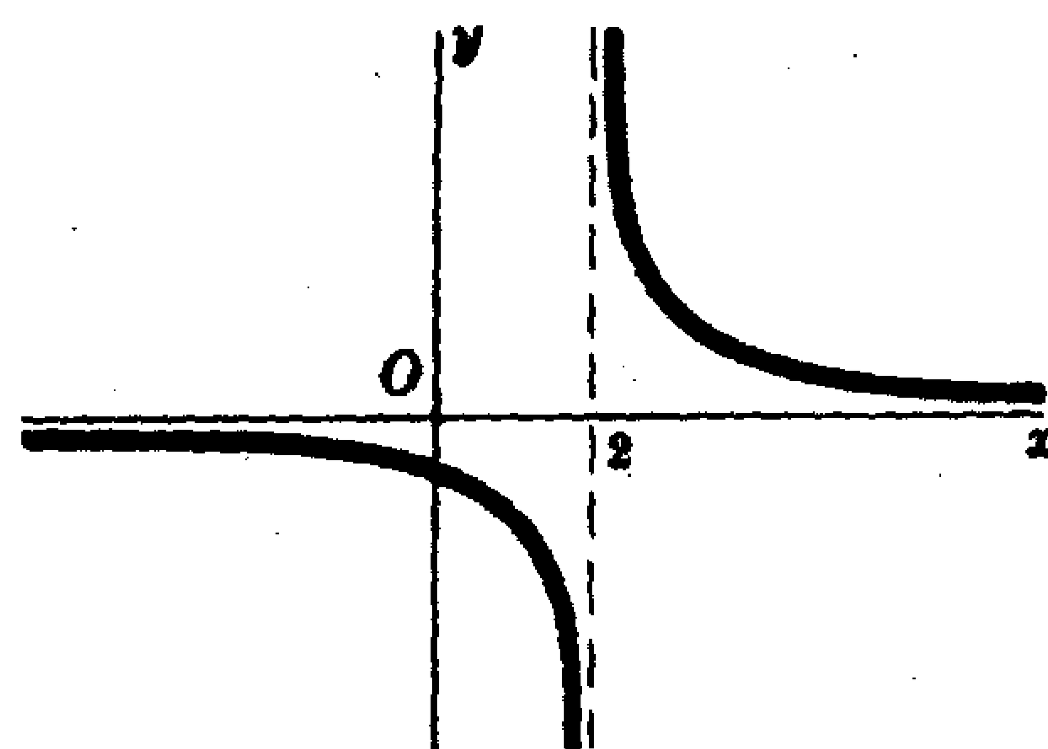
نقول عن دالة $f(x)$ إنها متقطعة (غير مستمرة) ، عند $x = x_0$ إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من شروط الاستمرار السابقة . سنوضح عن طريق أمثلة الأنماط المختلفة للدوال الغير مستمرة .

(ا) الدالة $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ متقطعة عند $x = 2$ لأن

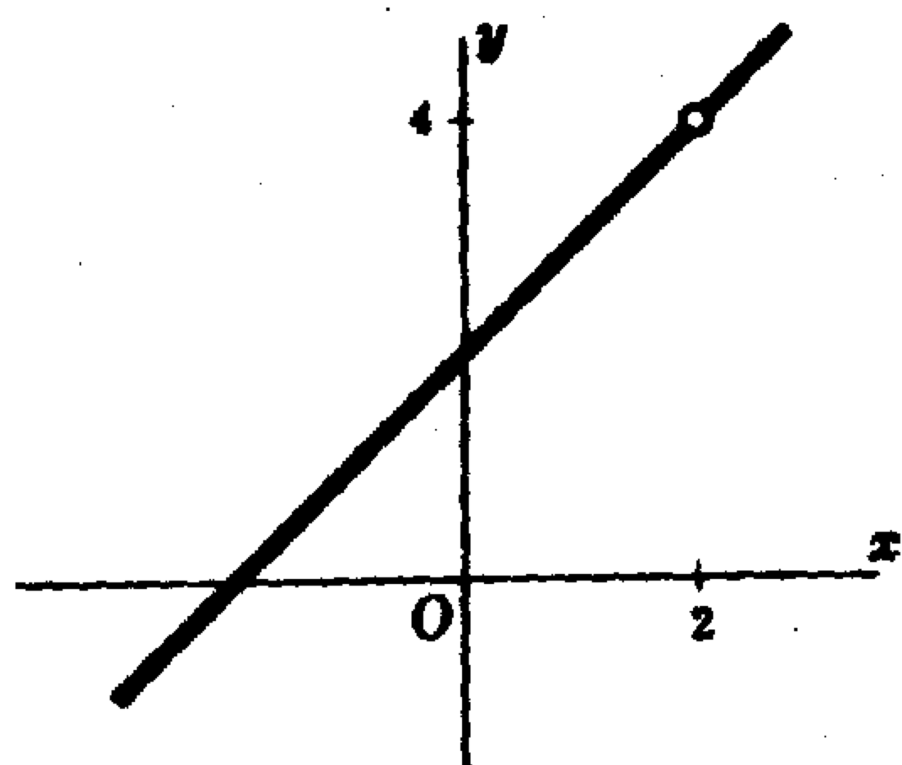
(i) $f(2)$ غير معرف (لانعدام المقام)

(ii) $\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة (تساوى ∞)

والدالة مستمرة فى أى موضع باستثناء عند $x = 2$ حيث يقال عنها إنها ذات انقطاع لا نهائى . انظر الشكل ٣ – ١



شكل ٣ — ١



شكل ٣ — ٢

(ب) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ متقطعة عند $x = 2$ لأن

(i) $f(2)$ غير معرفة (كل من البسط والمقام معدوم)

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

يوصف الانقطاع هنا بأنه قابل للإزالة حيث يمكن التخلص منه بأن نعيد تعريف الدالة على أنها $x \neq 2;\ f(2) = 4.$ $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2},$

(لاحظ أنه لا يمكن إزالة الانقطاع فى (ا) لأن النهاية غير موجودة) والمنحنيين $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ و $g(x) = x+2$ متطابقين باستثناء النقطة $x = 2$ حيث يوجد للأول « ثقب » ، وإزالة الانقطاع ، ببساطة ، ليس إلا ملء هذا « الثقب » بشكل مناسب .

(جـ) إن الدالة $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3},\ x \neq 3;\ f(3) = 9$ منقطعة عند $x = 3$ لأن (i) $f(3) = 9$

(ii) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 27,$ (iii) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$

ولكن يمكن إزالة الانقطاع بإعادة تعريف الدالة على أنها $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3},\ x \neq 3;\ f(3) = 27.$

(د) إن دالة المسألة ٩ من الفصل الأول معرفة لجميع قيم $x > 0$ ولكنها ذات انقطاع عند $x = 1, 2, 3, \ldots$ (انظر المسألة ١٢ من الفصل الثانى) ناشئ من كون :

$$\lim_{x \to s^-} f(x) \neq \lim_{x \to s^+} f(x)$$ (حيث s أى عدد صحيح موجب)

وتوصف هذه بأنها انقطاعات مفاجئة

انظر المسألتين ١ — ٢

خواص الدوال المستمرة : تقودنا نظريات النهايات فى الفصل الثانى إلى نظريات الدوال المستمرة مباشرة ، وبوجه خاص ، إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مستمرتين عند $x = a$ فإن الدوال $f(x) \pm g(x),\ f(x).\ g(x),\ f(x)/g(x)$ دوال مستمرة على أن يكون $g(a) \neq 0$ فى الدالة الأخيرة . وهكذا نجد أن متعددات الحدود فى x مستمرة دوما فى حين تكون الدوال الجذرية فى x مستمرة عند كل نقطة باستثناء النقط التى ينعدم عندها المقام .

ولابد أن يكون القارئ قد استخدم بعض خواص الدوال المستمرة عند دراسة الجبر .

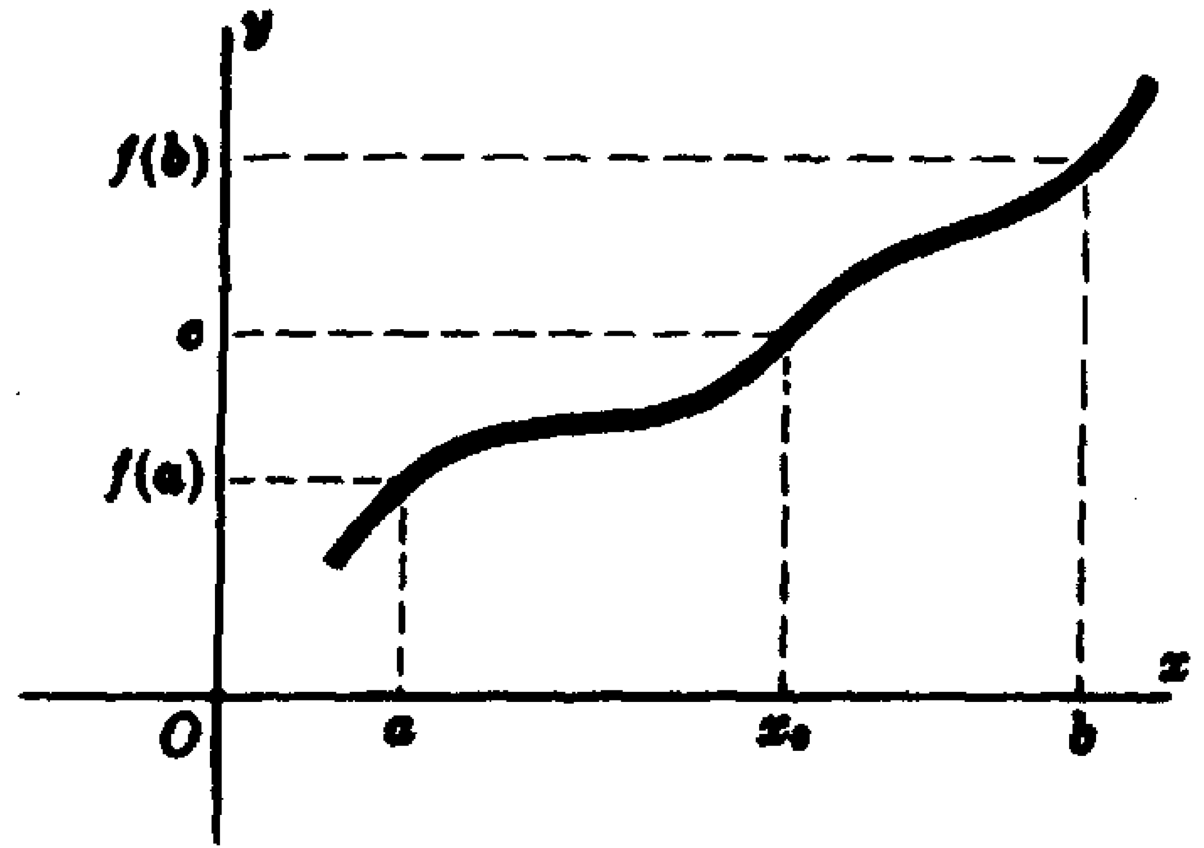
(ا) عند رسم منحنى متعددة الحدود $y = f(x)$ لقد تم توصيل أى نقطتين $[b, f(b)]$ و $[a, f(a)]$ بقوس متصل

(ب) إذا كان $f(a)$ $f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان ، فإن منحنى $y = f(x)$ يقطع محور السينات فى نقطة واحدة على الأقل ويكون للمعادلة $f(x) = 0$ جذر واحد على الأقل بين $x = b, x = a$.

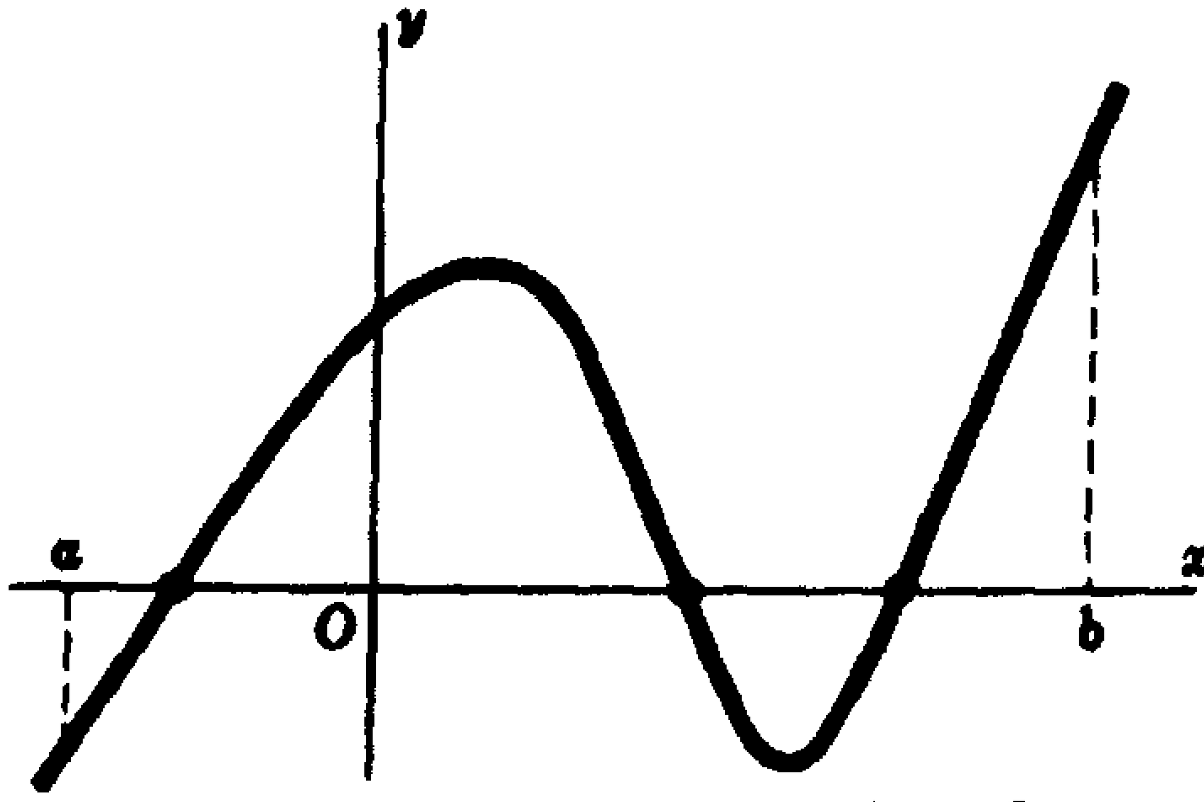
وخاصة الدوال المستمرة المستعملة هنا هى :

I — إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة فى الفترة $a \leq x \leq b$ وكان $f(b) \neq f(a)$ إذن لأى عدد c بين $f(a)$ و $f(b)$ توجد على الأقل قيمة واحدة لـ x مثل $x = x_0$ بحيث يكون $f(x_0) = c$.

يوضح الشكلان ٣ — ٣ ا و ٣ — ٣ ب تطبيق هذه الخاصة بينما يبين لنا الشكلان ٣ — ٤ ا و ٣ — ٤ ب كيف أن الاستمرار على طول الفترة أمر ضرورى .

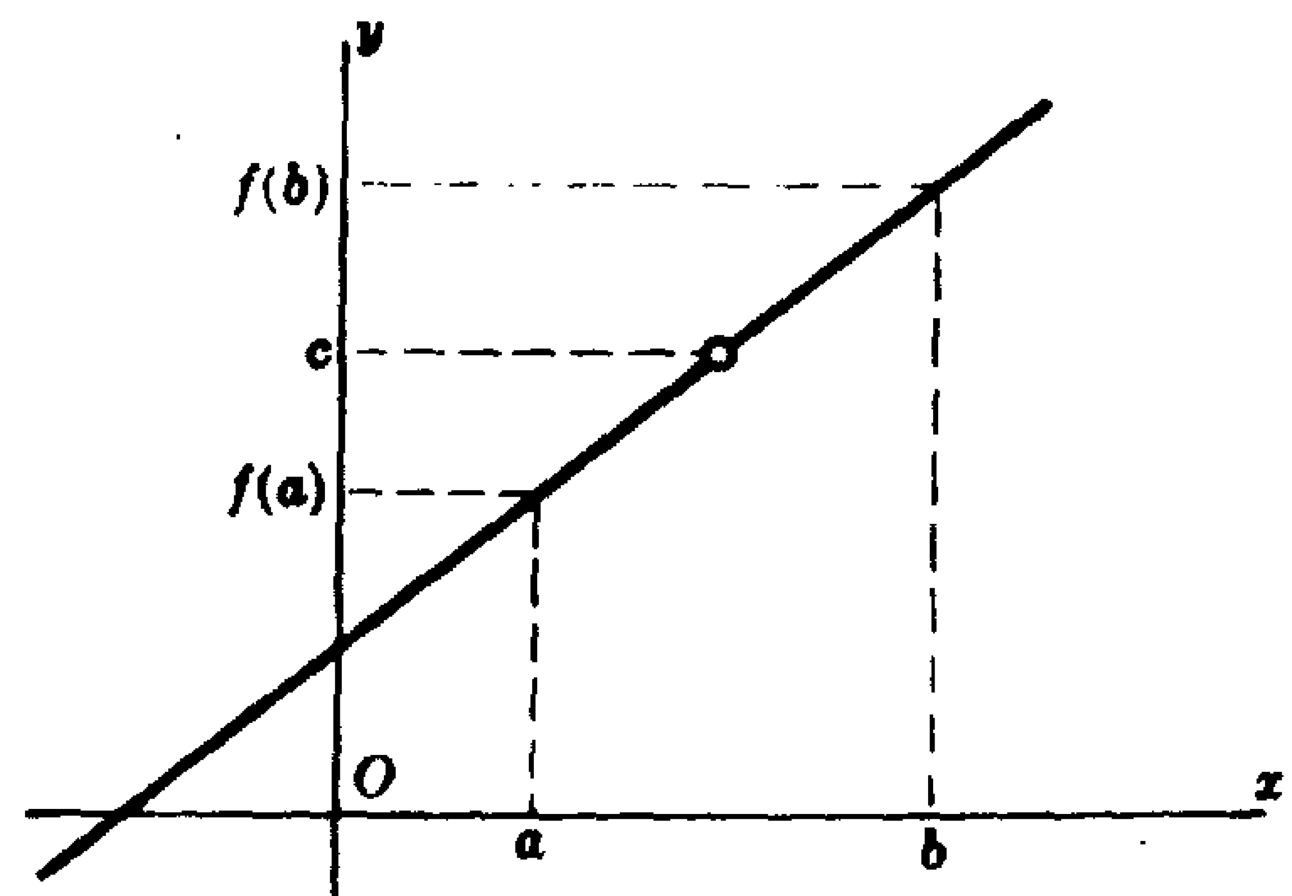


شكل ٣ — ٣ ا

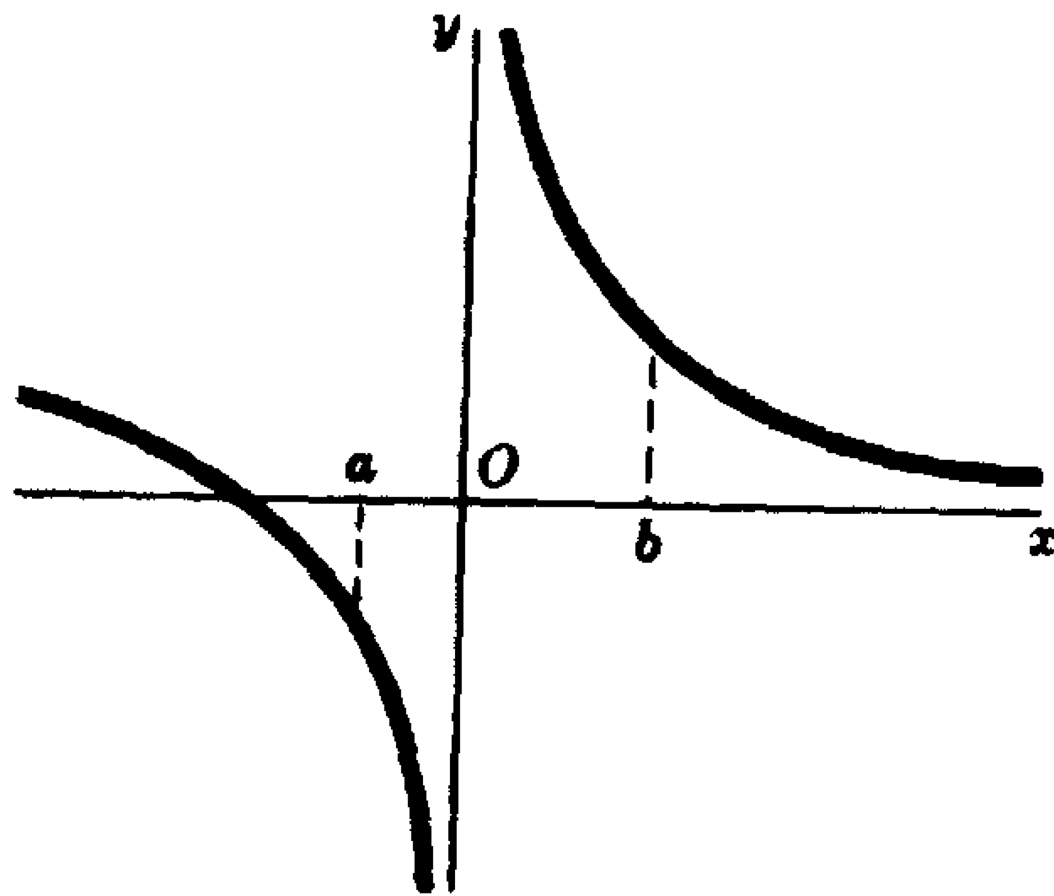


$f(x) = 0$ لها ثلاثة جذور بين $x = b$ ، $x = a$

شكل ٣ — ٣ ب



شكل ٣ — ٤ ا



$f(x) = 0$ لا يوجد لها جذور بين $x = b$ ، $x = a$

شكل ٣ — ٤ ب

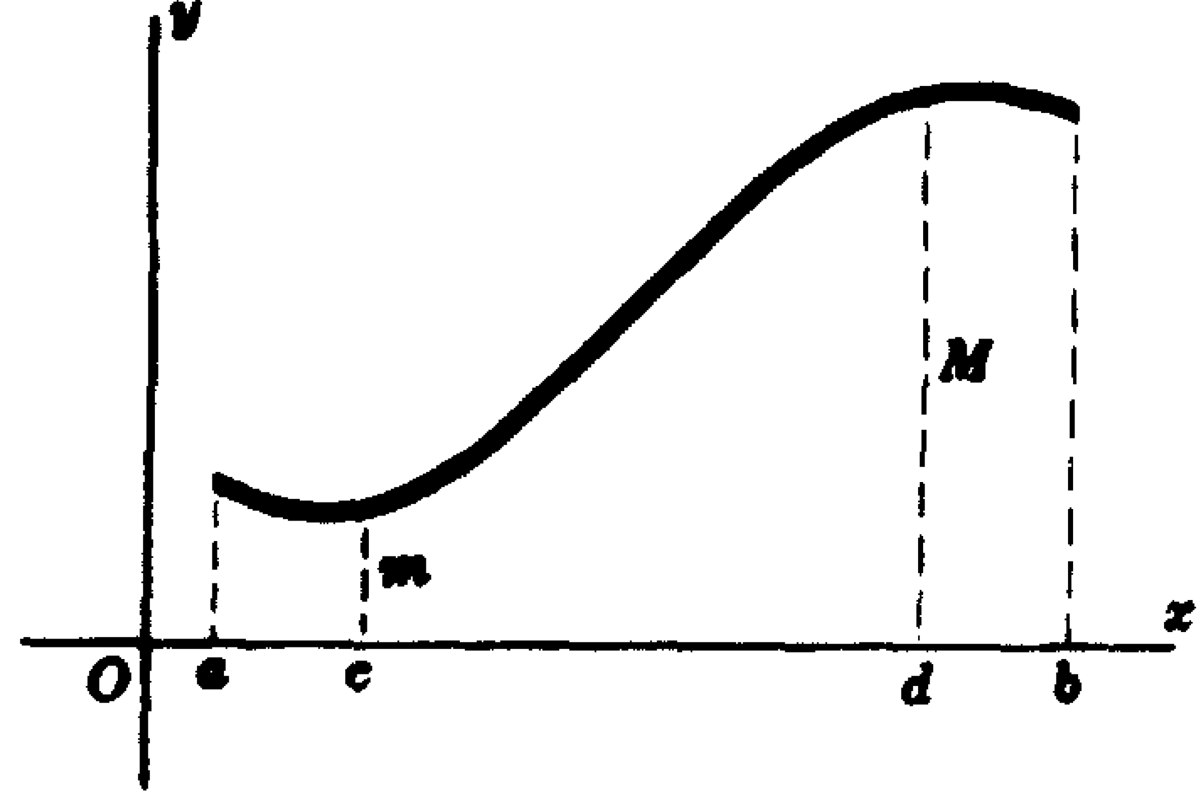
وسنذكر فيما يلى خواص أخرى للدوال المستمرة :

II — إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة فى الفترة $a \leq x \leq b$ فعندئذ تأخذ الدالة $f(x)$ فى هذه الفترة قيمة صغرى m وقيمة عظمى M .

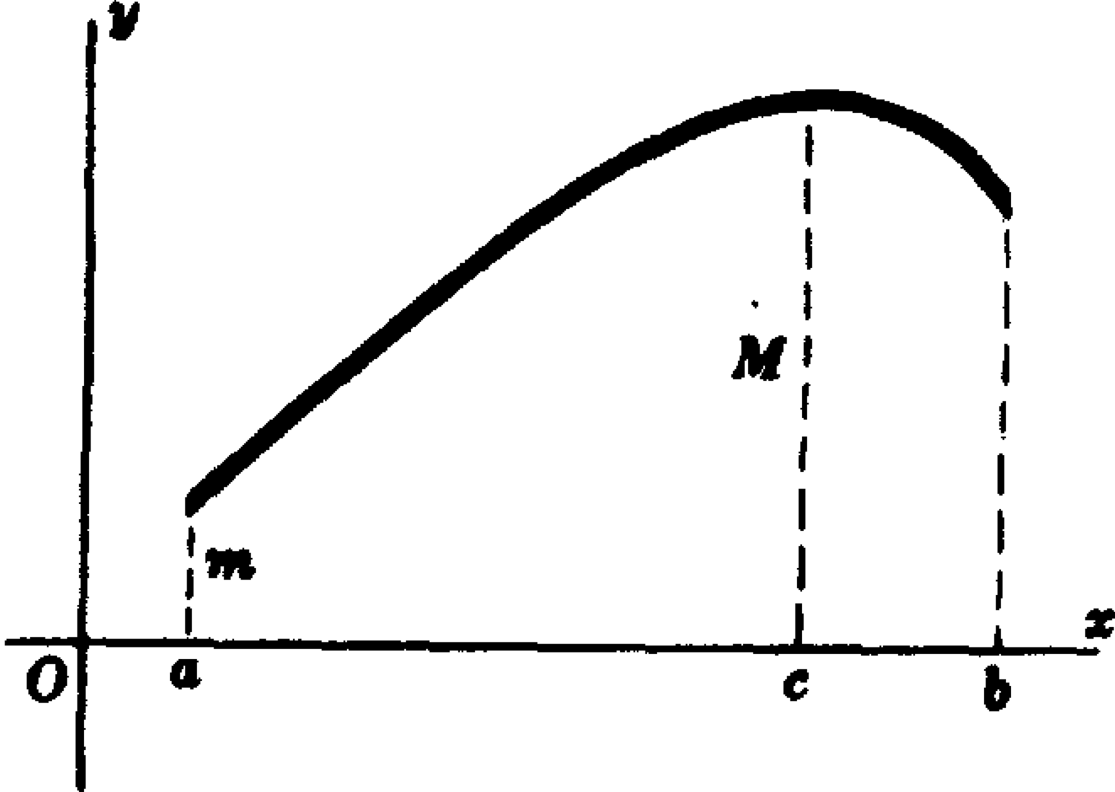
وعلى الرغم من أن برهان الخاصة II خارج عن نطاق هذا الكتاب فإننا سنستخدم هذه الخاصة دون قيد فى فصول قادمة .

الأشكال التالية هى لمجرد توضيح بديهى لخاصة ، فى الشكل ٣ — ٥ ا الدالة مستمرة عند $a \leq x \leq b$ وتأخذ الدالة

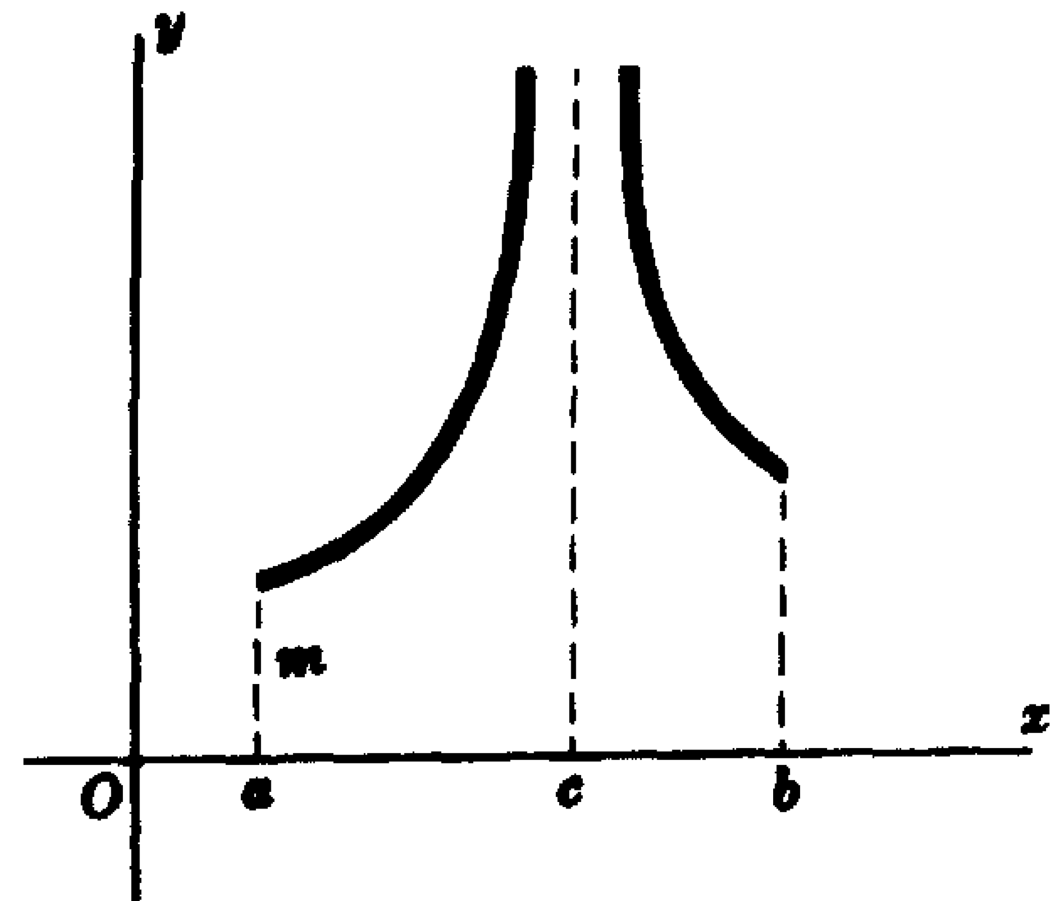
قيمتها الصغرى m عند النقطة c وقيمتها العظمى M عند النقطة $x = c$ و $x = d$ وكلا النقطتين داخل الفترة . وفى الشكل ٣ — ٥ ب فالدالة مستمرة عند $a \le x \le b$ وتأخذ الدالة قيمتها الصغرى m عند الطرف $x = a$ وقيمتها العظمى M عند $x = c$ داخل الفترة ، أما فى الشكل ٣ — ٥ جـ فيوجد انقطاع عند $x = c$ حيث $a < c < b$ والدالة قيمة صغرى عند $x = a$ ولكن ليس لها قيمة عظمى .



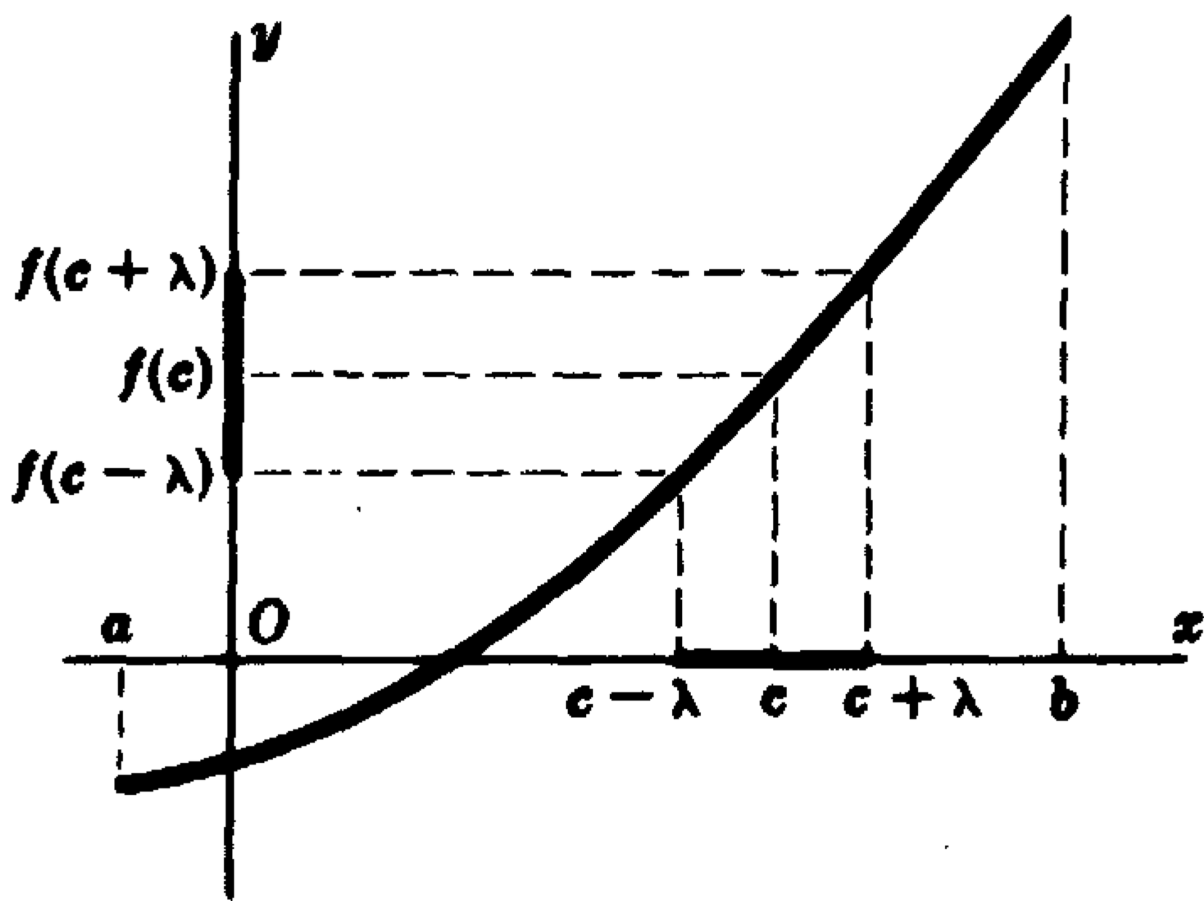
شكل ٣ — ٥ أ



شكل ٣ — ٥ ب



شكل ٣ — ٥ جـ



شكل ٣ — ٦

III إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة فى الفترة $a \le x \le b$ وكان c أى عدد بين a, b و $f(c) > 0$ فعندئذ يوجد عدد $\lambda > 0$ بحيث إذا كان $c - \lambda < x < c + \lambda$ فإن $f(x) > 0$. إن هذه الخاصة موضحة فى الشكل ٣ — ٦ . ومن أجل البرهان انظر المسألة ٤ .

مسائل محلولة

١ — ينتج من المسألة ٩ الفصل الثانى أن :

(ا) الدالة $f(x) = 2/x$ تعانى انقطاعا لا نهائيا عند $x = 0$.

(ب) الدالة $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ تعانى انقطاعا لا نهائيا عند $x = -3$ و $x = 2$.

(جـ) الدالة $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$ تعانى انقطاعا لا نهائيا عند $x = 3$.

٢ – ينتج من المسألة ٥ فى الفصل الثانى أن :

(١) الدالة $f(x)=\frac{x^3-27}{x^2-9}$ انقطاعا قابلا للإزالة عند $x=3$ كذلك يوجد انقطاع لا نهائى عند $x=-3$.

(ب) الدالة $f(x)=\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ انقطاعا قابلا للإزالة عند $x=2$ كذلك يوجد انقطاع قابل للإزالة عند $x=-2$.

(ج) الدالة $f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ انقطاعا لا نهائيا عند $x=1$.

٣ – بين أن وجود $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ يقتضى أن تكون $f(x)$ مستمرة عند $x=a$.

إن وجود النهاية يقتضى أن $f(a+h)-f(a)\to 0$ عندما $h\to 0$ وهكذا فإن $\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$ والدالة $f(x)$ مستمرة عند $x=a$.

٤ – برهن أنه إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة فى الفترة $a\le x\le b$ وكان c أى عدد بين a و b و $f(c)>0$ فعندئذ يوجد عدد $\lambda>0$ بحيث إذا كان $c-\lambda<x<c+\lambda$ فإن $f(x)>0$.

بما أن $f(x)$ مستمرة عند $x=c$ فإن $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ ومهما كان $\epsilon>0$ فإنه يوجد $\delta>0$ بحيث أنه

(i) طالما $0<|x-c|<\delta$ فإن $|f(x)-f(c)|<\epsilon$.

ويكون الآن $f(x)>0$ لجميع نقط الفترة $c-\delta<x<c+\delta$ التى يكون عندها $f(x)\ge f(c)$ أما فى بقية نقط الفترة فيكون $f(x)<f(c)$ وبالتالى $|f(x)-f(c)|=f(c)-f(x)<\epsilon$ و $f(x)>f(c)-\epsilon$.

وهذا يعنى أن $f(x)>0$ عند هذه النقط ما لم يكن $\epsilon\ge f(c)$ وعلى هذا ينبغى ، كى نعين فترة تحقق جميع ما تطلبه النظرية ، أن نختار $\epsilon<f(c)$ ونعين δ بحيث يتحقق (1) وتأخذ $\lambda<\delta$. انظر المسألة ١٠ من أجل النظرية المرافقة .

مسائل اضافية

٥ – اختبر دوال المسألة ١٧ (ا) – (ح) من الفصل الثانى ، لنقط الانقطاع ج : (١) ، (ب) ، (د) لا يوجد (ج) $x=-1$ (هـ) $x=\pm 1$ (و) $x=2, 3$ (ز) $x=-1,-3$ ، (ح) $x=\pm 2$.

٦ – بين أن $f(x)=|x|$ مستمرة عند كل نقطة

٧ – بين أن الدالة $f(x)=\frac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$ انقطاعا مفاجئا عند $x=0$

٨ – بين أنه عند $x=0$ يكون (١) الدالة $f(x)=\frac{1}{3^{1/x}+1}$ انقطاع مفاجئ (ب) والدالة $f(x)=\frac{x}{3^{1/x}+1}$ انقطاع قابل للإزالة .

٩ – فى الشكل ٣ – ٤ ا منحنى $f(x)=\frac{x^2-4x-21}{x-7}$, خذ $a=3$ و $b=11$ وبين أن $c=10$.

١٠ – برهن أنه إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة فى الفترة $a\le x\le b$ وكان c أى عدد بين a و b و $f(c)<0$ فعندئذ يوجد عدد $\lambda>0$ بحيث إذا كان $c-\lambda<x<c+\lambda$ فإن $f(x)<0$.

الفصل الرابع

المشــــتقة

المتزايدات : إن التزايد Δx للمتغير x هو التغير الذى يطرأ على x عندما تتزايد أو تتناقص من قيمة ما مثل $x = x_0$ إلى قيمة أخرى مثل x_1 $x =$ ضمن مدى x . وعلى هذا فإن $\Delta x = x_1 - x_0$ وبالتالى يمكننا أن نكتب $x_1 = x_0 + \Delta x$.

إذا أعطى المتغير x تزايدا Δx من $x = x_0$ (أى إذا تغيرت x من $x = x_0$ إلى $x = x_0 + \Delta x$) ونتج عن ذلك أن دالة $y = f\ (x)$ حصلت على التزايد $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ من $y = f\ (x_0)$ فإننا نسمى النسبة

$$\frac{\Delta\ y}{\Delta\ x} = \frac{\text{التغير فى } y}{\text{التغير فى } x}$$

بمعدل متوسط التغير للدالة فى الفترة بين $x = x_0$ و $x = x_0 + \Delta x,$.

مثال ١ :

إذا أعطينا المتغير x التزايد $\Delta x = 0.5$ من $x_0 = 1$ فإن التزايد الذى يطرأ على الدالة $y = f(x) = x^2 + 2x$ هو $\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25.$ وعلى هذا فإن معدل متوسط التغير لـ y فى الفترة بين $x = 1$ و $x = 1.5$ هو $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2.25}{0.5} = 4.5.$

انظر المسألتين ١ — ٢

تعرف مشتقة الدالة $y = f\ (x)$ بالنسبة لـ x عند النقطة $x = x_0$ على أنها

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

شريطة أن توجد النهاية . تسمى هذه النهاية أيضا بمعدل التغير اللحظى (أو بشكل أبسط ، معدل التغير) فى y بالنسبة لـ x عند $x = x_0$.

مثال ٢ :

أوجد مشتقة $y = f(x) = x^2 + 3x$ بالنسبة لـ x عند $x = x_0$ استخدم ذلك لحساب قيمة المشتقة عند (أ) $x_0 = 2$ (ب) $x_0 = -4$.

$$\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 \\
y_0 + \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) \\
&= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x \\
\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + 3 + \Delta x
\end{aligned}$$

وتكون المشتقة عند $x = x_0$ هى

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + 3 + \Delta x) = 2x_0 + 3$$

(ا) وقيمة المشتقة عند $x_0 = 2$. هى $7 = 3 + 2.2$.

(ب) وقيمة المشتقة عند $x_0 = -4$ هى $-5 = 3 + (-4) 2$.

وجرت العادة عند حساب المشتقات أن نسقط الدليل 0 ونحصل على مشتقة $y = f(x)$ بالنسبة لـ x مثل

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

انظر الملاحظة التى على المسألة ٥ (جـ) من الفصل الثانى .

ويمكن الإشارة إلى مشتقة $y = f(x)$ بالنسبة لـ x بأحد الرموز التالية :

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad \text{أو} \quad \frac{d}{dx} y, \ \frac{dy}{dx}, \ D_x y, \ y', \ f'(x),$$

انظر المسائل ٣ ــ ٨

مســـــائل محلولة

١ ــ إذا كان $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$, فأوجد Δy و $\Delta y / \Delta x$ عندما تتغير x :

(ا) من $x_0 = 1$ الى $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$ (ب) من $x_0 = 1$ إلى $x_1 = 0.8$.

(ا) $\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1.2) - f(1) = -0.56 - (-2) = 1.44$ وبالتالى $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2$

(ب) $\Delta x = 0.8 - 1 = -0.2$

$\Delta y = f(0.8) - f(1) = -3.36 - (-2) = -1.36$ وبالتالى $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1.36}{-0.2} = 6.8$

ومن الناحية الهندسية فإن $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تمثل فى (ا) ميل القاطع للقطع المكافئ $y = x^2 + 5x - 8$, الذى يصل النقطتين (1, —2) و (1.2,—0.56) وتمثل فى (ب) ميل القاطع لنفس القطع والذى يصل النقطتين (0.8,—3.36) و (1,—2)

٢ ــ إذا كانت s (m) تمثل المسافة التقريبية التى يقطعها جسم يسقط من السكون سقوطا حرا بالأمتار خلال زمن قدره t (ثانية) وكانت $s = 4.9t^2$ فأوجد $\Delta s / \Delta t$ عندما تتغير t من t_0 إلى $t_0 + \Delta t$ استخدم ذلك لإيجاد $\Delta s / \Delta t$ عندما تتغير t .

(ا) من 3 إلى 3.5 ، (ب) 3 من 3.2 (جـ) من 3 إلى 3.1 .

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + \Delta t)^2 - 4.9t_0^2}{\Delta t} = \frac{9.8t_0 \cdot \Delta t + 4.9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9.8t_0 + 4.9\Delta t$$

(ا) هنا $t_0 = 3, \Delta t = 0.5,$ وبالتالى $\Delta s / \Delta t = 9.8(3) + 4.9(0.5) = 31.85 \text{ ms}^{-1}$

(ب) هنا $t_0 = 3, \Delta t = 0.2,$ وبالتالى $\Delta s / \Delta t = 9.8(3) + 4.9(0.2) = 30.38 \text{ ms}^{-1}$

(جـ) هنا $t_0 = 3,\ \Delta t = 0.1,$ وبالتالى $\Delta s/\Delta t = 29{\cdot}89\ ms^{-1}$

وبما أن Δs إزاحة الجسم من زمن قدره $t = t_0$ إلى زمن قدره $t = t_0 + \Delta t$ فإن $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{\text{الإزاحة}}{\text{الزمن}} =$ السرعة المتوسطة للجسم فى الفترة الزمنية .

٣ – أوجد dy/dx إذا كان $y = x^3 - x^2 - 4$ أوجد كذلك قيمة dy/dx عندما (أ) $x = 4$ ، (ب) $x = 0$ ، (جـ) $x = -1$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - 4$$
$$= x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4 \quad (١)$$

$$\Delta y = (3x^2 - 2x)\cdot\Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\{3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\} = 3x^2 - 2x \quad (٤)$$

(أ) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40$ (ب) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0,$ (جـ) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5$

٤ – أوجد مشتقة $y = x^2 + 3x + 5$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5 \quad (١)$$

$$\Delta y = (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2 \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + 3)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3 \quad (٤)$$

٥ – أوجد مشتقة $y = \dfrac{1}{x - 2}$ عند $x = 1$ و $x = 3$ بين أن المشتقة غير موجود عند $x = 2$ حيث تكون الدالة غير مستمرة .

$$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} \quad (١)$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x - 2} = \frac{(x - 2) - (x + \Delta x - 2)}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-\Delta x}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} \quad (٢)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} \quad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-1}{(x - 2)^2} \quad (٤)$$

عند $x = 1$ يكون $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1 - 2)^2} = -1,$ وعند $x = 3$ يكون $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(3 - 2)^2} = -1.$

أما عند $x = 2$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ غير موجود لانعدام المقام .

٦ – أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 4}$. افحص المشتقة عند $x = -4/3$ حيث تكون الدالة غير مستمرة .

$$f(x+\Delta x) = \frac{2(x+\Delta x)-3}{3(x+\Delta x)+4} \qquad (١)$$

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \frac{2x+2\Delta x-3}{3x+3\Delta x+4} - \frac{2x-3}{3x+4} \qquad (٢)$$

$$= \frac{(3x+4)[(2x-3)+2\Delta x] - (2x-3)[(3x+4)+3\Delta x]}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$

$$= \frac{(6x+8-6x+9)\Delta x}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17\Delta x}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} \qquad (٣)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17}{(3x+4)^2} \qquad (٤)$$

وعند النقطة $x = -4/3$ لا توجد مشتقة لانعدام المقام . وعموما فإنه لا توجد مشتقة للدالة عند نقطة انقطاعها .

٧ – أوجد مشتقة $y = \sqrt{2x+1}$.

$$y + \Delta y = (2x+2\Delta x+1)^{1/2} \qquad (١)$$

$$\Delta y = (2x+2\Delta x+1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2} \qquad (٢)$$

$$= [(2x+2\Delta x+1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}]\,\frac{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

$$= \frac{(2x+2\Delta x+1)-(2x+1)}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{2\Delta x}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} \qquad (٣)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{(2x+2\Delta x+1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{1}{(2x+1)^{1/2}} \qquad (٤)$$

ونلاحظ بالنسبة للدالة $f(x) = \sqrt{2x+1}$, أن $f(-\frac{1}{2}) = 0 = \lim_{x \to -1/2^+} f(x)$ بينما $\lim_{x \to -1/2^-} f(x)$ غير موجودة ،

فالدالة مستمرة من اليمين عند $x = -1/2$ والمشتقة عند $x = -1/2$ لا نهائية .

٨ – أوجد مشتقة $f(x) = x^{1/3}$ افحص $f'(0)$.

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{1/3} \qquad (١)$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3} \qquad (٢)$$

$$= \frac{[(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$= \frac{x+\Delta x - x}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

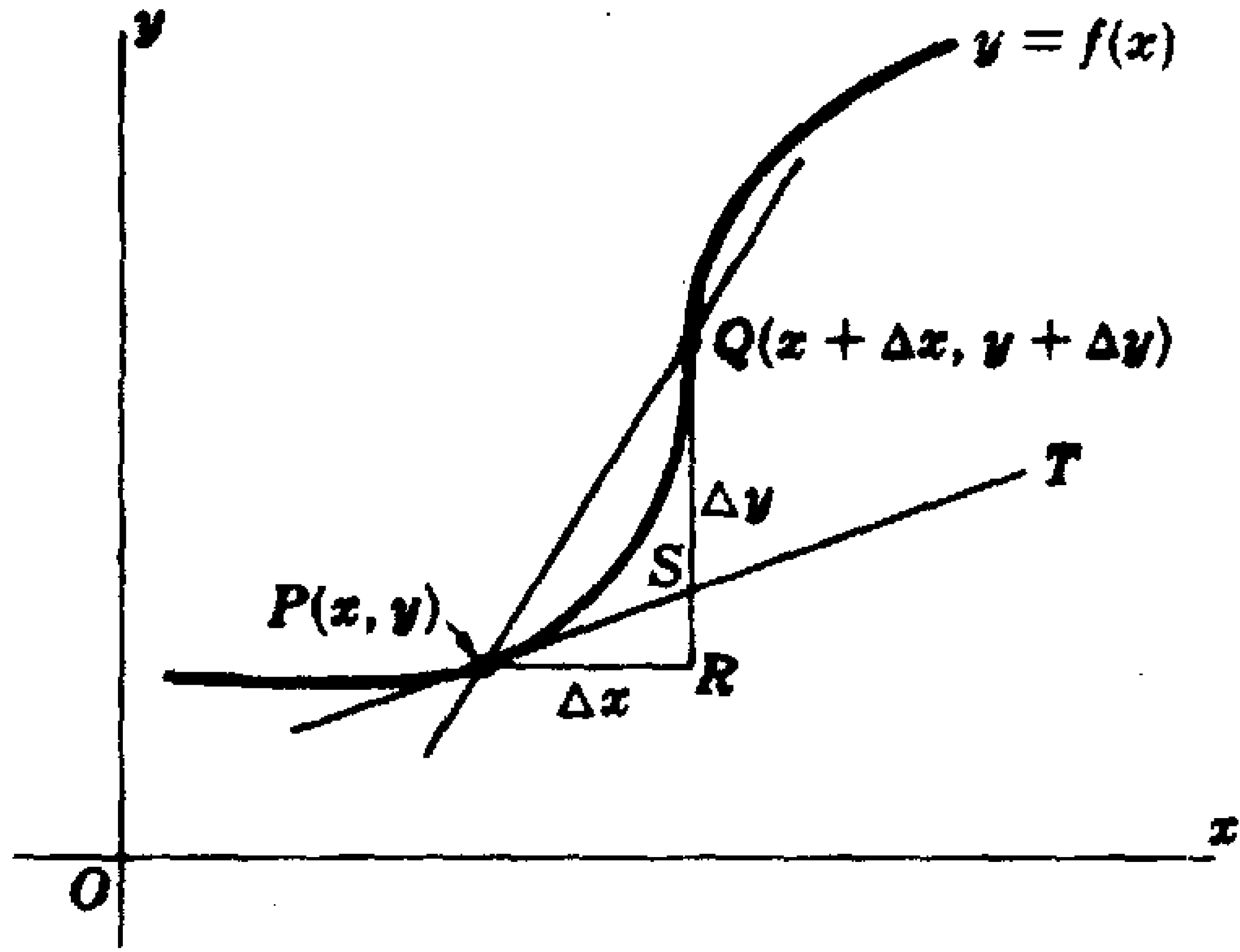
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} \qquad (٣)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}} \quad (٤)$$

والمشتقة غير موجودة عند $x = 0$ لانعدام المقام . ومن الملاحظ أن الدالة مستمرة عند $x = 0$ هذا بالإضافة إلى الملاحظة التى مرت فى نهاية المسألة ٧ يتضح لنا أنه : إذا وجدت مشتقة دالة عند نقطة $x = a$ فالدالة مستمرة عند هذه النقطة وليس العكس .

٩ – فسر dy/dx هندسيا .

نرى من الشكل ٤ – ١ أن $\Delta y / \Delta x$ تمثل ميل القاطع الذى يصل نقطة اختيارية ثابتة مثل $P(x, y)$ على المنحنى بنقطة مجاورة $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ قريبة منها على نفس المنحنى . وعندما $\Delta x \to 0$ تظل P ثابتة فى حين تتحرك Q على متجهة نحو P ويدور بذلك المستقيم PQ حول P فى اتجاه موضع نهائى وهو المماس PT للمنحنى عند P . وعلى هذا نجد أن dy/dx هو ميل المماس عند P للمنحنى $y = f(x)$.



شكل ٤ — ١

وعلى سبيل المثال نرى من المسألة ٣ أن ميل المنحنى المكعبى $y = x^3 - x^2 - 4$ عند النقطة $x = 4$ هو $m = 40$ وعند النقطة $x = 0$ هو $m = 0$ وعند النقطة $x = -1$ هو $m = 5$.

١٠ – أوجد ds/dt لدالة المسألة (٢) وفسر النتيجة .

نجد هنا أن $\frac{\Delta s}{\Delta t} = 9{\cdot}8t_0 + 4{\cdot}9\Delta t$ و $\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} (9{\cdot}8t_0 + 4{\cdot}9\Delta t) = 9{\cdot}8t_0.$

وعندما $\Delta t \to 0$ فإن $\Delta s/\Delta t$ تعطى السرعة المتوسطة للجسم فى فترة زمنية أقصر وأقصر Δt .

وتعرف ds/dt على أنها السرعة اللحظية v للجسم عند زمن $t = t_0$. فعلى سبيل المثال يكون $v = 9.8\ (3) = 29.4\ \text{ms}^{-1}$ عندما $t = 3$.

١١ – إذا كان $f(x) = |x|$ فأوجد $f'(x)$

الدالة مستمرة لجميع قيم x ، وعند $x < 0$ فإن $f(x) = -x$ و $f'(x) = -1$ أما عند $x > 0$ فإن $f(x) = x$ و $f'(x) = 1$.

أما عند $x = 0$ فأن $f(x) = 0$ و $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

وعندما $\Delta x \to 0^-$ نجد أن $\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to -1$ فى حين عندما $\Delta x \to 0^+$ نجد $\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 1$

وبالتالى فإن المشتقة غير موجودة عند $x = 0$.

١٢ – احسب $\epsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{dy}{dx}$ للدالة (ا) فى المسألة ٢ و (ب) فى المسألة ٥ حقق أن $\epsilon \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$.

$$\epsilon = \{3x^2 - 2x + (3x-1)\Delta x + (\Delta x)^2\} - \{3x^2 - 2x\} = (3x - 1 + \Delta x)\Delta x. \quad (\text{ا})$$

$$\epsilon = \frac{-1}{(x-2)(x+\Delta x-2)} - \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2) + (x+\Delta x-2)}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)} = \frac{1}{(x-2)^2(x+\Delta x-2)}\Delta x \quad (\text{ب})$$

١٣ ــ فسر هندسيا $\Delta y = \frac{dy}{dx}\cdot\Delta x + \epsilon\cdot\Delta x$ المسألة ١٢

من الشكل فى المسألة ٩ نجد أن $\Delta y = RQ$ و RS; $\frac{dy}{dx}\cdot\Delta x = PR\cdot\tan\angle TPR =$ إذن $\epsilon.\Delta x = SQ$ والتغير Δx فى x من $P(x,y)$ يقابله تنير Δy فى y على المنحنى بينما يكون $\frac{dy}{dx}\Delta x$ التغير المقابل فى y على المستقيم المماس PT وبما أن الفرق $\epsilon.\Delta x = (\ldots)(\Delta x)^2 \to 0$ أسرع من Δx فإننا سنستخدم $\frac{dy}{dx}\cdot\Delta x$ الوارد فى الفصل ٢٣ كتقريب لـ Δy عندما يكون $|\Delta x|$ صغيرا .

مسائل اضافية

١٤ ــ أوجد Δy و $\Delta y/\Delta x$ إذا كان :

(ا) $y = 2x - 3$ و x تتغير من 3.3 إلى 3.5 .

(ب) $y = x^2 + 4x$ و x تتغير من 0.7 إلى 0.85 .

(جـ) $y = 2/x$ و x تتغير من 0.75 إلى 0.5 .

ج : (ا) $0.4;\ 2$ (ب) $0.8325;\ 5.55$ (جـ) $4/3;\ -16/3$

١٥ ــ أوجد Δy إذا كان $x = 5$, $y = x^2 - 3x + 5$, و $\Delta x = -0.01$. ماذا ستكون قيمة y عندما $x = 4.99$ ؟

ج : $\Delta y = -0.0699;\ y = 14.9301$

١٦ ــ أوجد السرعة المتوسطة عندما :

(ا) $s = (3t^2 + 5)$ m و t تتغير من $2s$ إلى $3s$.

(ب) $s = (2t^2 + 5t - 3)$ m و t تتغير من $2\ s$ إلى $5\ s$.

ج : (ا) $15\ ms^{-1}$ (ب) $19\ ms^{-1}$

١٧ ــ أوجد الزيادة فى حجم بالون كروى عندما يزداد نصف قطره (ا) من r الى $r + \Delta r$ (ب) من 5 إلى 8 cm

ج . (ا) $\frac{4\pi}{3}(3r^2 + 3r\cdot\Delta r + \Delta r^2)\cdot\Delta r\ cm^3$ (ب) $\frac{524}{3}\pi\ cm^3$

١٨ ــ أوجد مشتقة كل من الدوال :

(ا) $y = 4x - 3$ (د) $y = 1/x^2$ (ز) $y = \sqrt{x}$ (ط) $y = \sqrt{1+2x}$

(ب) $y = 4 - 3x$ (هـ) $y = (2x-1)/(2x+1)$ (ح) $y = 1/\sqrt{x}$ (ى) $y = 1/\sqrt{2+x}$

(جـ) $y = x^2 + 2x - 3$ (و) $y = (1+2x)/(1-2x)$

ج : (ا) 4 (ب) -3 (جـ) $2(x+1)$ (د) $-2/x^3$ (هـ) $\frac{4}{(2x+1)^2}$ (و) $\frac{4}{(1-2x)^2}$ (ز) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (ح) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (ط) $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ (ى) $-\frac{1}{2(2+x)^{3/2}}$

١٩ – أوجد ميل المنحنيات التالية عند النقطة $x = 1$:

(ا) $y = 8 - 5x^2$, (ب) $y = \frac{4}{x+1}$, (b) (جـ) $y = \frac{2}{x+3}$. (c)

ج : (ا) -10 (ب) -1 (جـ) $-1/8$

٢٠ – أوجد احداثيات رأس القطع المكافئ $y = x^2 - 4x + 1$ مستفيدا من كون ميل المماس عند الرأس مساويا الصفر .

ج : $V(2, -3)$

٢١ – أوجد ميل مماسات القطع المكافئ $y = -x^2 + 5x - 6$ عند نقط تقاطعه مع المحور السيني .

ج : $m = 1$ عند $x = 2$ و $m = -1$ عند $x = 3$

٢٢ – إذا كانت s مقاسة بالأمتار (m) و t بالثواني (s) فأوجد سرعة الحركات التالية عند الزمن $t = 2$.

(ا) $s = t^2 + 3t$ (ب) $s = t^3 - 3t^2$ (جـ) $s = \sqrt{t+2}$

ج : (أ) $7\ ms^{-1}$ (ب) $0\ ms^{-1}$ (جـ) $\frac{1}{4}\ ms^{-1}$

٢٣ – بين أن معدل التغير الحظي لحجم مكعب بالنسبة لضلعه x (cm) هو $75\ cm^3$ لكل cm وذلك عندما تكون $x = 5$ cm .

الفصل الخامس

مشتقات الدوال الجبرية

نقول عن دالة إنها قابلة للاشتقاق عند $x = x_0$ إذا كان لها مشتقة هناك . ونقول عن دالة إنها قابلة للاشتقاق فى فترة ما إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة من نقط هذه الفترة .

إن دوال حساب التفاضل والتكامل الابتدائية قابلة للاشتقاق فى فترات تعريفها باستثناء على الأكثر ، بعض النقط المنعزلة فى هذه الفترات .

صيغ الاشتقاق : نعتبر الدوال u, v, w فى الصيغ التالية قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x :

١ - $\dfrac{d}{dx}(c) = 0,$

٢ - $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

٣ - $\dfrac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \dfrac{d}{dx}(u) + \dfrac{d}{dx}(v) + \cdots$

٤ - $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{d}{dx}(u)$

٥ - $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{d}{dx}(v) + v\dfrac{d}{dx}(u)$

٦ - $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{d}{dx}(w) + uw\dfrac{d}{dx}(v) + vw\dfrac{d}{dx}(u)$

٧ - $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{d}{dx}(u), \quad c \neq 0$.

٨ - $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{u}\right) = c\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{c}{u^2}\cdot\dfrac{d}{dx}(u), \quad u \neq 0$.

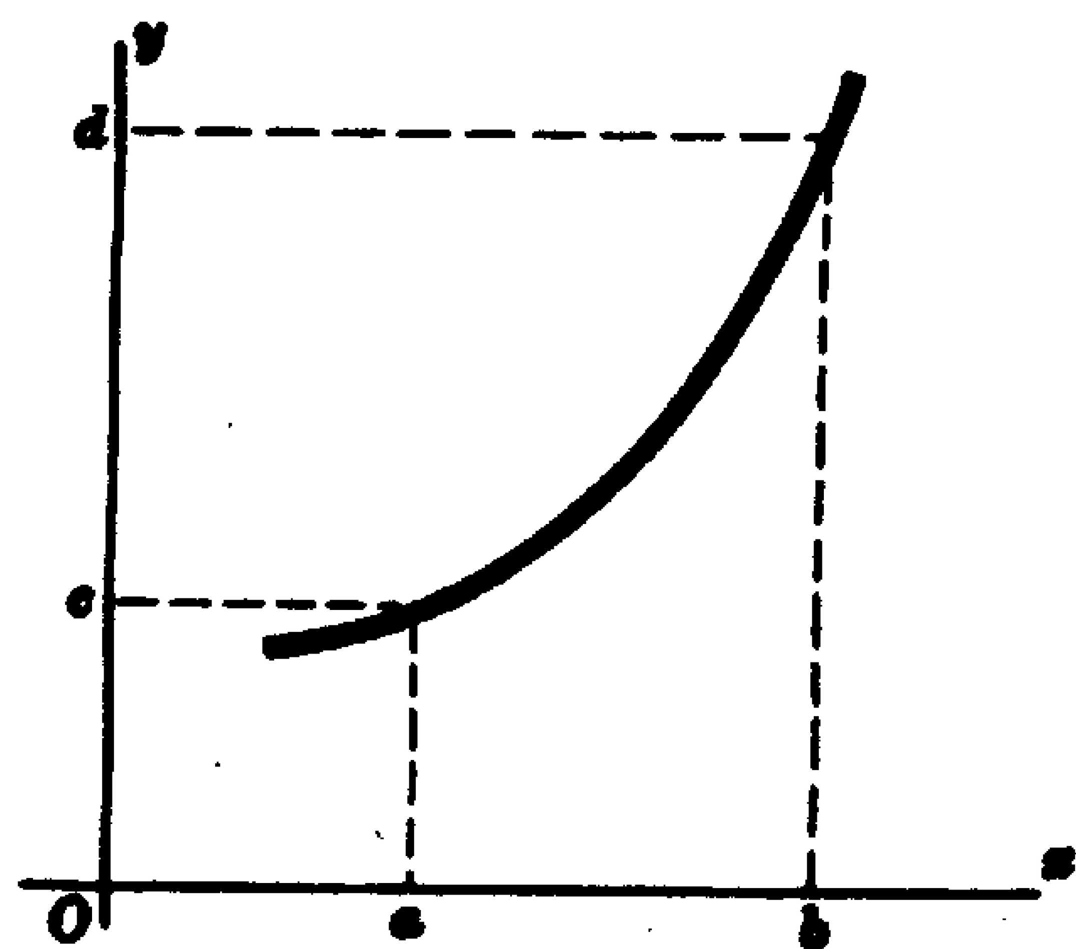
٩ - $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}(u) - u\dfrac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0$.

١٠ - $\dfrac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$.

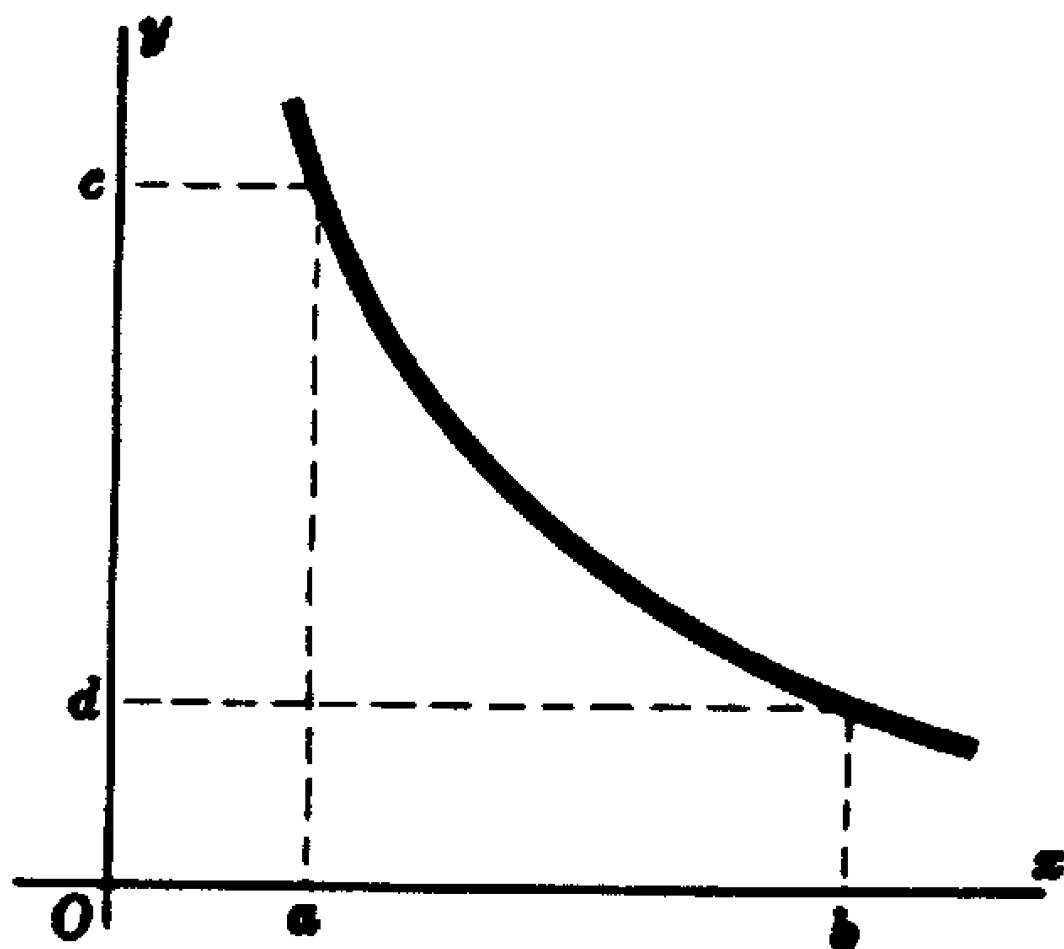
١١ - $\dfrac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\dfrac{d}{dx}(u)$.

أنظر المسائل ١ — ١٣

الدوال العكسية : لتكن الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق فى الفترة $a \leq x \leq b$ ولنفرض أن dy/dx لا يغير إشارته فى هذه الفترة . عندئذ يبدو من الشكلين ٥ — ١ (أ) و ٥ — ١ (ب) أن الدالة تأخذ قيمة واحدة وقيمة واحدة فقط بين $f(a) = c$ و $f(b) = d$ وعلى هذا فكل قيمة لـ y تقابلها الفترة المعينة قيمة لـ x وقيمة واحدة فقط وبالتالى فإن x دالة لـ y ولتكن $x = g(y)$ والدالتين $y = f(x)$ ، $x = g(y)$ تعرفان بالدوال العكسية .



شكل ٥ — ١ (أ)



شكل ٥ — ١ (ب)

مثال ١ :

(أ) $y = f(x) = 3x + 2$ و $x = g(y) = 1/3\,(y - 2)$ دالتان عكسيتان .

(ب) إن الدالتين $y = x^2 - 4x + 3$ و $x = 2 - \sqrt{y+1}$ عكسيتان عندما $x \leq 2$ و $y \geq -1$

والدالتين $y = x^2 - 4x + 3$ و $x = 2 + \sqrt{y+1}$ عكسيتان عندما $x \geq 2$ و $y \geq -1$.

لإيجاد dy/dx عندما نعطى $x = g(y)$:

(أ) حل المعادلة بالنسبة لـ y ، إذا كان ذلك ممكنا ، ثم اشتق بالنسبة لـ x أو

(ب) اشتق $x = g(y)$ بالنسبة لـ y ثم نستخدم العلاقة ١٢

١٢ ــ $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

مثال ٢ :

أوجد dy/dx إذا كان $x = \sqrt{y} + 5$.

باستخدام (أ) نجد أن $y = (x - 5)^2$ و $dy/dx = 2(x - 5)$.

باستخدام (ب) $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; وبالتالى $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x - 5)$.

أنظر المسألتين ١٤ – ١٥

اشتقاق دالة الدالة :

إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فعندئذ يكون $y = f\{g(x)\}$ دالة لـ x وإذا كانت y دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ u و u كانت دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x فإن $y = f\{g(x)\}$ تكون دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x ويمكن الحصول على المشتقة dy/dx باتباع إحدى الطريقتين التاليتين :

(أ) عبر عن y صريحة فى x ثم اشتق .

مثال ٣

إذا كانت $y = u^2 + 3$ و $u = 2x + 1$ فعندئذ $y = (2x + 1)^2 + 3$ و $dy/dx = 8x + 4$

(ب) اشتق كلا من الدالتين بالنسبة للمتغير المستقل واستخدم العلاقة التالية (قاعدة السلسلة) .

١٣ ــ $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال ٤ :

إذا كان $y = u^2 + 3$ و $u = 2x + 1$ فإن $\frac{du}{dx} = 2$, $\frac{dy}{du} = 2u$, ومنه $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4u = 8x + 4.$

أنظر المسائل ١٦ – ٢٠

المشتقات العليا :

لتكن $y = f(x)$ دالة قابلة للإشتقاق لـ x ولنفرض أن مشتقتها تسمى المشتقة الأولى للدالة . فإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثانية للدالة (الأصلية) ونرمز لها بإحدى الرموز التالية

وبالتالي فإن مشتقة المشتقة الثانية تسمى المشتقة الثالثة للدالة ونرمز لها بإحدى الرموز التالية . $\frac{d^2y}{dx^2}$ أ ، y'' أ ، $f''(x)$

$f'''(x)$ أ ، y''' أ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

ملاحظة : لا توجد مشتقة من رتبة معينة عند نقطة ما لم تكن الدالة وجميع مشتقاتها الأدنى فى الرتبة قابلة للاشتقاق عند تلك النقطة .

أنظر المسائل ٢١ — ٢٣

مسائل محلولة

١ — أثبت أن : (أ) $\frac{d}{dx}(c) = 0$ حيث c أى ثابت (ب) $\frac{d}{dx}(x) = 1$ (جـ) $\frac{d}{dx}(cx) = c$ حيث c أى ثابت (د) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ عندما يكون n عددا صحيحا موجبا .

بما أن، $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ فإن

(أ) $$\frac{d}{dx}(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

(ب) $$\frac{d}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

(جـ) $$\frac{d}{dx}(cx) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c(x+\Delta x) - cx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c = c$$

(د) $$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left\{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right\} - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right\} = nx^{n-1}$$

٢ — إذا كانت v و u دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لـ x فأثبت أن (أ) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$

(ب) $\frac{d}{dx}(u \cdot v) = u \cdot \frac{d}{dx}(v) + v \cdot \frac{d}{dx}(u)$ (جـ) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot \frac{d}{dx}(u) - u \cdot \frac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0$

(أ) لنفرض أن $f(x) = u + v = u(x) + v(x)$; إذن :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x) - u(x) - v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نجـد أن. $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$

(ب) لنفرض أنه $f(x) = u \cdot v = u(x) \cdot v(x)$; إذن $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - v(x)\cdot u(x+\Delta x)] + [v(x)\cdot u(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

ومنـه $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u \cdot v) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u).$

(جـ) لنفرض أن $f(x) = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}$; إذن

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)] - [u(x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}$$

ومنه .

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{\{v(x)\}^2} = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

اشتق كلا من الدوال التالية :

٣ – $y = 4+2x-3x^2-5x^3-8x^4+9x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 0+2(1)-3(2x)-5(3x^2)-8(4x^3)+9(5x^4) = 2-6x-15x^2-32x^3+45x^4$$

٤ – $y = \frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3} = x^{-1}+3x^{-2}+2x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2}+3(-2x^{-3})+2(-3x^{-4}) = -x^{-2}-6x^{-3}-6x^{-4} = -\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}$$

٥ – $y = 2x^{1/2}+6x^{1/3}-2x^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)+6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)-2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = x^{-1/2}+2x^{-2/3}-3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}}+\frac{2}{x^{2/3}}-3x^{1/2}$$

٦ – $y = \frac{2}{x^{1/2}}+\frac{6}{x^{1/3}}-\frac{2}{x^{3/2}}-\frac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2}+6x^{-1/3}-2x^{-3/2}-4x^{-3/4}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)+6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right)-2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right)-4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right)$$

$$= -x^{-3/2}-2x^{-4/3}+3x^{-5/2}+3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}}-\frac{2}{x^{4/3}}+\frac{3}{x^{5/2}}+\frac{3}{x^{7/4}}$$

٧ – $y = \sqrt[3]{3x^2}-\frac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3}-(5x)^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3}\cdot 6x-\left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2}\cdot 5 = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}}+\frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}}+\frac{1}{2x\sqrt{5x}}$$

٨ – $s = (t^2-3)^4$

$$\frac{ds}{dt} = 4(t^2-3)^3(2t) = 8t(t^2-3)^3$$

٩ – $z = \frac{3}{(a^2-y^2)^2} = 3(a^2-y^2)^{-2}$

$$\frac{dz}{dy} = 3(-2)(a^2-y^2)^{-3}\cdot\frac{d}{dy}(a^2-y^2) = 3(-2)(a^2-y^2)^{-3}(-2y) = \frac{12y}{(a^2-y^2)^3}$$

١٠ - $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} = (x^2 + 6x + 3)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 6x + 3) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}(2x + 6) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$$

١١ - $y = (x^2 + 4)^2 (2x^3 - 1)^3$

$$y' = (x^2+4)^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x^3 - 1)^3 + (2x^3 - 1)^3 \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4)^2$$

$$= (x^2+4)^2 \cdot 3(2x^3-1)^2 \cdot \frac{d}{dx}(2x^3 - 1) + (2x^3-1)^3 \cdot 2(x^2+4) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$

$$= (x^2+4)^2 \cdot 3(2x^3-1)^2 \cdot 6x^2 + (2x^3-1)^3 \cdot 2(x^2+4) \cdot 2x = 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3 + 36x - 2)$$

١٢ - $y = \dfrac{3 - 2x}{3 + 2x}$

$$y' = \frac{(3+2x) \cdot \frac{d}{dx}(3-2x) - (3-2x) \cdot \frac{d}{dx}(3+2x)}{(3+2x)^2} = \frac{(3+2x)(-2) - (3-2x)(2)}{(3+2x)^2} = \frac{-12}{(3+2x)^2}$$

١٣ - $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{x^2}{(4 - x^2)^{1/2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4-x^2)^{1/2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) - x^2 \cdot \frac{d}{dx}(4-x^2)^{1/2}}{4 - x^2} = \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2 \cdot \frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{4 - x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{4 - x^2} \cdot \frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} = \frac{2x(4-x^2) + x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$$

١٤ - إذا كان $x = y\sqrt{1 - y^2}$ فأوجد dy/dx .

$$\frac{dx}{dy} = (1-y^2)^{1/2} + \tfrac{1}{2}y(1-y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{1 - 2y^2}{\sqrt{1 - y^2}}$$ ومنه $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{\sqrt{1 - y^2}}{1 - 2y^2}$$

١٥ - أوجد ميل المنحنى $x = y^2 - 4y$ عند نقط تقاطعه مع المحور y .

إن نقطتي التقاطع هما النقطتان $(0,0)$ و $(0,4)$

$$\frac{dx}{dy} = 2y - 4,$$ ومنه $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{2y - 4}.$$

والميل عند النقطة $(0,0)$ هو $-1/4$ — عند النقطة $(0,4)$ يكون الميل $1/4$.

قاعدة السلسلة :

١٦ - استنتج قاعدة السلسلة $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

ليكن Δu , Δy التزايدين اللذين يطرآن على u و y على التوالي عندما تعطى x تزايدا مقداره Δx فإذا فرضنا الآن أن $\Delta u \neq 0$ فإن

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

وبفرض $\Delta u \neq 0$ عندما $\Delta x \to 0$ نجد أن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ وهو المطلوب .

يعتبر القيد الذي فرضناه على Δu محققا إذا اقتصرت $|\Delta x|$ على قيم صغيرة بقدر كاف . أما إذا كان هذا الأمر مستحيلا فعندئذ يمكن برهان قاعدة السلسلة على النحو التالي :

لنضع $\Delta y = \frac{dy}{du}\Delta u + \epsilon . \Delta u$ حيث $\epsilon \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$

(أنظر المسألة ١٣ من الفصل الرابع)

عندئذ يكون

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

وبأخذ النهاية عندما $\Delta x \to 0$ نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} + 0\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ كما سبق .

١٧ – أوجد dy/dx بفرض أن $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ و $u = \sqrt[3]{x^2+2}.$

أن $\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$ و $\frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{2x}{3u^2}$

وبالتالى $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{2x}{3u^2} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$

١٨ – تتحرك نقطة على المنحنى $y = x^3 - 3x + 5$ بحيث تكون $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ حيث t هو الزمن . بأى معدل تتغير y عندما تكون $t = 4$ ؟

ينبغى أن نجد قيمة dy/dt عندما $t = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2-1), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2-1)}{4\sqrt{t}}$$

وعندما $t = 4$ تكون $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4,$ و $\frac{dy}{dt} = \frac{3(16-1)}{4\cdot 2} = \frac{45}{8}$ أى 45/8 وحدة فى كل وحدة زمن .

١٩ – تتحرك نقطة على المستوى وفق القانون $x = t^2 + 2t,\ y = 2t^3 - 6t.$ أوجد dy/dx عندما $t = 0, 2, 5$.

بما أنه يمكن حل العلاقة الأولى بالنسبة لـ t والتعويض بالنتيجة عن t فى العلاقة الثانية فإنه يتضح أن y دالة لـ x .

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t+2},\quad \frac{dx}{dt} = 2t+2,\quad \frac{dy}{dt} = 6t^2 - 6,$ ومنه $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = 6(t^2-1)\cdot\frac{1}{2(t+1)} = 3(t-1).$

والقيمة المطلوبة لـ dy/dx هى -3 عندما $t = 0$ و 3 عندما $t = 2$ و 12 عندما $t = 5$.

٢٠ – إذا كان $y = x^2 - 4x$ و $x = \sqrt{2t^2+1}$ فأوجد dy/dt عندما $t = \sqrt{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

وعندما $t = \sqrt{2}$ فإن $x = \sqrt{5}$ و $\frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}(5 - 2\sqrt{5}).$

٢١ – بين أن الدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ مشتقات من جميع الرتب عندما $x = a$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 8$ و $f'(a) = 3a^2 + 6a - 8$

$f''(x) = 6x + 6$ و $f''(a) = 6a + 6$

$f'''(x) = 6$ و $f'''(a) = 6$

وجميع المشتقات ذات الرتب الأعلى تساوى صفر .

٢٢ – ابحث فى المشتقات المتتالية لـ $f(x) = x^{4/3}$ عندما $x = 0$

$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3}$ و $f'(0) = 0$

$f''(x) = \frac{4}{9x^{2/3}}$ و $f''(0)$ غير موجودة .

وهكذا فالمشتقة الأولى موجودة عندما $x = 0$ دون سواها من المشتقات ذات الرتبة الأعلى .

٢٣ – إذا فرضنا $f(x) = \frac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}$، فأوجـد $f^{(n)}(x)$.

نجـد :
$$f'(x) = 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2\cdot 1!\,(1-x)^{-2}$$
$$f''(x) = 2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2\cdot 2!\,(1-x)^{-3}$$
$$f'''(x) = 2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2\cdot 3!\,(1-x)^{-4}$$

وهذا يوضح لنا أن $f^{(n)}(x) = 2\cdot n!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

ولبرهان ذلك يمكن اللجوء إلى الاستقراء الرياضى ونثبت أنه إذا كان $f^{(k)}(x) = 2\cdot k!\,(1-x)^{-(k+1)}$،

فإن $f^{(k+1)}(x) = -2\cdot k!\,(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2\cdot(k+1)!\,(1-x)^{-(k+2)}$

مسـائل اضـافية

٢٤ – برهن الصيغة ١٠ بفرض $m = -1/n$ حيث n عدد صحيح موجب مستخدما الصيغة ٩ لحساب $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)$
(أنظر المسألة ٤ من الفصل السادس لحالة $m = p/q$ حيث p و q عددان صحيحان) .

أوجـد المشتقة فى كل من المسائل ٢٥ – ٤٣ .

٢٥ – $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ ج : $dy/dx = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$

٢٦ – $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$ ج : $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x^{3/2}}$

٢٧ – $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-1/2}$ ج : $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^{3/2}}$

٢٨ – $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ ج : $y' = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$

٢٩ – $f(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} + \frac{6}{\sqrt[3]{t}}$ ج : $f'(t) = -\frac{t^{1/2} + 2t^{2/3}}{t^2}$

٣٠ – $y = (1-5x)^6$ ج : $y' = -30(1-5x)^5$

٣١ – $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$ ج : $f'(x) = 12(1-x^2)(3x - x^3 + 1)^3$

٣٢ – $y = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$ ج : $y' = \frac{2-x}{y}$

٣٣ – $\theta = \frac{3r+2}{2r+3}$ ج : $\frac{d\theta}{dr} = \frac{5}{(2r+3)^2}$

٣٤ – $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$ ج : $y' = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$

٣٥ – $y = 2x^2\sqrt{2-x}$ ج : $y' = \frac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$

٣٦ – $f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$ ج : $f'(x) = \frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$

٣٧ – $y = (x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$ ج : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$

٣٨ – $z = \sqrt{1-4w^2}$ ج : $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}$

٣٩ – $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ ج : $y' = \frac{1}{4\sqrt{x + x\sqrt{x}}}$

٤٠ — $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ ج : $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

٤١ — $y = (x^2+3)^4 (2x^3-5)^3$ ج : $y' = 2x(x^2+3)^3 (2x^3-5)^2 (17x^3+27x-20)$

٤٢ — $s = \dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ ج : $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{10t}{(3-t^2)^2}$

٤٣ — $y = \left(\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}\right)^4$ ج : $y' = \dfrac{36x^2(x^2-1)^3}{(2x^2+1)^5}$

٤٤ — احسب dy/dx بطريقتين مختلفتين وتحقق من عدم اختلاف النتائج :

(ا) $x = (1+2y)^3$, (ب) $x = 1/(2+y)$.

استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد dy/dx فى المسائل ٤٥ — ٤٨

٤٥ — $y = \dfrac{u-1}{u+1}, \ u = \sqrt{x}$ ج : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x}\,)^2}$

٤٦ — $y = u^3+4, \ u = x^2+2x$ ج : $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2(x+2)^2(x+1)$

٤٧ — $y = \sqrt{1+u}, \ u = \sqrt{x}$ ج : أنظر المسألة ٣٩ .

٤٨ — $y = \sqrt{u}, \ u = v(3-2v), \ v = x^2$ إرشاد : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$. أنظر المسألة ٣٦

أوجد فى كل من المسائل ٤٩ — ٥٢ المشتقة المبينة إلى جانب كل مسألة

٤٩ — $y = 3x^4-2x^2+x-5; \ y'''$ ج : $y''' = 72x$

٥٠ — $y = 1/\sqrt{x}; \ y^{(iv)}$ ج : $y^{(iv)} = \dfrac{105}{16x^{9/2}}$

٥١ — $f(x) = \sqrt{2-3x^2}; \ f''(x)$ ج : $f''(x) = \dfrac{-6}{(2-3x^2)^{3/2}}$

٥٢ — $y = x/\sqrt{x-1}, \ y''$ ج : $y'' = \dfrac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$

أوجد المشتق من المرتبة n فى كل من المسألتين ٥٣ — ٥٤

٥٣ — $y = 1/x^2$ ج : $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$

٥٤ — $f(x) = 1/(3x+2)$ ج : $f^n(x) = (-1)^n \dfrac{3^n \cdot n!}{(3x+2)^{n+1}}$

٥٥ — إذا كان $y = f(u)$ و $u = g(x)$ فبين أن

(ا) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2y}{du^2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2$ (ب) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^3u}{dx^3} + 3\dfrac{d^2y}{du^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{du}{dx} + \dfrac{d^3y}{du^3}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^3$

٥٦ — من العلاقة $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$ استنتج $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$, $\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$.

الفصل السادس

الاشتقاق الضمنى

الدوال الضمنية : نقول عن معادلة من الشكل $f(x, y) = 0$ على مديين معينين وقد يكونان مقيدين المتغيرين ، أنها تعرف y دالة x بشكل ضمنى .

مثال ١ :

(ا) تعرف المعادلة $xy + x - 2y - 1 = 0$ عندما $x \neq 2$ الدالة $y = \dfrac{1-x}{x-2}$

(ب) تعرف المعادلة $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ الدالة $y = 2/3\sqrt{9-x^2}$ عندما $|x| \leq 3$, $y \geq 0$, والدالة $y = -2/3\sqrt{9-y^2}$ عندما $|x| \leq 3$ و $y \leq 0$. لاحظ أن القطع الناقص يمكن اعتباره على انه مكون من قوسين متصلين عند القطبين $(-3, 0)$ و $(3, 0)$.

ويمكن الحصول على المشتق y' باتباع احدى الطريقتين :

(ا) حل المعادلة بالنسبة لـ y إن كان الأمر ممكنا ثم اشتق بالنسبة لـ x ولكن ينبغى أن نتوقع ضرورة تفادى هذه الطريقة فى المعادلات البسيطة جداً .

(ب) اعتبر y دالة لـ x واشتق المعادلة المفروضة بالنسبة لـ x ثم حل العلاقة الناتجة بالنسبة لـ y' . تعرف طريقة الاشتقاق هذه بالاشتقاق الضمنى .

مثال ٢ :

(ا) أوجد y' إذا كان $xy + x - 2y - 1 = 0.$

لدينا $x \cdot \dfrac{d}{dx}(y) + y \cdot \dfrac{d}{dx}(x) + \dfrac{d}{dx}(x) - 2 \cdot \dfrac{d}{dx}(y) - \dfrac{d}{dx}(1) = \dfrac{d}{dx}(0)$

أو $xy' + y + 1 - 2y' = 0;$ إذن $y' = \dfrac{1+y}{2-x}.$

(ب) إذا كان $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0.$ فأوجد y' عندما $x = \sqrt{5}$

لدينا $4 \cdot \dfrac{d}{dx}(x^2) + 9 \cdot \dfrac{d}{dx}(y^2) = 8x + 9 \cdot \dfrac{d}{dy}(y^2)\dfrac{dy}{dx} = 8x + 18yy' = 0$ ومنه $y' = -\dfrac{4x}{9y}.$

وعندما $x = \sqrt{5}$ يكون $y = \pm 4/3$ ويكون عند النقطة $(\sqrt{5}, 4/3)$ على القوس العلوى من القطع الناقص $y' = -\sqrt{5}/3$ ويكون عند النقطة $(\sqrt{5}, -4/3)$ القوس السفلى $y' = \sqrt{5}/3$.

يمكن الحصول على المشتقات ذات الرتب الأعلى باتباع إحدى الطريقتين :

(أ) اشتق ضمنيا المشتقة من رتبة أدنى بواحد وعوض عن y' بقيمتها من العلاقة التى سبق أن وجدتها .

مثال ٣ :

لدينا من المثال ٢ (أ) $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$ إذن :

$$\frac{d}{dx}(y') = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\dfrac{1+y}{2-x}\right) + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

(ب) اشتق المعادلة المفروضة ضمنيا العدد الضرورى من المرات كى تحصل على المشتقة المطلوبة ثم احذف جميع المشتقات من الرتب الأصغر . وتفضل هذه الطريقة فقط إذا كان المطلوب الحصول على مشتقة من رتبة عليا عند نقطة مفروضة .

مثال ٤ :

أوجد قيمة y'' عند النقطة $(-1, 1)$ على المنحنى $x^2y + 3y - 4 = 0$.

بالاشتقاق الضمنى مرتين بالنسبة لـ x نجد أن :

$$x^2y' + 2xy + 3y' = 0$$

ومنه

$$x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0 .$$

وبالتعويض عن $x = -1$ نجد $y = 1$ من العلاقة الأولى . إذن $y' = 1/2$

بالتعويض عن $x = -1$ و $y = 1$ و $y' = 1/2$ فى العلاقة الثانية إذن $y'' = 0$

مسائل محلولة

١ – إذا كان $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$ فأوجد y'

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0$$

ومنه

$$y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$$

٢ – إذا كان $x^2 - xy + y^2 = 3.$ فأوجد y' و y''

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x - xy' - y + 2yy' = 0$$

ومنه

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

وبالتالى

$$y'' = \frac{(x-2y)\dfrac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y)\dfrac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} = \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x\left(\dfrac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^3} = \frac{18}{(x-2y)^3}$$

٣ – إذا كان $x^3y + xy^3 = 2$ فأوجد y' و y'' عندما $x = 1$

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

و $x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$

وعندما $x = 1$ يكون $y = 1$ بالتعويض فى علاقة المشتقة الأولى نجد أن $y' = -1$

وبالتعويض عن $x = 1, y = 1, y' = -1$ فى العلاقة الثانية نجد أن $y'' = 0$

مسائل اضافية

٤ – استنتج الصيغة ١٠ من الفصل الخامس عندما $m = p/q$ حيث p, q عددان صحيحان وذلك بكتابة $y = x^{p/q}$ بالشكل $y^q = x^p$ ثم بالاشتقاق بالنسبة لـ x .

٥ – أوجد y'' بفرض (أ) $x + xy + y = 2$ (ب) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$

ج (أ) $y'' = \frac{2(1+y)}{(1+x)^2}$, (ب) $y'' = -\frac{4xy}{(y^2-x)^3}$

٦ – أوجد y', y'', y''' عند (أ) النقطة $(2, 1)$ على المنحنى $x^2 - y^2 - x = 1$ (ب) النقطة $(1, 1)$ على المنحنى $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$ ج: (أ) $3/2, -5/4, 45/8$; (ب) $1, 0, 0$.

٧ – أوجد الميل عند النقطة (x_0, y_0) لـ (أ) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (ب) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$,
(جـ) $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0.$

ج: (أ) $-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (ب) $\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (جـ) $\frac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$

٨ – أثبت أن المنحنيين $5y - 2x + y^3 - x^3y = 0$ و $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ يتقاطعان بزاوية قائمة عند نقطة الأصل .

٩ – (أ) المساحة السطحية الكلية لمتوازى مستطيلات قائم قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها y وارتفاعه x تعطى بالعلاقة $S = 2y^2 + 4xy$ فإذا كانت S ثابتة فأوجد dy/dx دون حل العلاقة بالنسبة لـ y .

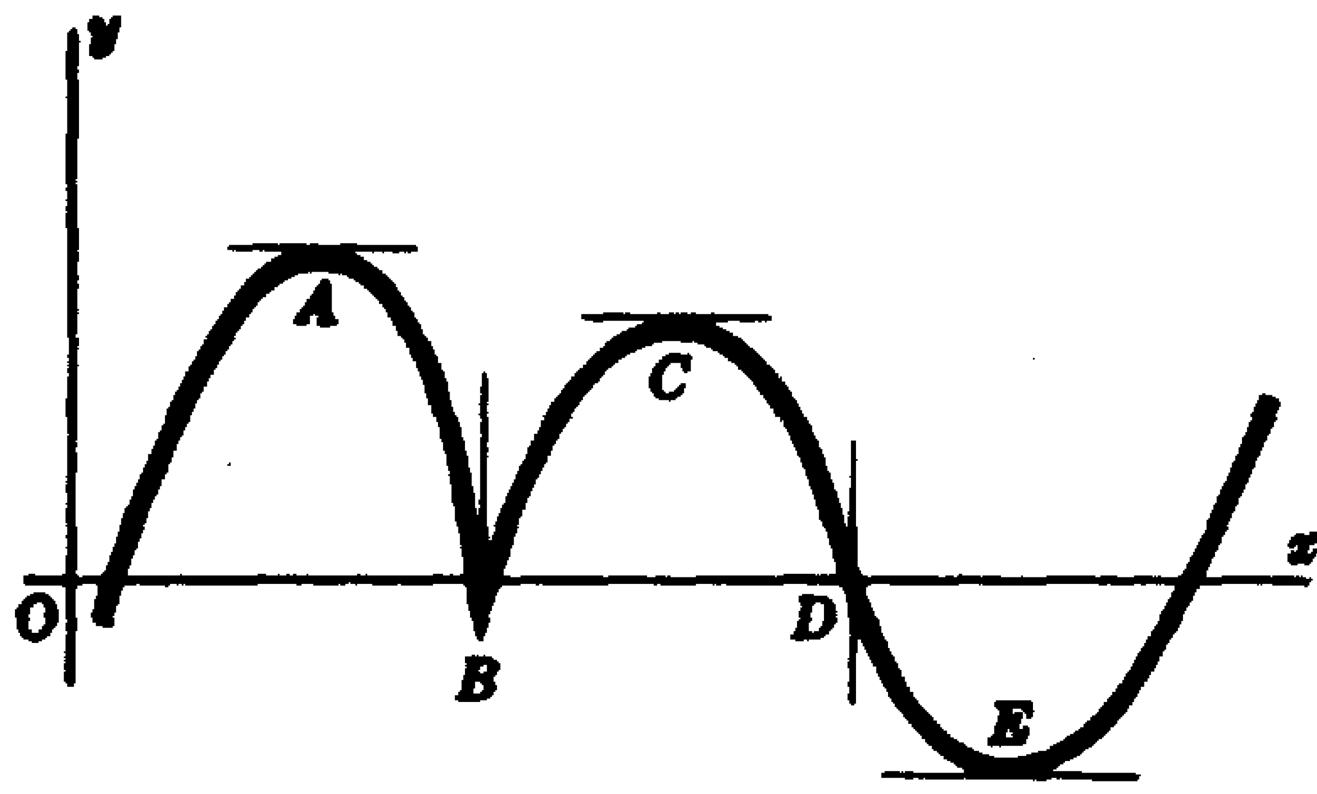
(ب) تعطى المساحة السطحية الكلية لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h بالعلاقة $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ فإذا كانت S ثابتة فأوجد dr/dh ج : (أ) $-\frac{y}{x+y}$ (ب) $-\frac{r}{2r+h}$

١٠ – الدائرة $x^2 + y^2 = r^2$ أثبت أن $\left|\frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{3/2}}\right| = \frac{1}{r}.$

١١ – إذا كان $S = \pi x(x + 2y)$ و $V = \pi x^2y$ فأثبت أن $dS/dx = 2\pi(x - y)$ عندما تكون V ثابتة ، وأن $dV/dx = -\pi x(x - y)$ عندما تكون S ثابتة .

الفصل السابع

المماســـــات والأعمـــــدة



شكل ٧ — ١

اذا كان للدالة : $f(x)$ مشتقة محددة $f'(x_0)$ عند $x = x_0$ فعندئذ يكون المنحنى $y = f(x)$ مماس عند النقطة $P_0(x_0, y_0)$ ميله .

$$m = \tan\theta = f'(x_0)$$

وإذا كانت $m = 0$ فإنه يكون المنحنى مماس أفقى يعطى بالعلاقة $y = y_0$ عند P_0 كما فى E, C, A فى الشكل ٧ — ١ وباستثناء هذه الحالة فإن معادلة المماس هى

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

وعندما تكون $f(x)$ مستمرة عند $x = x_0$ ولكن $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ فعندئذ يكون المنحنى مماس رأسى معادلته $x = x_0$ كما فى D, B من الشكل ٧ — ١ .

إن العمودى على منحنى عند إحدى نقاطه ، هو مستقيم مار بتلك النقطة وقائم على المماس عندها. ومعادلة العمودى عند $P_0(x_0, y_0)$ هى .

$x = x_0$ إذا كان المماس أفقيا

و $y = y_0$ إذا كان المماس عموديا

وباستثناء هاتين الحالتين فإن معادلة العمودى هى

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

أنظر المسائل ١ — ٩

تعرف زاوية تقاطع منحنيين على أنها الزاوية بين مماسيهما عند نقطة التقاطع .

لتعيين زوايا تقاطع منحنيين :

(١) حل المعادلتين آنيا للحصول على نقط التقاطع .

(٢) أوجد الميلين m_2, m_1 لمماسى المنحنيين عند كل نقط تقاطعهما .

(٣) إذا كان $m_1 = m_2$ فزاوية التقاطع $\phi = 0°$

(٤) وإذا كان $m_1 = -1/m_2$ فزاوية التقاطع هي $\phi = 90°$

وفي غير ذلك يكون

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

وتكون ϕ زاوية التقاطع الحادة عندما يكون $\tan\phi > 0$

وتكون $180 - \phi$ زاوية التقاطع الحادة عندما يكون $\tan\phi < 0$

أنظر المسائل ١٠ – ١٢

طول المماس والعمودي وتحت المماس وتحت العمودي : يعرف طول المماس لمنحنى عند إحدى نقاطه ، على أنه طول جزء المماس بين نقطة التماس والمحور x ويسمى طول مسقط هذا الجزء من المماس على المحور x بطول تحت المماس .

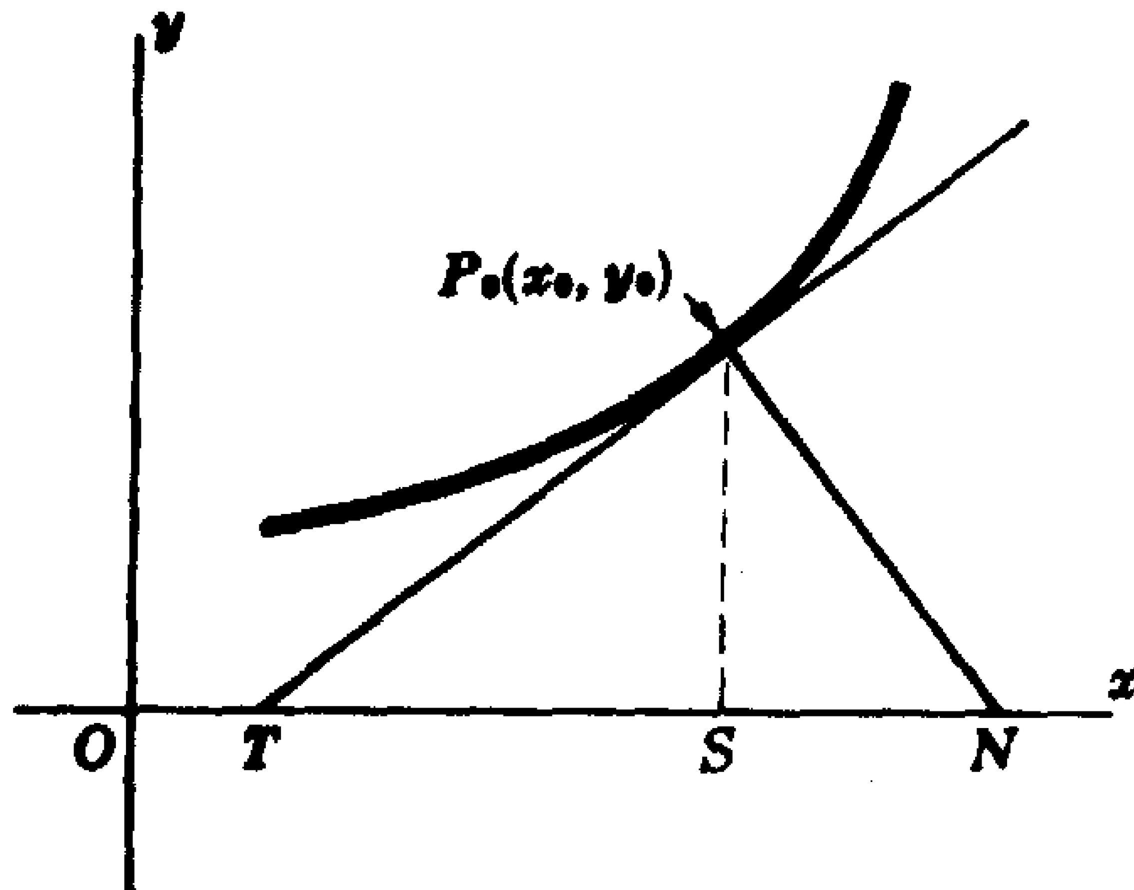
ويعرف طول العمودي على أنه طول جزء العمودي بين نقطة تماس المماس والمحور x . ويسمى طول مسقط هذا الجزء على المحور x بطول تحت العمودي .

طول تحت المماس $= TS = y_0/m$

طول تحت العمودي $= SN = my_0$

طول المماس $TP_0 = \sqrt{(TS)^2+(SP_0)^2}$

طول العمود $P_0N = \sqrt{(SN)^2+(SP_0)^2}$



شكل ٧ ــ ٢

ملاحظة : إن طولي تحت المماس وتحت العمودي هي أطوال موجهة . إنما يفضل بعض المؤلفين الطولين غير الموجهين $|y_0/m|$ و $|my_0|$ على التوالي . عندئذ ينبغي في هذه الحالة إهمال الإشارات في إجابة المسائل التالية .

أنظر المسألة ١٣

مســـائل محلولة

١ ــ أوجد نقط التماس للمماسات الأفقية والعمودية لمنحنى $x^2 - xy + y^2 = 27$

بالاشتقاق نجد $y' = \frac{y-2x}{2y-x}$. للحصول على المماسات الأفقية نضع البسط في y' مساوية للصفر فنحصل على $y = 2x$ ونقط التماس هي نقط تقاطع المستقيم $y = 2x$ مع المنحنى المفروض. فإذا حللنا هاتين المعادلتين آنيا نحصل على النقطتين $(3,6)$ و $(-3, -6)$

وللحصول على المماسات العمودية نضع المقام فى y' مساويا للصفر فنحصل على $x = 2y$. ونقط التماس هى نقط تقاطع المستقيم $x = 2y$ مع المنحنى المفروض . فإذا حللنا هاتين المعادلتين آنيا نحصل على النقطتين (6,3) و (3– و 6–)

٢ – أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $y = x^3 - 2x^2 + 4$ عند النقطة (2,4) .

إن $f'(x) = 3x^2 - 4x$; وميل المماس عند (2,4) هو $m = f'(2) = 4$

ومعادلة المماس هى $y - 4 = 4(x - 2)$ أو $y = 4x - 4$

ومعادلة العمودى هى $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$ أو $x + 4y = 18$

٣ – أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ عند النقطة (1 و 1) .

إن $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$. وميل المماس عند (1 و 1) هو $m = -1$

ومعادلة المماس هى $y - 1 = -1(x - 1)$ أو $x + y = 2$

ومعادلة العمودى هى $y - 1 = 1(x - 1)$ أو $x - y = 0$

٤ – أوجد معادلات المماس للقطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 40$ والتى ميلها $m = -2/9$.

نفرض أن $P_0(x_0, y_0)$ هى نقطة تماس المماس المطلوب عندئذ يكون .

(أ) $4x_0^2 + 9y_0^2 = 40$ لأن P_0 تقع على المنحنى

(ب) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$ وعند النقطة (x_0, y_0) يكون $m = \frac{-4x_0}{9y_0} = -\frac{2}{9}$ ومنه $y_0 = 2x_0$

(جـ) نقط التماس هى الحلول الآنية (1, 2) و (2 – ,1 –) للمعادلتين (أ) ، (ب) – ومعادلة المماس عند (1, 2) هى $y - 2 = -2/9(x - 1)$ أو $2x + 9y = 20$. ومعادلة المماس عند (2 – ,1 –) هى $y + 2 = -2/9(x + 1)$ أو $2x + 9y = -20$.

٥ – أوجد معادلة المماس للقطع الزائد $x^2 - y^2 = 16$ والمار بالنقطة $(2, -2)$.

نفرض أن $P_0(x_0, y_0)$ هى نقطة التماس للمماس المطلوب . عندئذ :

(أ) $x_0^2 - y_0^2 = 16$ لأن النقطة P_0 تقع على القطع الزائد

(ب) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ وعند النقطة (x_0, y_0) يكون $m = \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0 + 2}{x_0 - 2}$ = ميل المستقيم الذى يصل P_0 بـ (2, –2) وعندئذ يكون

$$2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16 \text{ أو } x_0 + y_0 = 8$$

(جـ) نقطة التماس هى الحل الآنى (5,3) للمعادلتين (أ) ، (ب) وعلى ذلك تكون معادلة المماس هى

$$y - 3 = \tfrac{5}{3}(x - 5) \text{ أو } 5x - 3y = 16.$$

٦ – أوجد معادلات المستقيمات الرأسية التى تلاقى كلا منها المنحنيين

(١) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ (٢) $3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$ عند نقطتين يكون المماسان للمنحنين عندها متوازيين

نفرض أن $x = x_0$ أحد هذه المستقيمات الرأسية .

المنحنى (١) يكون $y' = 3x^2 + 4x - 4;$ وعند $x = x_0$ يكون $m = 3x_0^2 + 4x_0 - 4.$

والمنحنى (٢) يكون $3y' = 6x^2 + 18x - 3;$ وعند $x = x_0$ يكون $m = 2x_0^2 + 6x_0 - 1.$

و بما أنه ينبغى أن يكون $3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$، فإن $x_0 = 3, x_0 = -1$ والمستقيمان هما $x = 3, x = -1$.

٧ ــ (١) بين أن معادلة المماس الذى ميله $m \neq 0$ للقطع المكافىء $y^2 = 4px$ هى $y = mx + p/m$

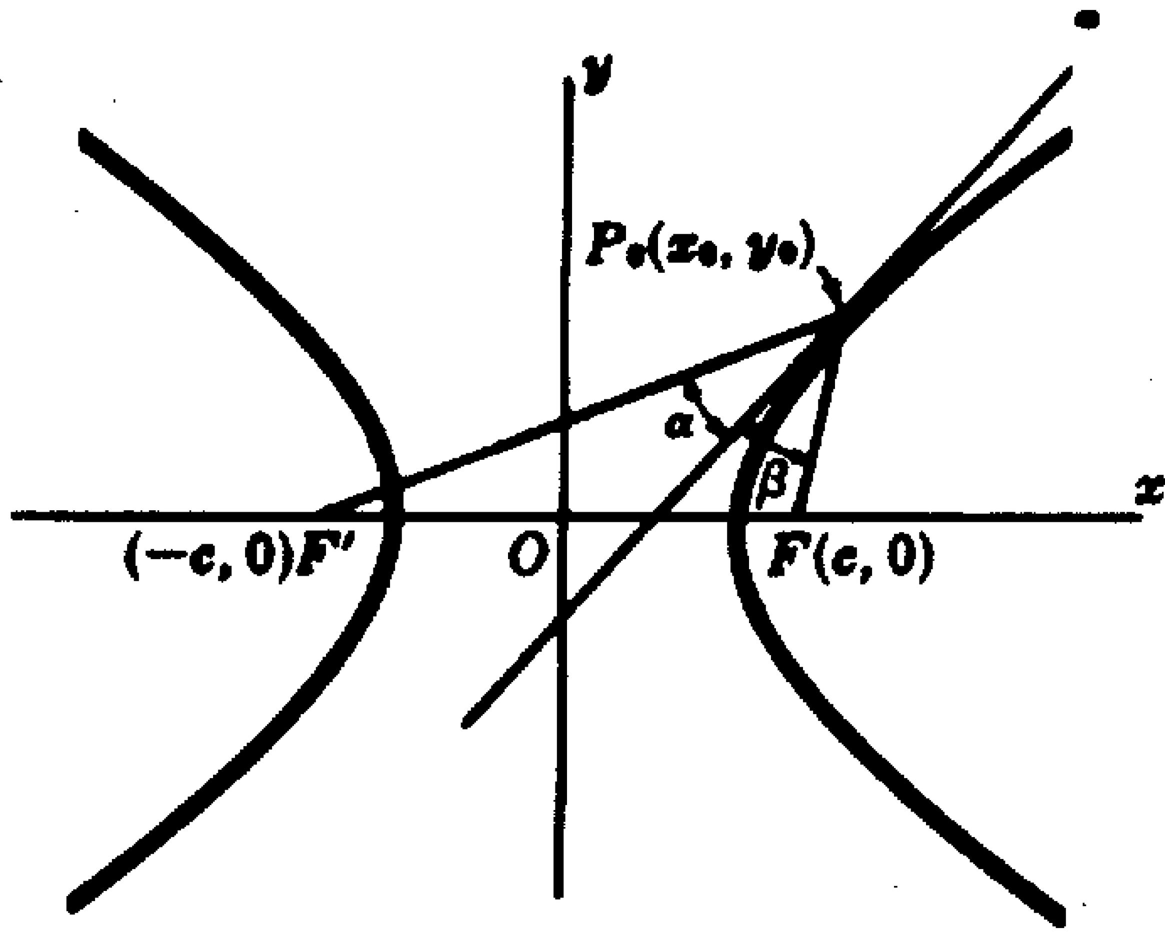
(ب) بين أن معادلة المماس للقطع الناقص $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ عند نقطة عليه $P_0 (y_0, y_0)$ هى
$b^2 x x_0 + a^2 y_0 y = a^2 b^2$

(١) $y' = 2p/y$ نفرض أن $P_0 (x_0, y_0)$ هى نقطة التماس ، إذن $y_0^2 = 4px_0$ و $m = 2p/y_0$ وكذلك $y_0 = 2p/m$ و $x_0 = \frac{1}{4} y_0^2/p = p/m^2$ وتكون معادلة المماس هى $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$ أو $y = mx + p/m.$

(ب) $y' = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$ ويكون عند النقطة P_0 : $m = -\dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ وبالتالى فإن معادلة المماس هى

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$ أو $$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2.$$

٨ ــ بين أن المماس عند النقطة $P_0 (x_0 , y_0)$ للقطع الزائد $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ينصف الزاوية المحصورة بين نصفى القطرين البؤريين للنقطة P_0.



شكل ٧ ــ ٣

إن ميل المماس عند النقطة P_0 للقطع الزائد يساوى b^2x_0/a^2y_0 وميل نصفى القطرين البؤريين P_0F' و P_0F هما $y_0/(x_0 + c)$ و $y_0/(x_0 - c)$ على التوالى وبالتالى فإن

$$\tan \alpha = \frac{\dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0} - \dfrac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 + c}} = \frac{(b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2) + b^2 c x_0}{(a^2 + b^2) x_0 y_0 + a^2 c y_0} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c x_0}{c^2 x_0 y_0 + a^2 c y_0} = \frac{b^2 (a^2 + c x_0)}{c y_0 (a^2 + c x_0)} = \frac{b^2}{c y_0}$$

وحيث أن $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ و $a^2 + b^2 = c^2$ و

$$\tan \beta = \frac{\dfrac{y_0}{x_0 - c} - \dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 + \dfrac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2 c x_0 - (b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2)}{(a^2 + b^2) x_0 y_0 - a^2 c y_0} = \frac{b^2 c x_0 - a^2 b^2}{c^2 x_0 y_0 - a^2 c y_0} = \frac{b^2}{c y_0}$$

وحيث أن $\tan \alpha = \tan \beta$ يكون $\alpha = \beta$.

٩ ــ برهن أن الوتر الذى يصل نقطتى تماس المماسين للقطع الناقص $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ المارين بأى نقطة على دليل القطع يمر بالبؤرة المرافقة لهذا الدليل .

لتكن $P_0 (x_0, y_0)$ أية نقطة يمكن منها رسم مماسين للقطع الناقص ولتكن $P_1 (x_1, y_1)$ و $P_2 (x_2, y_2)$ نقطتى

التماس الموافقتين . إن معادلتي المماسين عند P_1 ، P_2 هما $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ و $b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$.
وحيث أنهما يمران بـ P_0 فإن $b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 = a^2b^2$ و $b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 = a^2b^2$.
ويكون المستقيم $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$ الذى يمر بالنقطتين P_1 ، P_2 هو وتر التماس . لنفرض أن $P(a^2/c, \bar{y})$ هى نقطة على الدليل الأيمن . عندئذ تكون معادلة وتر التماس المار بـ P هى $(b^2a^2/c)x + a^2\bar{y}y = a^2b^2$ ويمكن التحقق بسهولة من أن هذا الوتر يمر بالبؤرة $F(c, 0)$ المرافقة للدليل المذكور .

١٠ — أوجد زوايا التقاطع الحادة للمنحنيين (١) $y^2 = 4x$ و (٢) $2x^2 = 12 - 5y$.

(أ) إن نقطتى تقاطع المنحنيين هما $P_1(1, 2)$ و $P_2(4, -4)$

(ب) للمنحنى (١) تكون $y' = 2/y$ وللمنحنى (٢) تكون $y' = -4x/5$

وبذلك يكون عند النقطة $P_1(1, 2)$ ، $m_1 = -1/2$ و $m_2 = -4/5$ وعند النقطة $P_2(4, -4)$ $m_1 = -1/2$ و $m_2 = -16/5$.

(جـ) وعند النقطة P_1 نجد أن $\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \frac{1 + 4/5}{1 - 4/5} = 9$ و $\phi = 83^0 40'$ هى زاوية التقاطع الحادة
وعند النقطة P_2 نجد $\tan\phi = \frac{-1/2 + 16/5}{1 + 8/5} = 1.0385$ و $\phi = 46^0 5'$ هى زاوية التقاطع الحادة .

١١ — أوجد زوايا التقاطع الحادة للمنحنيين (١) $2x^2 + y^2 = 20$ و (٢) $4y^2 - x^2 = 8.$
إن نقط التقاطع هى $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$ و $(\pm 2\sqrt{2}, -2).$

وللمنحنى (١) تكون $y' = -2x/y$ وللمنحنى (٢) تكون $y' = x/4y$ وعند النقطة $(2\sqrt{2}, 2)$ نجد أن $m_1 = -2\sqrt{2}$ و $m_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

وحيث أن $m_1 m_2 = -1$ فإن زاوية التقاطع $\phi = 90^0$ (أى أن المنحنيين متعامدان) ونجد ، بالمثل ، أن المنحنيين متعامدان عند كل نقطة من نقط تقاطعهما .

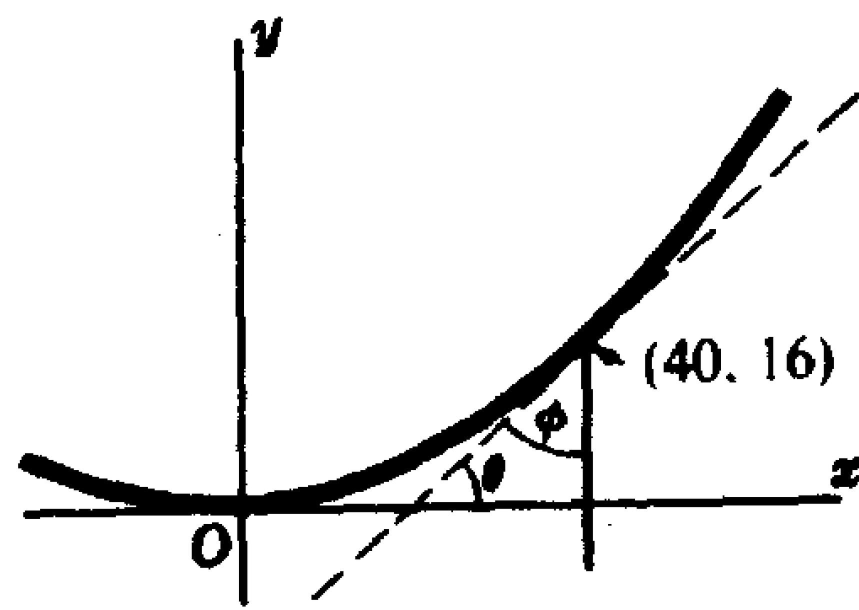
١٢ — يربط حبل بجسر معلق عند طرفيه بدعامتين البعد بينهما 80 m فإذا علق على شكل قطع مكافئ تقع أقل نقطة فيه على بعد 16 m من نقطتى التعلق فأوجد الزاوية بين الحبل والدعامة .

لنأخذ نقطة الأصل عند رأس القطع المكافئ . كما فى الشكل ٧ — ٤

إن معادلة القطع المكافئ هى $y = \frac{16}{1600}x^2$ ومنه $y' = \frac{x}{50}$

وعند النقطة $(40, 16)$ يكون $m = \frac{40}{50} = .8000$ وبالتالى $\theta = 38^0 40'$

والزاوية المطلوبة هى $\phi = 90^0 - \theta = 51^0 20'$.



شكل ٧ — ٤

١٣ — أوجد طول كل من تحت المماس وتحت العمودى والمماس والعمودى للمنحنى $xy + 2x - y = 5$ عند النقطة $(2, 1)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + y}{1 - x}$ وعند النقطة $(2,1)$ يكون $m = -3$.

وطول تحت المماس $= y_0/m = -1/3$ وطول تحت العمودى $= my_0 = -3$.
وطول المماس $= \sqrt{1/9+1} = \sqrt{10}/3$ وطول العمودى $= \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

مســـــائل اضـــــافية

١٤ – ابحث فى المماسات الأفقية والرأسية المنحنى $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$.

ج : مماسان أفقيان عند $(3, -3/2)$ و $(-3, 3/2)$ و مماسان رأسيان عند $(6, -3/4)$ و $(-6, 3/4)$

١٥ – أوجد معادلتى المماس والعمود المنحنى $x^2 - y^2 = 7$ عند النقطة $(4, -3)$

ج : $4x + 3y = 7;\ 3x - 4y = 24$

١٦ – عين النقاط التى يكون عندها المماس للمنحنى $y = x^2 + 5$ (أ) موازيا للمستقيم $12x - y = 17$ (ب) عموديا على المستقيم $x + 3y = 2$ ج : (أ) $(2, 13), (-2, -3)$; (ب) $(1, 6), (-1, 4)$

١٧ – أوجد معادلات المماسات المنحنى $9x^2 + 16y^2 = 52$ الموازية للمستقيم $9x - 8y = 1$ ج : $9x - 8y = \pm 26$

١٨ – أوجد معادلات المماسات للقطع الزائد $xy = 1$ المارة بالنقطة $(-1, 1)$.

ج : $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2;\ y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$

١٩ – بين أن معادلة المماس للقطع المكافئ $y^2 = 4px$ عند إحدى نقاطه $P(x_0, y_0)$ هى $y y_0 = 2p(x + x_0)$.

٢٠ – بين أن معادلتى المماسين للقطع الناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ واللذين ميلهما m هما $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

٢١ – بين أنه للقطع الزائد $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ تكون (أ) معادلة المماس عند إحدى نقاطه $P(x_0, y_0)$ هى $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ و (ب) معادلتا المماسين اللذين ميلهما m هما $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

٢٢ – بين أن العمودى على القطع المكافئ عند إحدى نقاطه P_0 ينصف الزاوية المحصورة بين نصف القطر البؤرى للنقطة P_0 والمستقيم الموازى لمحور القطع والمار بـ P_0 .

٢٣ – برهن أن أى مماس للقطع المكافئ ، باستثناء المماس عند الرأس يقطع الدليل والوتر البؤرى العمودى عند نقطتين متساويتى البعد عن البؤرة .

٢٤ – برهن أن الوتر الذى يصل نقط تماس مماسات قطع مكافئ بنقطة على دليله يمر بالبؤرة .

٢٥ – برهن أن العمودى على القطع الناقص عند أى نقطة P_0 منه ينصف الزاوية المحصورة بين نصفى القطرين البؤريين لـ P_0 .

٢٦ – برهن أن الوتر الذى يصل نقط تماس مماسات قطع زائد بنقطة على دليله يمر بالبؤرة المرافقة .

٢٧ – برهن أن نقطة تماس القطع الزائد تنصف جزء المماس المحصور بين الخطين المقاربين للقطع .

٢٨ – برهن أن ميل المماس عند أى طرف من طرفى الوتر البؤرى العمودى سواء للقطع الناقص أو القطع الزائد ، يساوى عدديا الاختلاف المركزى للقطع .

٢٩ – برهن أن (أ) مجموع ما يقطعه المماس للمنحنى $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ مع محورى الاحداثيات ثابت .
(ب) مجموع مربعى ما يقطعه المماس للمنحنى $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ مع محورى الاحداثيات ثابت .

٣٠ – أوجد زاوية التقاطع الحادة للدائرتين $x^2 - 4x + y^2 = 0$ و $x^2 + y^2 = 8.$ ج : 45°

٣١ – بين أن المنحنيين $y = 2x^2 + 2$ و $y = x^2 + 2$ مماسا مشتركا عند النقطة $(0, 2)$ وأنهما يتقاطعان عند $(2, 10)$ بزاوية $\phi = \text{Arc tan } 4/97$

٣٢ – بين أن القطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 45$ والقطع الزائد $x^2 - 4y^2 = 5$ متعامدان .

٣٣ – أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع المكافئ $y = 4x^2$ عند النقطة $(-1, 4)$ ثم احسب أطوال تحت المماس وتحت العمودى والمماس العمودى .
ج : $y + 8x + 4 = 0,\ 8y - x - 33 = 0;\ -\frac{1}{8},\ -32,\ \frac{1}{8}\sqrt{65},\ 4\sqrt{65}$

٣٤ – أوجد أطوال تحت المماس وتحت العمودى ، والمماس والعمودى ، للقطع الزائد $3x^2 - 2y^2 = 10$ عند النقطة $(-2, 1)$

ج : $-1/3,\ -3,\ \sqrt{10}/3,\ \sqrt{10}$

٣٥ – عند أى نقطة على المنحنى $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ يمر المماس عندها بنقطة الأصل ؟

ج $x = -3,\ -1,\ 3/4.$

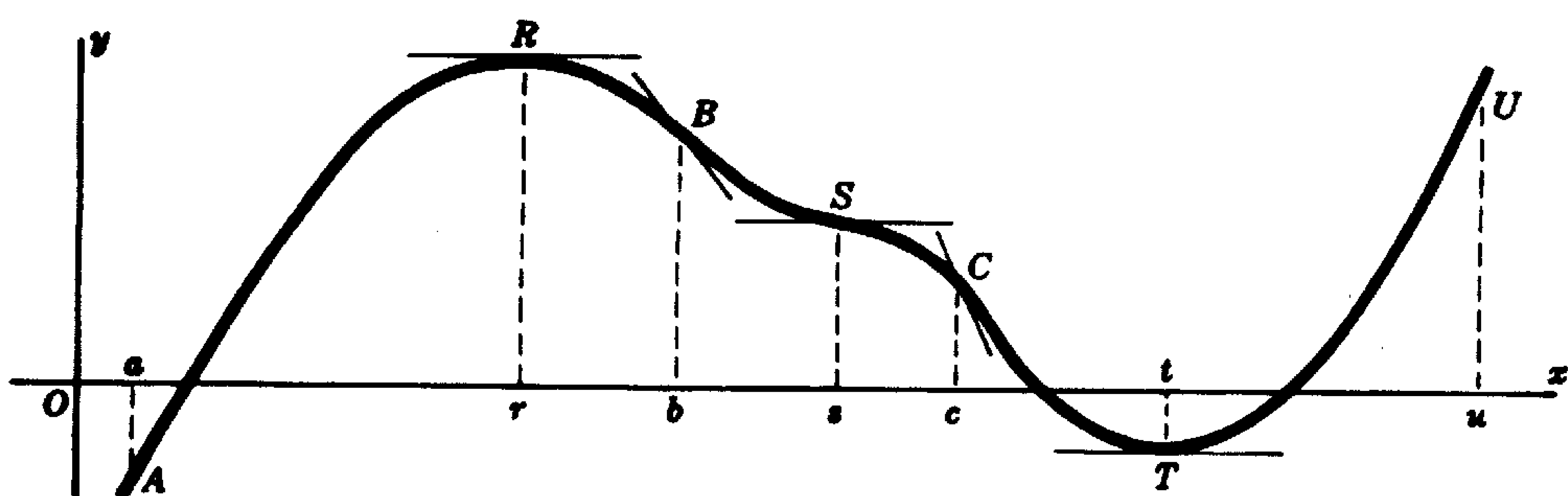
الفصل الثامن

القيم العظمى والصغرى

الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة : نقول عن دالة $f(x)$ إنها متزايدة عند $x = x_0$. إذا كان عند h الموجبة والصغيرة بقدر كاف ، $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$. ونقول عن دالة $f(x)$ إنها متناقصة عند $x = x_0$ إذا كان عند h ، الموجبة والصغيرة بقدر كاف $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

إذا كان $f'(x_0) > 0$ فإن $f(x)$ دالة متزايدة عند $x = x_0$ وإذا كان $f'(x_0) < 0$ فعندئذ تكون $f(x)$ دالة متناقصة عند $x = x_0$ (للبرهان انظر المسألة ١٧) . أما إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإننا نقول إن $f(x)$ مستقرة عند $x = x_0$.

ونقول عن دالة غير ثابتة إنها متزايدة (متناقصة) فى فترة ما إذا كانت متزايدة (متناقصة) أو مستقرة فى كل نقطة من نقط الفترة .



شكل ٨ — ١

فى الشكل ٨ - ١ المنحنى $y = f(x)$ صاعد (الدالة متزايدة) فى الفترتين $a < x < r$ و $t < x < u$. والمنحنى هابط (الدالة متناقصة) فى الفترة $r < x < t$. والدالة مستقرة عند $x = s, x = t$ و $x = r$ وللمنحنى مماسات أفقية عند النقط R, S, T وكثيرا ما نسمى قيم x (r, s, t) التى تكون عندها الدالة $f(x)$ مستقرة ($f'(x) = 0$) بالقيم الحرجة للدالة ونسمى النقط المقابلة (R, S, T) على المنحنى بالنقط الحرجة للمنحنى .

القيم العظمى والصغرى النسبية لدالة : نقول عن دالة $y = f(x)$ إن لها قيمة عظمى نسبية (صغرى نسبية) عند $x = x_0$ إذا كانت $f(x_0)$ أكبر (أصغر) من قيم الدالة السابقة واللاحقة مباشرة . انظر المسألة ١ .

النقطة $R[r, f(r)]$ فى الشكل ٨ - ١ هى نقطة قيمة عظمى نسبية للمنحنى لأن $f(x) < f(r)$ عند أى نقطة مجاوره صغيره بقدر كاف $0 < | x - r | < \delta$. وسنعتبر أن الدالة $y = f(x)$ قيمة عظمى نسبية (تساوى $f(r)$) عندما $x = r$. وإن النقطة $T[t, f(t)]$ على نفس الشكل هى نقطة قيمة صغرى نسبية لأن $f(x) > f(t)$ عند نقطة مجاورة

صغير بقدر كاف $\delta > |x - t| > 0$. وسنعتبر أن الدالة $y = f(x)$ قيمة صغرى نسبية (تساوى $f(t)$) عندما $x = t$. يلاحظ أن R تربط قوسا صاعدا AR ($f'(x) > 0$) بقوس هابط RB ($f'(x) < 0$) فى حين تربط T قوسا هابطا CT [$f'(x) < 0$] بقوس صاعد TU [$f'(x) > 0$] أما عند S فإنه يرتبط كل من القوسين الهابطين SC و BS والنقطة S ليست نقطة عظمى نسبية كما أنها ليست نقطة صغرى نسبية .

إذا كانت $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على $a \le x \le b$ وكان لـ $f(x)$ قيمة عظمى (صغرى) نسبية عند $x = x_0$ حيث $a < x_0 < b$ فعندئذ يكون $f'(x_0) = 0$ والبرهان المسألة ١٨ .

لإيجاد القيم العظمى (الصغرى) النسبية [سنطلق عليها من الآن قيما عظمى (صغرى)] لدالة $f(x)$ هى ومشتقتها الأولى مستمران :

اختبار المشتقة الأولى :

١ — حل المعادلة $f'(x) = 0$ لحصول على القيم الحرجة .

٢ — حدد مواضع القيم الحرجة على محور عددى مكونا بذلك عددا من الفترات .

٣ — حدد إشارة $f'(x)$ على كل فترة .

٤ — اجعل x تتزايد مارة بكل قيمة حرجة $x = x_0$ عندئذ

يكون لـ $f(x)$ قيمة عظمى نسبية (تساوى $f(x_0)$) إذا تغيرت $f'(x)$ من $+$ إلى $-$

يكون لـ $f(x)$ قيمة صغرى نسبية (تساوى $f(x_0)$) إذا تغيرت $f'(x)$ من $-$ إلى $+$

لا يكون لـ $f(x)$ قيمة عظمى وصغرى عند $x = x_0$ إذا لم تغير $f'(x)$ إشارتها .

انظر المسائل ٢ — ٥

يمكن لدالة $y = f(x)$، بالضرورة أقل بساطة من دوال التمارين ٢ — ٥ ، أن يكون لها قيمة عظمى أو صغرى [تساوى $f(x_0)$] مع أن $f'(x_0)$ ليست موجودة . نسمى أيضا القيم $x = x_0$ التى يكون عندها الدالة $f(x)$ معرفة ولكن مشتقتها $f'(x)$ غير موجودة بالقيم الحرجة للدالة . وينبغى أن نستعمل هذه القيم مع القيم التى عندها $f'(x) = 0$ لتحديد الفترات المذكورة فى الخطوة ٢ السابقة الذكر .

انظر المسائل ٦ — ٨

وهناك حالة أخيرة يكون فيها لـ $f(x_0)$ قيمة عظمى (صغرى) مع أنه لاتوجد فترة $x_0 - \delta < x < x_0$ تكون $f'(x)$ موجبة (سالبة) ولا توجد فترة $x_0 < x < x_0 + \delta$ تكون $f'(x)$ عليها سالبة (موجبة) . ولكننا سوف لا ندرس هذه الحالة هنا .

اتجاه الانحناء : نقول عن قوس من منحنى $y = f(x)$ إنه مقعر عند كل نقطة من نقطة إذا وقع القوس فوق مماسة عند تلك النقطة . عندما تتزايد x فإما أن تبقى $f'(x)$ محافظة على إشارتها وتكون متزايدة (كما هى الحال على الفترة $b < x < s$ فى الشكل ٨ — ١) أو أنها تغير إشارتها من السالبة إلى الموجبة (كما هى الحال على الفترة $c < x < u$) وفى كلا الحالتين يكون الميل $f'(x)$ متزايدا وتكون $f''(x) > 0$.

ونقول عن قوس منحنى $y = f(x)$ إنه مقعر لأسفل إذا وقع القوس ، عند كل نقطة من نقطة تحت مماسه عند تلك النقطة وهنا عندما تتزايد x إما أن تبقى $f'(x)$ محافظة على إشارتها ومتناقصة (كما هى الحال على الفترة $s < x < c$) أو أنهاتغير إشارتها من الموجبة إلى السالبة (كما هى الحال على الفترة $a < x < b$) . وفى كلا الحالتين يكون الميل $f'(x)$ متناقصا وتكون $f''(x) < 0$.

نقطة الانعطاف : هى نقطة يتغير المنحنى عندها من مقعر لأعلى إلى مقعر لأسفل أو بالعكس .

فى الشكل ٨ – ١ نقط الانعطاف هى B, S, C .

ويكون المنحنى $y = f(x)$ نقطة من نقطة $x = x_0$ كنقطة انعطاف له

إذا كانت $f''(x_0) = 0$ أو أنها غير معرفة .

إذا غيرت $f''(x)$ إشارتها عندما تتزايد x عبر $x = x_0$.

ويمكن أن نستبدل بالشرط الأخير الشرط $f'''(x_0) \neq 0$ عندما توجد $f'''(x_0)$.

انظر المسائل ٩ – ١٣

الاختبار الثانى للقيم العظمى والصغرى • اختبار المشتقة الثانية :

١ – حل المعادلة $f'(x) = 0$ لإيجاد القيم الحرجة :

٢ – عند القيمة الحرجة $x = x_0$ يكون :

لـ $f(x)$ قيمة عظمى (تساوى $f(x_0)$) إذا كانت $f''(x_0) < 0$

لـ $f(x)$ قيمة صغرى (تساوى $f(x_0)$) إذا كانت $f''(x_0) > 0$

ويفشل الاختبار إذا كانت $f''(x_0) = 0$ أو غير محددة .

وينبغى فى الحالة الأخيرة استعمال طريقة المشتقة الأولى .

انظر المسائل ١٤ – ١٦

مســـائل محلولة

١ – (ا) الدالة $y = -x^2$ قيمة عظمى نسبية (تساوى صفر) عند $x = 0$ لأن $y = 0$ عندما $x = 0$ و $y < 0$ عندما $x \neq 0$.

(ب) الدالة $y = (x - 3)^2$ قيمة صغرى نسبية (تساوى صفر) عند $x = 3$ لأن $y = 0$ عندما $x = 3$ و $y > 0$ عندما $x \neq 3$.

(جـ) الدالة $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ قيمة عظمى نسبية (تساوى 5) عند $x = 0$ لأن $y = 5$ عندما $x = 0$ و $y < 5$ عندما $-1 < x < 1$.

(د) ليس الدالة $y = \sqrt{x - 4}$ قيمة عظمى أو صغرى نسبية [يعرف بعض المؤلفين القيم العظمى (الصغرى) النسبية بحيث يكون لهذه الدالة قيمة صغرى نسبية عند $x = 4$. انظر المسألة ٣٠]

٢ – بفرض $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$, أوجد :

(ا) النقط الحرجة

(ب) الفترات التى تتزايد أو تتناقص فيها y

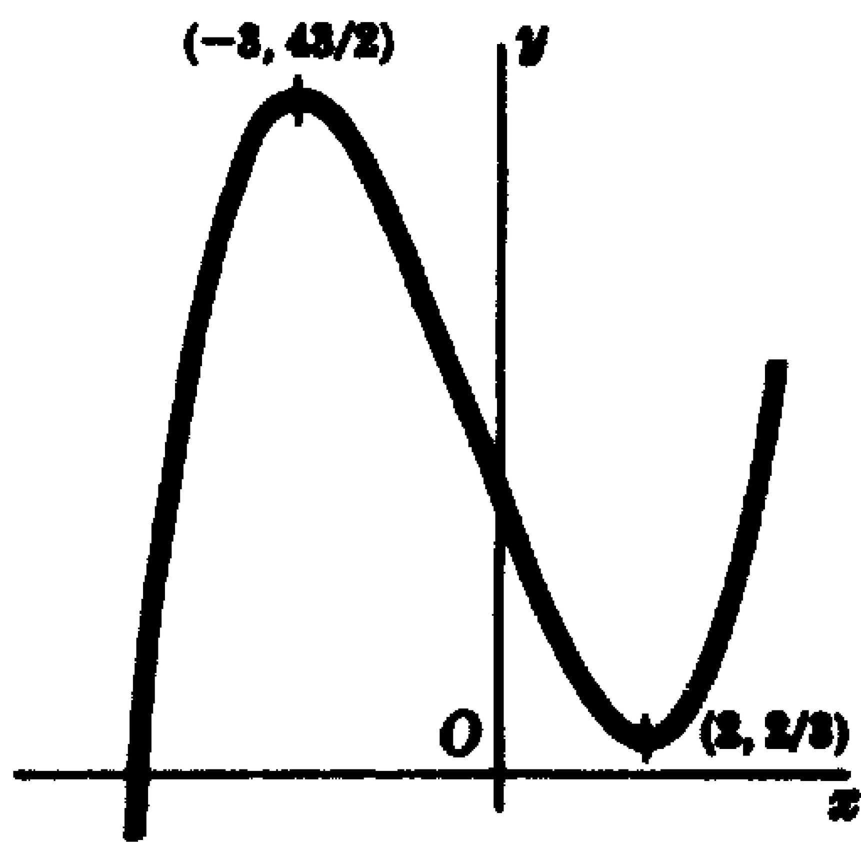
(جـ) القيم العظمى والصغرى لـ y

(ا) $y' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

بوضع $y' = 0$ نجد أن القيم الحرجة هى $x = -3, 2$

النقطتان الحرجتان هما $(2, 2/3)$ و $(-3, 43/2)$.

(ب) عندما تكون y' موجبة تتزايد y وعندما تكون y' سالبة تتناقص y . عندما $x < -3$ مثلا إذا أخذنا $x = -4$ فإن $y' = (-)(-) = +$ والدالة y متزايدة .



شكل ٨ — ٢

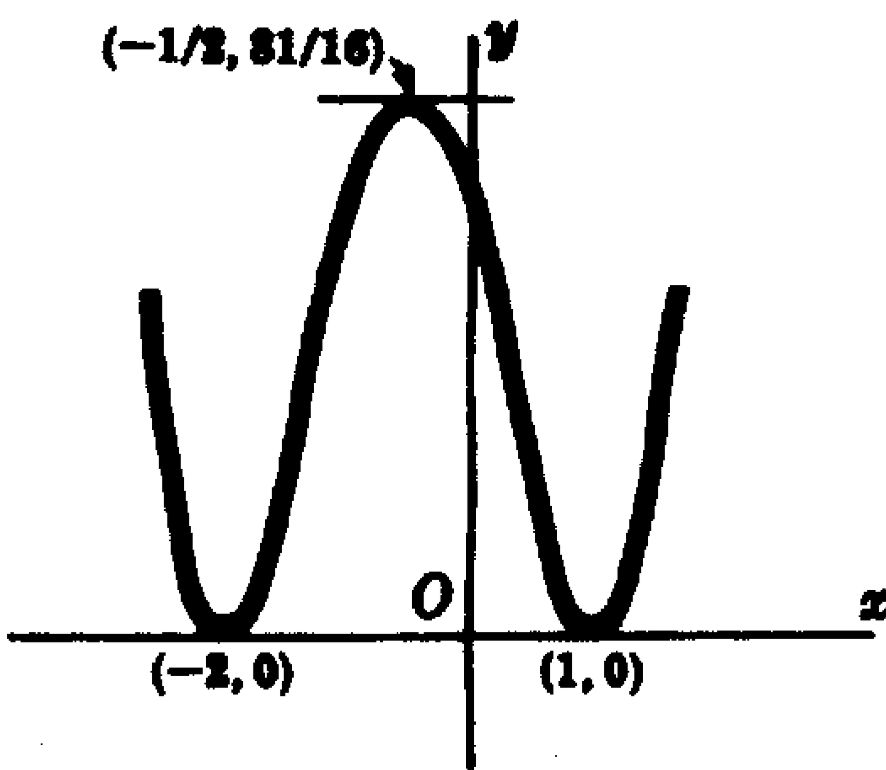
وعندما $2 > x > -3$ مثلا إذا أخذنا $x = 0$ فإن $y' = (+)(-) = -$ والدالة y متناقصة .
وعندما $x > 2$ مثلا إذا أخذنا $x = 3$ فإن $y' = (+)(+) = +$ والدالة y متزايدة .

ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالى

$x > 2$	$x = 2$ صغرى	$-3 < x < 2$	$x = -3$ عظمى	$x < -3$
$y' = +$ y متزايدة		$y' = -$ y متناقصة		$y' = +$ y متزايدة

(جـ) لنختبر القيمتين الحرجتين $x = -3, 2$ بحثا عن القيم العظمى والصغرى .
عندما تتزايد x مارة بـ -3 فإن y' تغير إشارتها من + إلى − وبالتالى فهناك قيمة عظمى $43/2$ عند $x = -3$.
وعندما تتزايد x مارة بـ 2 فإن y' تغير إشارتها من − إلى + وبالتالى فهناك قيمة صغرى $2/3$ عند $x = 2$.

٣ — بفرض $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, أوجد
(ا) الفترات التى تتزايد أو تتناقص فيها y .
(ب) القيم العظمى والصغرى لـ y



$$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x+2)(2x+1)(x-1)$$

بوضع $y' = 0$ نجد أن القيم الحرجة هى $x = -2, -½, 1$.
(ا) عندما $x < -2$ فإن $y' = 2(-)(-)(-) = -$, وتكون y متناقصة .
عندما $-2 < x < -½$ فإن $y' = 2(+)(-)(-) = +$, وتكون y متزايدة .
عندما $-½ < x < 1$ فإن $y' = 2(+)(+)(-) = -$, وتكون y متناقصة .
عندما $x > 1$ فإن $y' = 2(+)(+)(+) = +$, وتكون y متزايدة .

شكل ٨ — ٣

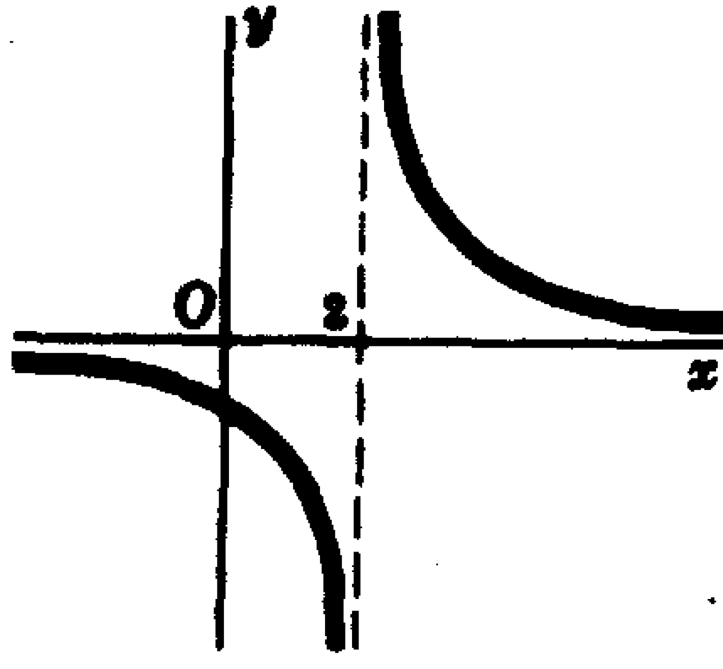
ويمكن توضيح ذلك بالرسم التالى

$x>1$	$x=1$ قيمة صغرى	$-½<x<1$	$x=-½$ قيمة عظمى	$-2<x<-½$	$x=-2$ قيمة صغرى	$x<-2$
$y' = +$ y متزايدة		$y' = -$ y متناقصة		$y' = +$ y متزايدة		$y' = -$ y متناقصة

(ب) لنختبر القيم الحرجة $x = -2, -½, 1$ بحثا عن القيم العظمى الصغرى .
عندما تتزايد x مارة بـ -2 فإن y' تغير إشارتها من − إلى + وبالتالى فإن لـ y قيمة صغرى 0 عند $x = -2$.
عندما تتزايد x مارة بـ $-½$ فإن y' تغير إشارتها من + إلى − وبالتالى فإن لـ y قيمة عظمى $81/16$ عند $x = -½$.
عندما تتزايد x مارة بـ 1 فإن y' تغير إشاراتها من − إلى + وبالتالى فإن لـ y قيمة صغرى 0 عند $x = 1$.

٤ — بين أنه ليس للمنحنى $y = x^3 - 8$ قيمة عظمى أو صغرى .
$y' = 3x^2$ وإذا وضعنا $y' = 0$ نجد القيمة الحرجة $x = 0$.
وسواء كان $x > 0$ أو $x < 0$ فإن $y' > 0$ وليس لـ y قيمة عظمى أو صغرى
ولكن المنحنى عند $x = 0$ نقطة انعطاف .

٥ — اختبر $y = f(x) = \frac{1}{x-2}$ للحصول على القيم العظمى والصغرى ، وحدد الفترات التى تكون فيها الدالة متزايدة ومتناقصة .

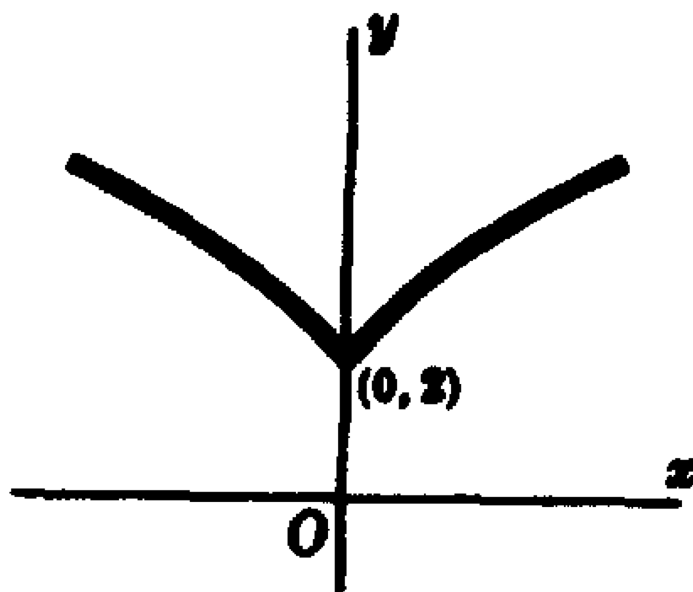


شكل ٨ — ٤

$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$ وحيث أن $f(2)$ غير معرفة . (أى أن $f(x)$ تصبح غير محددة عندما تقترب من 2) فإنه ليس هناك نقط حرجة ، ومع ذلك نستخدم $x = 2$ لتحديد فترات تزايد $f(x)$ وتناقصها .

$f'(x) < 0$ لجميع قيم $x \neq 2$. وبالتالى فإن $f(x)$ تتناقص فى الفترتين $x < 2$ و $x > 2$.

٦ — حدد القيم العظمى والصغرى للدالة $f(x) = 2 + x^{2/3}$ وحدد الفترات التى تتزايد أو تتناقص فيها .



شكل ٨ — ٥

$f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$ وهناك قيمة حرجة $x = 0$ حيث أن $f'(x)$ تصبح غير محددة عندما تقترب x من الصفر .

وعندما $x < 0$ تكون $f'(x) = -$ والدالة $f(x)$ متناقصة .

وعندما $x > 0$ تكون $f'(x) = +$ والدالة $f(x)$ متزايدة

أما عند $x = 0$ فللدالة قيمة صغرى تساوى 2 .

٧ — اختبر $y = x^{4/3}(1-x)^{1/3}$ للحصول على القيم العظمى والصغرى .

هنا $y' = \frac{x^{1/3}(4-5x)}{3(1-x)^{2/3}}$ والقيم الحرجة هى $x = 0, 4/5, 1$

وعندما $x < 0$ تكون $y' < 0$ وعندما $0 < x < 4/5$ تكون $y' > 0$.

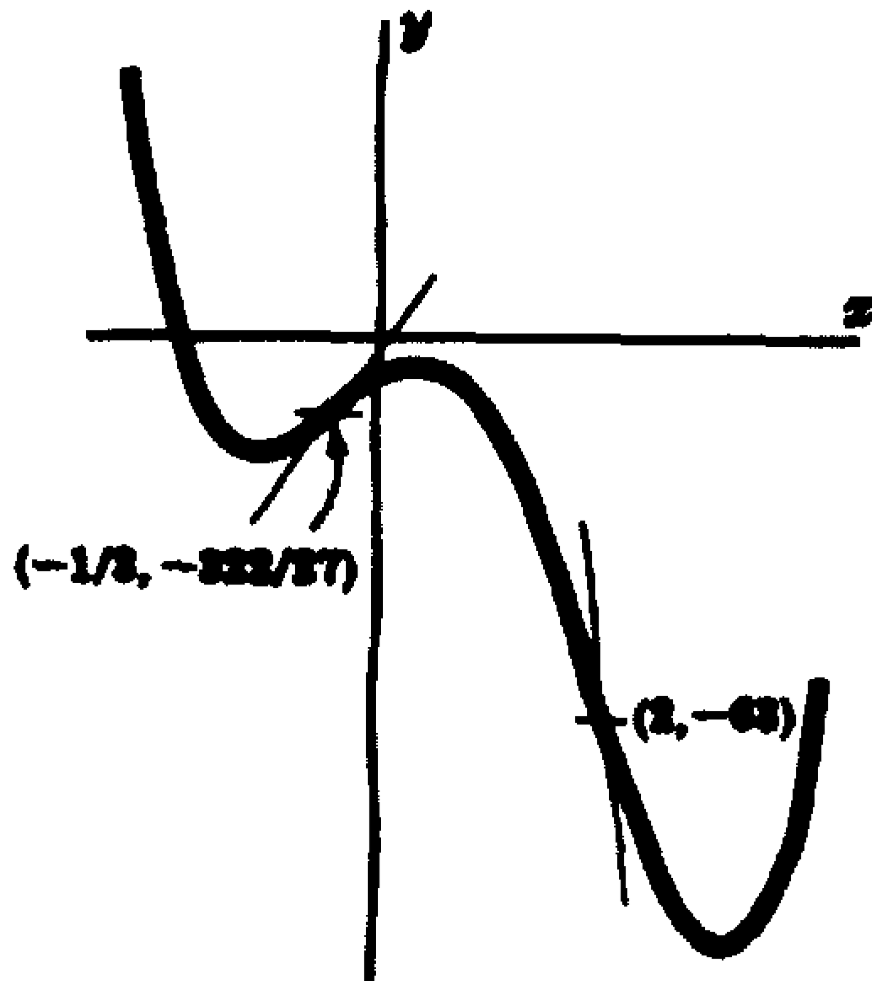
وعندما $4/5 < x < 1$ تكون $y' < 0$ وعندما $x > 1$ تكون $y' > 0$.

للدالة قيمة صغرى (تساوى صفر) عندما $x = 0$ وقيمة عظمى (تساوى $4/25\sqrt[3]{20}$) عندما $x = 4/5$.

٨ — اختبر $y = |x|$ للحصول على القيم العظمى والصغرى

إن الدالة معرفة فى كل مكان ولها مشتقة لجميع قيم x باستثناء $x = 0$ (انظر المسألة ١١ من الفصل الرابع) . وبهذا نجد أن $x = 0$ قيمة حرجة . وعندما تكون $x < 0$ نجد أن $f'(x) = -1$ بينما نجد $f'(x) = +1$ عندما $x > 0$ وللدالة قيمة صغرى (تساوى صفر) عندما $x = 0$. إن هذه النتيجة واضحة جدا من بيان الدالة .

٩ — اختبر $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$ لمعرفة اتجاه الانحناء ولتعيين نقط الانعطاف



شكل ٨ — ٦

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$
$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x+1)(x-2)$$

ضع $y'' = 0$ وحل هذه المعادلة تحصل على النقط التى يحتمل أن تكون نقط انعطاف وهى $x = -1/3, 2$.

وعندما $x < -1/3$ نجد $y'' = +$ والقوس مقعرا لأعلى .

وعندما $-1/3 < x < 2$ نجد $y'' = -$ والقوس مقعراً لأسفل .

وعندما $x > 2$ نجد $y'' = +$ والقوس مقعراً لأعلى .

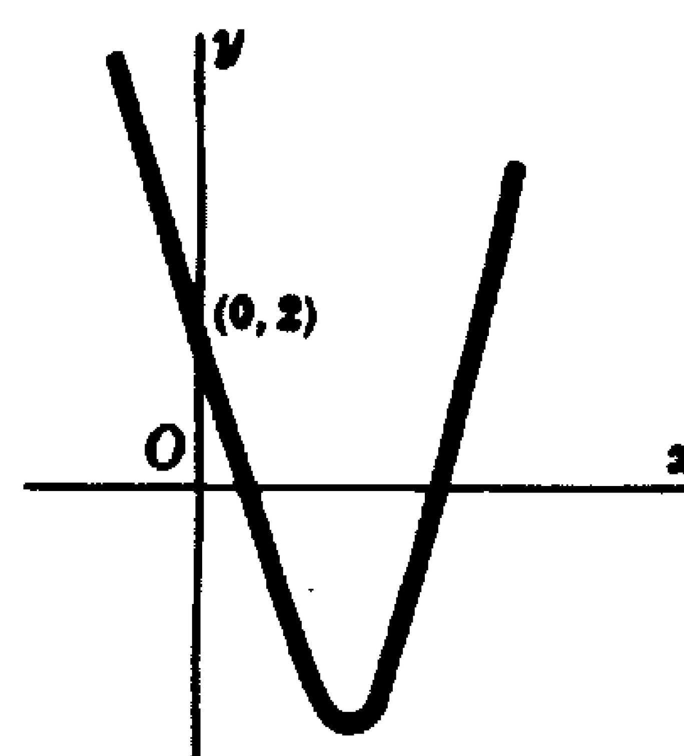
$x > 2$	$x = 2$	$-1/3 < x < 2$	$x = -1/3$	$x < -1/3$
$y'' = +$ التقعر لأعلى		$y'' = -$ التقعر لأسفل		$y'' = +$ التقعر لأعلى

نقط الانعطاف هى $(-1/3, 322/27)$ و $(2, -63)$ لأن y'' تغير إشارتها عند كل من $x = 2, x = -1/3$.

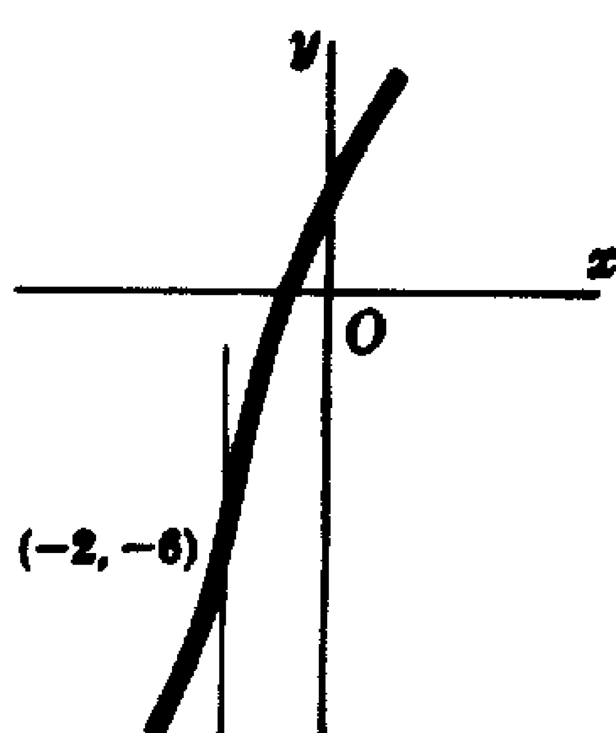
١٠ – اختبر $y = x^4 - 6x + 2$ لتحصل على اتجاه الانحناء ونقط الانعطاف . انظر الشكل ٨ – ٧ .

$y'' = 12x^2$ ونقطة الانعطاف الممكنة هى عند $x = 0$.

وحيث أننا نجد $y'' = +$ على كل من الفترتين $x < 0$ و $x > 0$ فالقوسان مقعران لأعلى . والنقطة $(0, 2)$ ليست نقطة انعطاف .



شكل ٨ — ٧



شكل ٨ — ٨

١١ – اختبر $y = 3x + (x+2)^{3/5}$ لمعرفة اتجاه الانحناء ونقط الانعطاف . انظر الشكل ٨ –٨ .

$$y' = 3 + \frac{3}{5(x+2)^{2/5}} \qquad y'' = \frac{-6}{25(x+2)^{7/5}}$$

ونقطة الانعطاف الممكنة هى عند $x = -2$.

ولكن عندما $x > -2$ فإن $y'' = -$ والقوس مقعر لأسفل .

وعندما $x < -2$ فإن $y'' = +$ والقوس مقعر لأعلى والنقطة $(-2, -6)$ نقطة انعطاف .

١٢ – أوجد معادلات المماسات عند نقط الانعطاف للمنحنى

$$y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$$

توجد نقطة انعطاف عند $x = x_0$ عندما $f''(x_0) = 0$ و $f'''(x_0) \neq 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$
$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$
$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x-3)$$

ونقطتا الانعطاف الممكنتان هما عند $x = 1, 2$. وبما أن $f'''(2) \neq 0, f'''(1) \neq 0$

فالنقطتان $(1, -1)$ و $(2, 0)$ هما نقطتا انعطاف .

وبما أن الميل عند $(1, -1)$ هو $m = f'(1) = 2$ فمعادلة المماس تكون .

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{أو} \quad y + 1 = 2(x-1) \quad \text{أو} \quad y = 2x - 3$$

والميل عند $(2, 0)$ هو $f'(2) = 0$ ومعادلة المماس هى $y = 0$.

١٣ – بين أن نقط انعطاف $y = \frac{a-x}{x^2+a^2}$ تقع على خط مستقيم ثم أوجد معادلته .

$y' = \frac{x^2-2ax-a^2}{(x^2+a^2)^2}$ و $y'' = -2\frac{x^3-3ax^2-3a^2x+a^3}{(x^2+a^2)^3}$

الآن $x^3-3ax^2-3a^2x+a^3 = 0$ عندما $x = -a$ و $a(2 \pm \sqrt{3})$ ونقط الانعطاف هي :

$(-a, 1/a)$, $(a(2+\sqrt{3}), (1-\sqrt{3})/4a)$, $(a(2-\sqrt{3}), (1+\sqrt{3})/4a)$. إن ميل المستقيم الواصل بين أى نقطتين من هذه النقط يساوى $-1/4a^2$ ومعادلة مستقيم نقط الانعطاف هو $x + 4a^2y = 3a$.

١٤ – اختبر $f(x) = x(12-2x)^2$ لحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدما طريقة المشتقة الثانية .

(أ) $f'(x) = 12(x^2-8x+12) = 12(x-2)(x-6)$. والقيم الحرجة هى $x = 2, 6$.

(ب) $f''(x) = 12(2x-8) = 24(x-4)$.

(ج) إن $f''(2) < 0$ وبالتالى فالدالة $f(x)$ قيمة عظمى 128 عند $x = 2$.

وإن $f''(6) > 0$ وبالتالى فالدالة $f(x)$ قيمة صغرى 0 عند $x = 6$.

١٥ – اختبر $y = x^2 + \frac{250}{x}$ لحصول على القيم العظمى والصغرى مستخدما طريقة المشتقة الثانية .

(أ) $y' = 2x - \frac{250}{x^2} = \frac{2(x^3-125)}{x^2}$ والقيمة الحرجة هى $x = 5$.

(ب) $y'' = 2 + \frac{500}{x^3}$

(ج) إن $y'' > 0$ عند $x = 5$ والدالة y قيمة صغرى 75 عند $x = 5$.

١٦ – اختبر $y = (x-2)^{2/3}$ لحصول على القيم العظمى والصغرى .

(أ) $y' = \frac{2}{3}(x-2)^{-1/3} = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$ والقيمة الحرجة هى $x = 2$.

(ب) $y'' = -\frac{2}{9}(x-2)^{-4/3} = -\frac{2}{9(x-2)^{4/3}}$

(ج) إن y'' تصبح غير محددة عندما تقترب x من 2 إذن فالاختبار فاشل .

وباستخدام طريقة المشتقة الأولى . فإن $y' = -1$ عندما $x = 2$ و $y' = +$ عندما $x > 2$ وبهذا نجد أن ل y قيمة صغرى نسبية 0 عند $x = 2$.

١٧ – أثبت أن الدالة $f(x)$ متزايدة عند $x = x_0$ إذا كان ، من أجل h الموجبة والصغيرة بقدر كاف .

$$f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h).$$

إذا كان $f'(x_0) > 0$ فإن $f(x)$ متزايدة عند $x = x_0$.

لأنه إذا كان $f'(x_0) > 0$, $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ فإن $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$

من أجل قيم $|\Delta x|$ الصغيرة بقدر كاف وذلك استنادا إلى المسألة ٤ من الفصل الثالث .

وإذا كان $\Delta x < 0$ فإن $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ وبوضع $\Delta x = -h$ نجد :

$f(x_0 - h) < f(x_0)$ أما إذا كان $\Delta x > 0$ ولنضع $\Delta x = h$ مثلا فإنه يكون $f(x_0 + h) > f(x_0)$ وبالتالى $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$ كما هو مطلوب فى التعريف . أنظر المسألة ٣٣ من أجل نظرية مرافقة .

١٨ – أثبت أنه إذا كانت $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق على $a \leq x \leq b$ وإذا كان $f(x)$ قيمة عظمى نسبية عند $x = x_0$ حيث $a < x_0 < b$ فإن $f'(x_0) = 0$.

بما أن لـ $f(x)$ قيمة عظمى نسبة عند $x = x_0$ فإنه لجميع Δx بحيث $|\Delta x|$ صغير بقدر كاف ، يكون :

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \quad \text{و} \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

والآن عندما $\Delta x < 0$ فإن $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ و $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$

كذلك عندما $\Delta x > 0$ فإن $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ و $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$

وهكذا يكون $0 \leq f'(x_0) \leq 0$ و $f'(x_0) = 0$ وهو المطلوب إثباته . أنظر المسألة ٣٤ من أجل نظرية مرافقة .

١٩ – أثبت اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى : إذا كان كل من $f(x)$ و $f'(x)$ قابلا للاشتقاق على $a \leq x \leq b$ وكانت $x = x_0$ حيث $a < x_0 < b$ قيمة حرجة لـ $f(x)$ وكانت $f''(x_0) > 0$ فإن لـ $f(x)$ قيمة صغرى نسبية عند $x = x_0$.

بما أن $f''(x_0) > 0$ فإن $f'(x)$ متزايدة عند $x = x_0$ وبالتالي فإنه يوجد عدد $h > 0$ بحيث يكون $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. وهكذا إذا كانت x قريبة من x_0 ولكن أصغر منها فإن $f'(x) < f'(x_0)$.
أما إذا كانت x قريبة من x_0 ولكن أكبر منها فإن $f'(x) > f'(x_0)$ والآن نستطيع القول إنه بما أن $f'(x_0) = 0$ و $f'(x) < 0$ عندما $x < x_0$ و $f'(x) > 0$ عندما $x > x_0$ فإن الشروط (أنظر المسألة ١٨) التي تضمن وجود قيمة صغرى لـ $f(x)$ عند $x = x_0$ محققة . نترك للقارىء أن يبرهن النظرية المرافقة في حالة القيمة العظمى النسبية .

٢٠ – لننظر في مسألة البحث عن نقطة (X, Y) على القطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ التي هي أقرب ما يمكن من نقطة مفروضة $P(a, 0)$ حيث $a > 0$. إن مربع البعد بين النقطتين هو $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$ ثم إن $X^2 - Y^2 = 1$ لوقوع النقطة (X, Y) على القطع الزائد .
فإذا عبرنا عن D^2 بدلالة X فقط نجد أن :

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

حيث $X = \frac{1}{2}a$ هي القيمة الحرجة الوحيدة .
لنأخذ $a = \frac{1}{2}$ فعندئذ لا نجد أي نقطة تحقق المطلوب لأن Y تخيلية للقيمة الحرجة $X = \frac{1}{4}$ غير أنه يتضح من الشكل أن أقرب نقطة على القطع للنقطة $P(\frac{1}{4}, 0)$ هي النقطة $V(1, 0)$. وسبب الإشكال هنا هو تجاوزنا الحقيقة لأنه كان ينبغي في هذه الحالة أن نبحث عن القيمة الصغرى للدالة $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$ ضمن القيمة $X \geq 1$ (نلاحظ أن هذا الشرط لم ينشأ عن الدالة $f(X)$ نفسها . فللدالة $f(X)$ دون وجود قيود على X قيمة صغرى نسبية عند $X = \frac{1}{4}$) أما في الفترة $X \geq 1$ فللدالة $f(X)$ قيمة صغرى مطلقه عند الطرف $X = 1$ دون أن يكون لها قيمة صغرى نسبية . نترك كتمرين البحث في الحالتين (i) $a = \sqrt{2}$ و (ii) $a = 3$.

مســـــائل اضـــــافية

٢١ – اختبر كل دالة في المسألة ١ وحدد فترات تزايد الدالة وتناقصها .

ج : (ا) تزايد $x > 0$ تناقص $x < 0$ (ب) تزايد $x < 3$ تناقص $x > 3$ (جـ) تزايد $-5/2 < x < 0$ تناقص $0 < x < 5/2$ (د) تزايد $x > 4$.

٢٢ – (ا) بين أن الدالة $y = x^5 + 20x - 6$ متزايدة لجميع قيم x .
(ب) بين أن الدالة $y = 1 - x^3 - x^7$ متناقصة لجميع قيم x .

٢٣ – اختبر كلا من الدوال التالية لحصول على القيم العظمى والصغرى مستعملا طريقة المشتقة الأولى . :

(أ) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ ج : قيمة صغرى نسبية $= -4$ عند $x = -1$

(ب) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ ج : قيمة عظمى نسبية $= 4$ عند $x = 1$

(جـ) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ ج : قيمة صغرى نسبية $= -256/27$ عند $x = 2/3$
قيمة عظمى نسبية $= 0$ عند $x = -2$

(د) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ ج : قيمة عظمى نسبية $= -4$ عند $x = 1$
قيمة صغرى نسبية $= -8$ عند $x = 3$

(هـ) $f(x) = (2 - x)^3$ ج : لا يوجد أية قيمة عظمى أو صغرى

(و) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ ج : قيمة عظمى نسبية $= 16$ عند $x = 0$
قيمة صغرى نسبية $= 0$ عند $x = \pm 2$

(ز) $f(x) = (x - 4)^4 (x + 3)^3$ ج : قيمة عظمى نسبية $= 69/2$ عند $x = 0$
قيمة صغرى نسبية $= 0$ عند $x = 4$
لا قيمة عظمى ولاقيمة صغرى عند $x = -3$

(ح) $f(x) = x^2 + 48/x$ ج : قيمة عظمى نسبية -32 عند $x = -2$
قيمة صغرى نسبية $= 32$ عند $x = 2$

(ط) $f(x) = (x - 1)^{1/3} (x + 2)^{2/3}$ ج : قيمة عظمى نسبية $= 0$ عند $x = -2$
قيمة صغرى نسبية $= -\sqrt[3]{4}$ عند $x = 0$
لا قيمة عظمى ولا قيمة صغرى عند $x = 1$

٢٤ – اختبر دوال المسألة ٢٣ (أ) – (و) لحصول على القيم العظمى والقيم الصغرى باستخدام طريقة المشتقة الثانية . عين كذلك نقط الانعطاف والفترات التي تكون عندها الدالة مقعرة لأعلى والفترات التي عندها الدالة مقعرة لأسفل .

ج (أ) لا يوجد نقطة انعطاف . التقعر لأعلى باستمرار .
(ب) لا يوجد نقطة انعطاف . التقعر لأسفل باستمرار .
(جـ) نقطة انعطاف $x = -2/3$. التقعر لأعلى $x > -2/3$ والتقعر لأسفل $x < -2/3$.
(د) نقطة انعطاف $x = 2$. التقعر لأعلى $x > 2$ التقعر لأسفل $x < 2$.
(هـ) نقطة انعطاف $x = 2$. التقعر لأسفل $x > 2$ التقعر لأعلى $x < 2$.
(و) نقطة الانعطاف $x = \pm 2\sqrt{3}/3$. التقعر لأعلى $x > 2\sqrt{3}/3$ و $x < -2\sqrt{3}/3$.
التقعر لأسفل $-2\sqrt{3}/3 < x < 2\sqrt{3}/3$

٢٥ – بين أنه لا يوجد للدالة $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ قيمة عظمى نسبية أو قيمة صغرى نسبية .

٢٦ – اختبر $y = x^3 - 3px + q$ لحصول على القيم العظمى والصغرى النسبية .
ج : قيمة صغرى $= q - 2p^{3/2}$ وقيمة عظمى $= q + 2p^{3/2}$ بشرط $p > 0$ وخلاف ذلك لا توجد قيم عظمى أو صغرى .

٢٧ – بين أن لـ $y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$ قيمة صغرى نسبية عندما
$x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n.$

٢٨ – أثبت أنه إذا كانت $f''(x_0) = 0$ و $f'''(x_0) \neq 0$ فعندئذ توجد نقطة انعطاف عند $x = x_0$.

٢٩ – أثبت أنه إذا كانت $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ لها نقطتان حرجتان فإن نقطة الانعطاف تقع فى منتصف المسافة بينهما . وإذا كان المنحنى نقطة حرجة واحدة فإنها تكون نقطة انعطاف .

٣٠ – نقول إن لدالة $f(x)$ قيمة عظمى (صغرى) مطلقة عند $x = x_0$ إذا كان $f(x_0)$ أكبر (أصغر) من أية قيمة أخرى (أو مساوية لها) يمكن أن تأخذها الدالة على مجال التعريف . استخدم الأشكال (البيانية) لتوضح أن (ا) الدالة $y = -x^2$ قيمة عظمى مطلقة عند $x = 0$ (ب) الدالة $y = (x - 3)^2$ قيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند $x = 3$ (جـ) الدالة $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ قيمة عظمى مطلقة (تساوى 5) عند $x = 0$. وقيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند $x = \pm 5/2$ (د) الدالة $y = \sqrt{x - 4}$ قيمة صغرى مطلقة (تساوى صفر) عند $x = 4$.

٣١ – ابحث فى القيم العظمى والصغرى المطلقة فى الفترات المذكورة فقط .

(ا) $y = -x^2$ على $-2 < x < 2$ ج : قيمة عظمى $(= 0)$ عند $x = 0$.

(ب) $y = (x - 3)^2$ على $0 \le x \le 4$ قيمة عظمى $(= 9)$ عند $x = 0$ قيمة صغرى (0) عند $x = 3$.

(جـ) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ على $-2 \le x \le 2$ ج : قيمة عظمى $(= 5)$ عند $x = 0$ قيمة صغرى $(= 3)$ عند $x = \pm 2$.

(د) $y = \sqrt{x - 4}$ على قيمة عظمى $4 \le x \le 29$ ج : قيمة عظمى $(= 5)$ عند $x = 29$ قيمة صغرى $(= 0)$ عند $x = 4$.

ملاحظة : إن هذه القيم هى القيم العظمى والصغرى المنوه عنها فى الخاصية II الفصل الثالث للدوال المستمرة .

٣٢ – تحقق من أن الدالة $f(x)$ متزايدة (متناقصة) عند $x = x_0$ إذا كانت زاوية ميل المماس عند $x = x_0$ للمنحنى $y = f(x)$ زاوية حادة (منفرجة) .

٣٣ – أذكر مع البرهان مرافقة المسألة ١٧ للدالة المتناقصة .

٣٤ – أذكر مع البرهان مرافقة المسألة ١٨ للقيمة الصغرى النسبية .

٣٥ – اختبر $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$ للحصول على النقط العظمى والصغرى .
ج : عظمى عند $(5, 3)$ وصغرى عند $(-1, -3)$

٣٦ – عند مرور تيار كهربائى فى ملف دائرى نصف قطره r فإنه يؤثر بقوة $F = \frac{kx}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$ على مغناطيس صغير موضوع على مسافة x أعلى مركز الملف . بين أن قيم F تكون أكبر ما يمكن عندما $x = \frac{1}{2} r$.

٣٧ – إذا كان الشغل المبذول بوساطة خلية ڤلتائية ، ذات قوة دافعة كهربائية ثابتة E ومقاومة داخلية ثابتة r ، لإمرار تيار منتظم خلال مقاومة خارجة R يتناسب مع $E^2 R / (r + R)^2$ فأثبت أن الشغل المبذول يكون أكبر ما يمكن عندما $R = r$.

الفصل التاسع

مسائل تطبيقية للقيم العظمى والصغرى

مسائل فى القيم العظمى والصغرى :

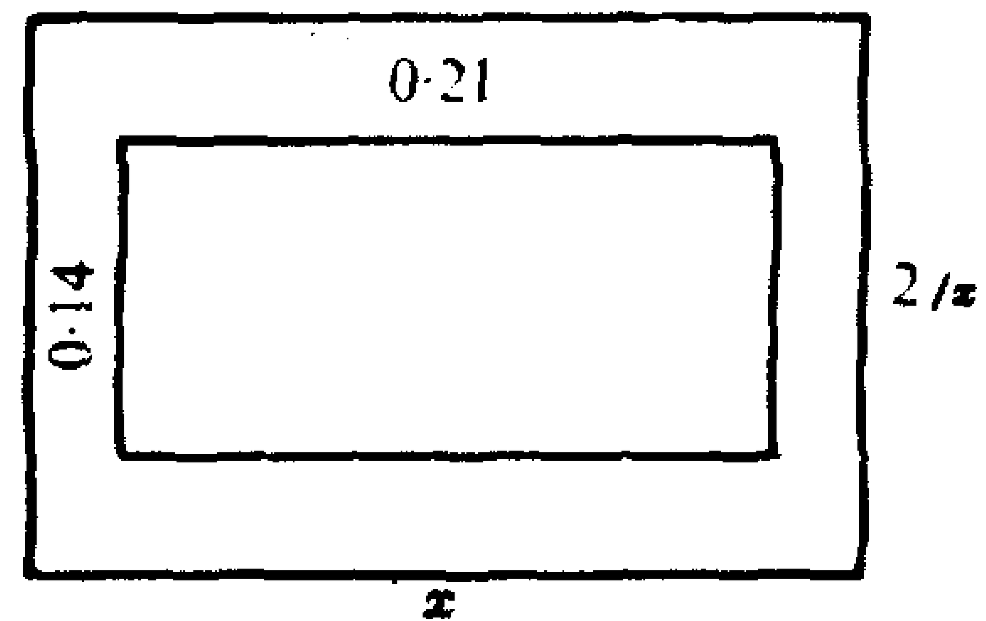
ليس من الضرورى فى التطبيقات البسيطة البحث عن القيم العظمى والصغرى النسبية ، حيث يتم الاختيار المناسب القيم الحرجة من دراسة التمرين نفسه .

ومن الممكن فى الوقت ذاته أن تكون القيم العظمى أو الصغرى النسبية قيما عظمى أو صغرى مطلقة (أى أن تكون أكبر وأصغر قيمة) للدالة . فى مثل هذه الحالات تكون العبارات أكبر ما يمكن . . . . إلخ مبررة فى نص التمرين .

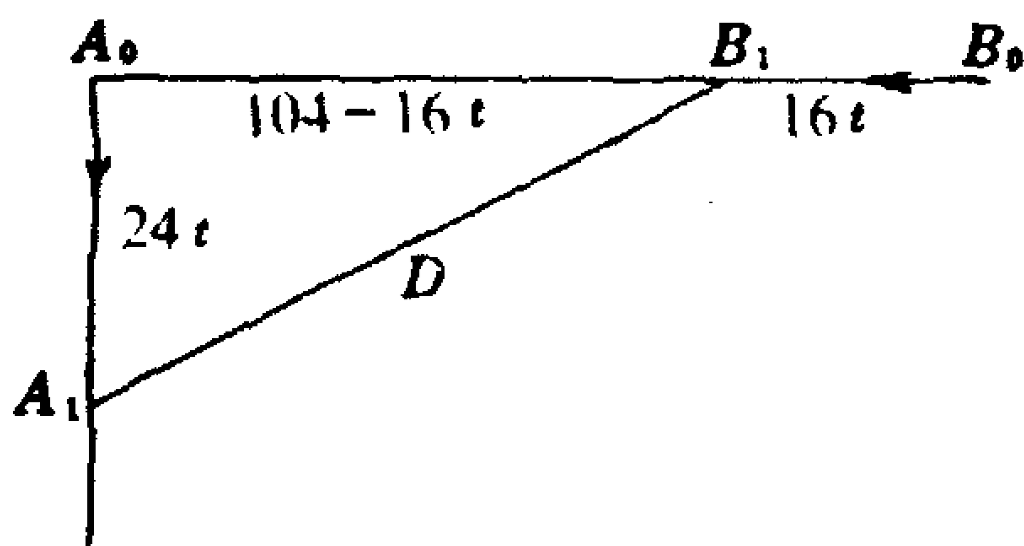
مســـــائل محلولة

١ - قسم العدد 120 إلى عددين بحيث يكون حاصل الضرب P لأحدهما بمربع الآخر أكبر ما يمكن .
ليكن x أحد العددين فيكون $120 - x$ هو العدد الآخر ويكون $P = (120 - x)x^2$
وبالتالى $dP/dx = 3x\,(80 - x)$ والقيم الحرجة هى $x = 0$ و $x = 80$.
ومن الواضح أن القيمة الحرجة $x = 0$ مرفوضة . والعددين المطلوبين هما $x = 80$ و $120 - x = 40$.

٢ - مساحة قطعة من ورق الإعلانات تساوى $2\ m^2$. فإذا كانت الهوامش المطلوبة من أعلى الورقة وأسفلها 21 cm وعلى الجانبين 14 cm ، فما هما بعدا قطعة الورق كى تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن ؟
ليكن x طول الإعلان فيكون $2/x$ عرضها بالأمتار ، أنظر الشكل ٩ - ١
وتكون المساحة المطبوعة هى $A = (x - 0.28)\left(\frac{2}{x} - 0.42\right)\ m^2$.
إذن $\frac{dA}{dx} = \frac{0.56}{x^2} - 0.42$ وبحل المعادلة $\frac{dA}{dx} = 0$ نجد القيمة الحرجة $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
والبعدان المطلوبان لقطعة الورق هما $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ m و $\frac{2}{x} = \sqrt{3}$ m .



شكل ٩ — ١



شكل ٩ — ٢

٣ – كانت الباخرة B فى الساعة التاسعة صباحا على بعد 104 km إلى الشرق تماما بالنسبة لباخرة أخرى A. وكانت B مبحرة نحو الغرب تماما بسرعة 16 km/hr أما A فكانت مبحرة نحو الجنوب تماما بسرعة 24 km/hr ، فإذا استمرتا وفق البرنامج الموصوف فتى تكونان أقرب ما يمكن من بعضهما وعلى أى بعد ؟ أنظر الشكل ٩ – ٢ .

لنفرض A_0 و B_0 موضعى الباخرتين فى الساعة التاسعة صباحا و A_1 و B_1 موضعيها بعد t ساعة . فتكون المسافة المقطوعة خلال t ساعة بالباخرة A هى $24t$ km وبالباخرة B هى $16t$ km .

والمسافة D بين الباخرتين تعطى بالعلاقة $D^2 = (24t)^2 + (104 - 16t)^2$.

وبالتالى $\frac{dD}{dt} = \frac{832t - 1664}{D}$ وبحل المعادلة $\frac{dD}{dt} = 0$ نجد القيمة الحرجة $t = 2$ التى تعطى أقل قيمة ممكنة لـ D بوضع $t = 2$ فى $D^2 = (24t)^2 + (104 - 16t)^2$ نجد $D = 24\sqrt{13}$ km والباخرتان تكونان أقرب ما يمكن من بعضهما فى الساعة الحادية عشرة صباحا وتكون المسافة بينهما فى ذلك الوقت هى $24\sqrt{31}$ km .

٤ – وعاء اسطوانى قاعدته دائرية الشكل وحجمه 1000 cm^3 . أوجد أبعاده بحيث تكون كية المعدن اللازمة لصنعه (أى مساحته السطحية) أصغر ما يمكن وذلك فى الحالتين (أ) الوعاء مفتوح من قاعدته العليا (ب) الوعاء مغلق .

لنفرض أن r ، h هما نصف قطر القاعدة والارتفاع مقدرين بالسنتيمترات على الترتيب ولتكن A كية المعدن و V حجم الوعاء .

(أ) $V = \pi r^2 h = 1000$ و $A = 2\pi rh + \pi r^2$.

التعبير عن A بدلالة متغير واحد ينبغى أن نحل العلاقة الأولى بالنسبة لـ h (حيث أنها الأسهل) ثم نعوض فى الثانية فنحصل على $A = 2\pi r(1000/\pi r^2) + \pi r^2 = 2000/r + \pi r^2$.

، $\frac{dA}{dr} = -\frac{2000}{r^2} + 2\pi r = \frac{2(\pi r^3 - 1000)}{r^2}$ والقيمة الحرجة هى $r = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$

وبالتالى $h = 1000/\pi r^2 = 10/\sqrt[3]{\pi}$. إذن $r = h = 10/\sqrt[3]{\pi}$ cm

(ب) $V = \pi r^2 h = 1000$ و $A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(1000/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 2000/r + 2\pi r^2$.

، $\frac{dA}{dr} = -\frac{2000}{r^2} + 4\pi r = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$ والقيمة الحرجة هى $r = 5\sqrt[3]{4/\pi}$

وبالتالى فإن $h = 1000/\pi r^2 = 10\sqrt[3]{4/\pi}$. إذن $h = 2r = 10\sqrt[3]{4/\pi}$ cm.

٥ – إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج x جهاز راديو يوميا تساوى $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ دولارا والسعر الذى يمكن أن يباع به الجهاز الواحد $(50 - \frac{1}{2}x)$ دولارا .

(أ) فكم ينبغى أن يكون الإنتاج اليومى لنحصل على أكبر ربح كلى ممكن ؟

(ب) بين أن تكلفة الإنتاج هى صغرى نسبيا .

(أ) إن الربح من بيع x جهاز فى اليوم يساوى $P = x(50 - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$.

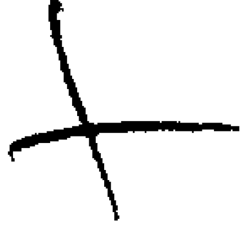
$\frac{dP}{dx} = 15 - \frac{3x}{2}$ بحل المعادلة $dP/dx = 0$ نجد القيمة الحرجة $x = 10$.

والإنتاج الذى يعطى ربحا أكبر ما يمكن هو 10 أجهزة يوميا .

(ب) تكلفة الإنتاج هى $C = \frac{\$(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)}{x} = \$\left(\frac{1}{4}x + 35 + \frac{25}{x}\right)$.

$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{4} - \frac{25}{x^2}$ وبحل المعادلة $dC/dx = 0$ نجد $x = 10$ والتكلفة صغرى .

٦ ــ إذا كانت نفقات الوقود لقاطرة متحركة تتناسب مع مربع السرعة ولتكن 25 دولارا فى الساعة . لسرعة 40 km/hr وإذا كانت هناك نفقات أخرى تقدر بـ 100 دولار فى الساعة مهما كانت السرعة فأوجد السرعة التى تجعل النفقات لكل كيلو متر أقل ما يمكن .



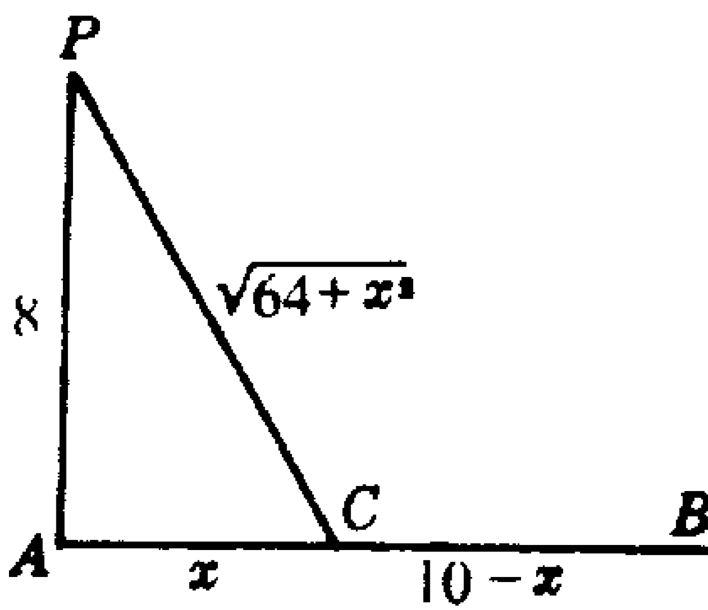
لتكن v السرعة المطلوبة و C النفقات الكلية لكل كيلومتر .

فتكون نفقات الوقود فى كل ساعة kv^2 حيث k ثابت ينبغى تعيينه عندما $v = 40$ km/hr و $k\,v^2 = 1600\,k = 25$

إذن $k = 1/64$ وتكون النفقات (مقدرة بالدولار / كم) = $\dfrac{\text{النفقات مقدرة بالدولار / ساعة}}{\text{السرعة مقدرة بـ كم / ساعة}}$

أى $C = \dfrac{v^2/64 + 100}{v} = \dfrac{v}{64} + \dfrac{100}{v}$

ومنه $\dfrac{dC}{dv} = \dfrac{1}{64} - \dfrac{100}{v^2} = \dfrac{(v-80)(v+80)}{64\,v^2}$. وبما أن $v > 0$ فإن القيمة الحرجة المناسبة الوحيدة هى $v = 80$ والسرعة الأفضل اقتصاديا هى 80 km / hr .



شكل ٩ ــ ٣

٧ ــ رجل فى زورق تجديف عند النقطة P على بعد 8 km من النقطة A ، أقرب نقطة إليه من الشاطئ المستقيم . يرغب هذا الرجل أن يصل النقطة B ، التى تبعد 10 km عن A على الشاطئ فى أقصر وقت ممكن . فإذا كانت سرعة تجديف هذا الرجل 3 km/hr وسرعته ماشيا 6 km/hr ، « شكل ٩ ــ ٣ » .

أين ينبغى أن يهبط إلى اليابسة كى يصل بأقصر وقت ممكن ؟

لتكن C النقطة بين A و B التى ينبغى أن ينزل عندها الرجل ، ولنفرض $AC = x$. المسافة المقطوعة تجديفا تساوى $PC = \sqrt{64+x^2}$ والزمن t_1 اللازم لذلك يساوى (المسافة / السرعة) .

$t_1 = \dfrac{\sqrt{64+x^2}}{3}$ ، ثم إن المسافة المقطوعة مشيا هى $10 - x$ والزمن اللازم $t_2 = (10 - x)/6$ والزمن الكلى المطلوب يكون $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{3}\sqrt{64+x^2} + \frac{1}{6}(10 - x)$.

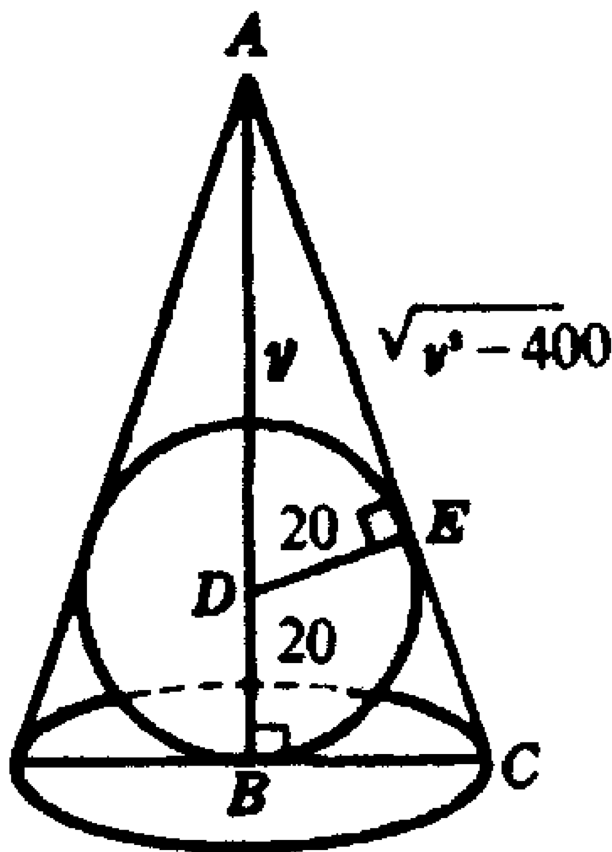
$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{3\sqrt{64+x^2}} - \dfrac{1}{6} = \dfrac{2x - \sqrt{64+x^2}}{6\sqrt{64+x^2}}$ والقيمة الحرجة من $2x - \sqrt{64+x^2} = 0$ هى $x = {}^8/_3\sqrt{3} = 4.62$ وهكذا نجد أن على الرجل أن يهبط على اليابسة فى نقطة تبعد 4.62 km من A نحو B .

٨ ــ يراد عمل سياج حول حقل مستطيل الشكل ذى مساحة مفروضة . فإذا كان هنالك نهر على أحد جوانب الحقل (طول المستطيل) ولا نحتاج إلى إقامة سياج على هذا الجانب فبرهن أنه إذا كان طول الحقل يساوى ضعفى عرضه فالتكلفة اللازمة تكون أقل ما يمكن .

ليكن x الطول و y العرض . والمساحة $A = xy$ والسياج اللازم $F = x + 2y$

$dF/dx = 1 + 2\,dy/dx$ ومن $dF/dx = 0$ نجد $dy/dx = -\frac{1}{2}$

ولكن $dA/dx = 0 = y + x\,dy/dx$. إذن $y - \frac{1}{2}x = 0$ ومنه $x = 2y$ وهو المطلوب .



شكل ٩ ــ ٤

٩ ــ ما هى أبعاد مخروط دائرى قائم ذى حجم أقل ما يمكن تستطيع رسمه حول كرة نصف قطرها 20 cm .

ليكن x نصف قطر قاعدة المخروط و $y + 20$ ارتفاعه . من المثلثين المتشابهين AED و ABC نجد .

$\frac{x}{20} = \frac{y+20}{\sqrt{y^2-400}}$ وبالتالى $x^2 = \frac{400(y+20)^2}{y^2-400} = \frac{400(y+20)}{y-20}$.

حجم المخروط هو $V = \frac{(\pi x^2)(y+20)}{3} = \frac{400\pi(y+20)^2}{3(y-20)}$

ومنه $\frac{dV}{dy} = \frac{400\pi(y+20)(y-60)}{3(y-20)^2}$.

والقيمة الحرجة التى تفى بالغرض هى $y = 60$.

وارتفاع المخروط إذن هو $y + 20 = 80$ cm ونصف قطر قاعدته $x = 20\sqrt{2}$ cm .

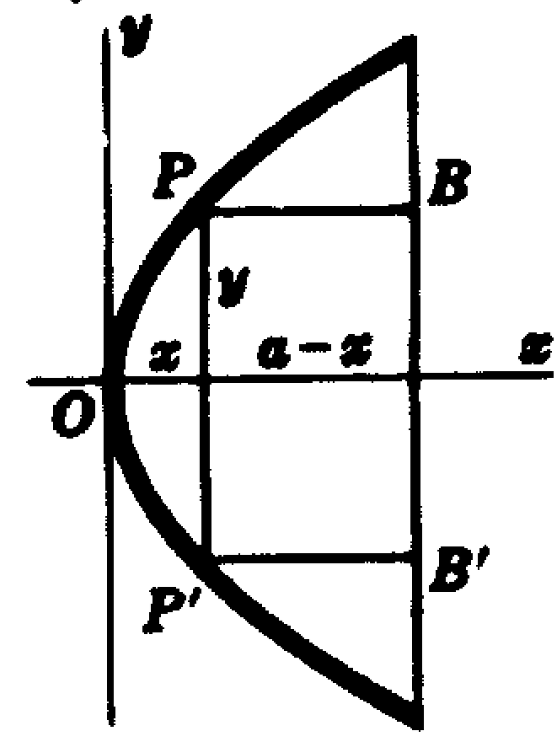
١٠ – أوجد بعدى المستطيل ذى المساحة العظمى والذى يمكن رسمه داخل قطعة القطع المكافئ $y^2 = 4px$ المحددة بالمستقيم $x = a$.

نفرض أن المستطيل هو $PBB'P'$ وأن (x, y) احداثى النقطة P أنظر الشكل ٩ – ٥ .

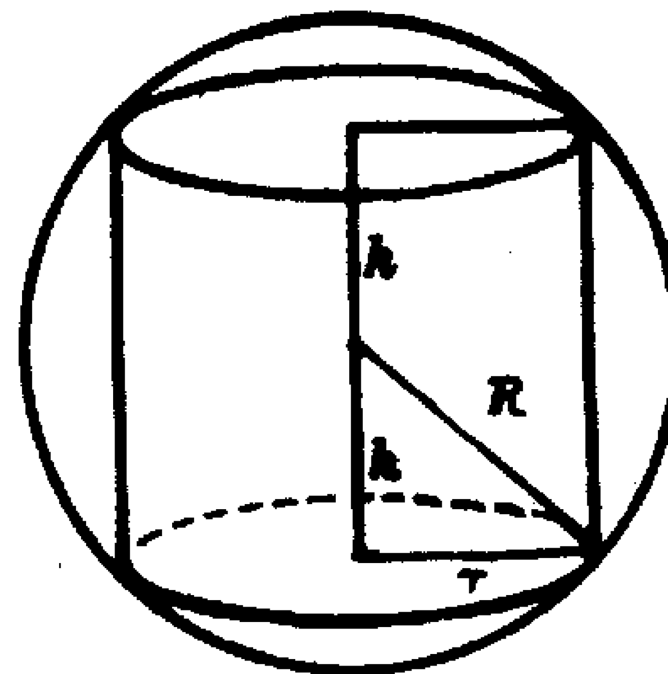
إذن مساحة المستطيل هى $A = 2y(a-x) = 2y(a - y^2/4p) = 2ay - y^3/2p.$

ومنه $dA/dy = 2a - 3y^2/2p.$ وبحل المعادلة $dA/dy = 0$ نجد القيمة الحرجة $y = \sqrt{4ap/3}$.

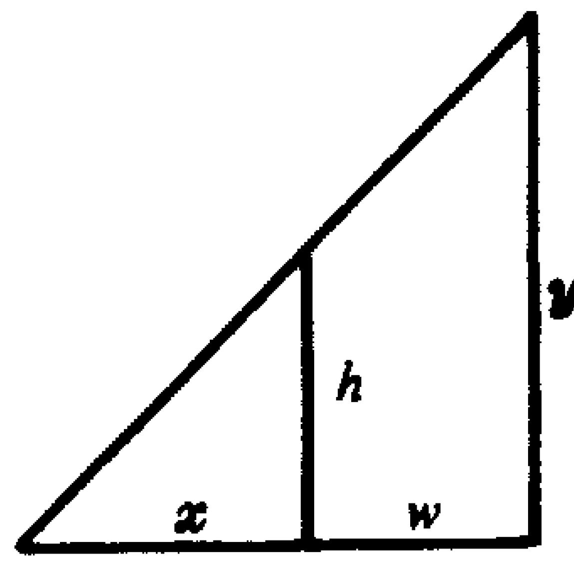
إذن بعدا المستطيل هما $2y = {}^4/_3\sqrt{3ap}$ و $a - x = a - y^2/4p = 2a/3.$



شكل ٩ – ٥



شكل ٩ – ٦



شكل ٩ – ٧

١١ – أوجد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة ذات حجم أعظم V والتى يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها R أنظر الشكل ٩ – ٧ .

نفرض أن r هو نصف قطر قاعدة الاسطوانة و $2h$ ارتفاعها .

إذن $V = 2\pi r^2 h$ و $r^2 + h^2 = R^2$ عندئذ $dV/dr = 2\pi(r^2\, dh/dr + 2rh)$ and $2r + 2h\, dh/dr = 0.$

ومن العلاقة الأخيرة نجد أن $dh/dr = -r/h$ إذن $dh/dr = -r/h.$ Then $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh).$

وعندما يكون الحجم أكبر ما يمكن فإن $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh) = 0$ ومنه $r^2 = 2h^2$.

وبما أن $r^2 + h^2 = R^2$ فإن $2h^2 + h^2 = R^2$ ومنه $h = R/\sqrt{3}$ وارتفاع الأسطوانة $2h$ يساوى $2R/\sqrt{3}$.

١٢ – يراد تقوية جدار جانبى لبناء بدعامة بحيث تمر هذه الدعامة فوق جدار ارتفاعه h m ويبعد عن الجدار الأول w m . أوجد الطول L لأقصر دعامة يمكن أن تفى الغرض .

نفرض أن x هى المسافة بين طرف الدعامة الذى يرتكز على الأرض والجدار الموازى وأن y m بعد طرف الدعامة العلوى عن الأرض (أنظر الشكل ٩ – ٧) .

من الواضح أن $L^2 = (w+x)^2 + y^2$ ومن المثلثات المتشابهة نجد $\frac{h}{y} = \frac{x}{x+w}$ و $y = \frac{h(x+w)}{x}.$

إذن $L^2 = (x+w)^2\left\{1 + \frac{h^2}{x^2}\right\}$ و $2L\frac{dL}{dx} = 2(x+w)\left\{1 + \frac{h^2}{x^2}\right\} + (x+w)^2\left\{-\frac{2h^2}{x^3}\right\} = 2(x+w)\left\{1 - \frac{wh^2}{x^3}\right\}$

والقيمة الحرجة المناسبة هى $x = w^{1/3}h^{2/3}$ وطول أقصر دعامة هو

$$L = (w+x)\left(1 + \frac{h^2}{x^2}\right)^{1/2} = (w + w^{1/3}h^{2/3})(1 + w^{-2/3}h^{2/3})^{1/2} = (w^{2/3} + h^{2/3})^{3/2}.$$

مســــائل اضـــــافية

١٣ – عددين موجبين مجموعهما 20 أوجد العددين (ا) إذا كان حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.
(ب) إذا كان مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن (جـ) إذا كان حاصل ضرب مربع أحدهما بمكعب الآخر أكبر ما يمكن.
ج: (ا) 10, 10 (ب) 10, 10 (جـ) 8,12.

١٤ – عددين موجبين حاصل ضربها 16 أوجد العددين (ا) إذا كان مجموعهما أصغر ما يمكن.
(ب) إذا كان ناتج جمع أحدهما إلى مربع الآخر أصغر ما يمكن. ج: (ا) 4,4 (ب) 8,2.

١٥ – يراد صنع صـــندوق مفتوح على شكل متوازى مستطيلات قاعدتاه على شكل مربع وحجمه $216 \ m^3$. فإذا كانت تكلفة المتر المربع من القاعدة 50 سنتا ومن الجوانب 25 سنتا. فما هى أبعاد الصندوق التى تضمن لنا أقل تكلفة ممكنة.
ج: $6 \times 6 \times 6 \ m$.

١٦ – يقع جدارا ارتفاعه $3\sqrt{3} \ m$، على بعد متر واحد من منزل. ما هو طول أقصر سلم يمكن أن يصل بين الأرض والمنزل بحيث يستند على الجدار من أعلاه. ج: $138/9 \ m$.

١٧ – تعرض شركة قائمة الأسعار التالية 30 دولارا قيمة كل ألف إذا كان الطلب 50,000 أو أقل وتنقص قيمة كل ألف ½ 37 سنتا لكل ألف يزيد عن 50,000 فما هو الطلب الذى يجعل الشركة تحصل على أعظم ما يمكن من الدخل. ج 65,000.

١٨ – أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (3,4) بحيث يقطع من الربع الأول من المستوى مثلثا مساحته أصغر ما يمكن.
ج: $4x + 3y - 24 = 0$.

١٩ – عين النقطة من القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ والواقعة فى الربع الأول من المستوى بحيث يحدد المماس للقطع عند هذه النقطة مع محورى الإحداثيات مثلثا مساحته أصغر ما يمكن. ج: $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$

٢٠ – أوجد أقصر مسافة بين النقطة (4,2) والقطع المكافئ $y^2 = 8x$. ج: $2\sqrt{2}$ وحدة.

٢١ – يراد رسم مماس للقطع الناقص $x^2/25 + y^2/16 = 1$ بحيث يكون طول جزء المماس المحدد بالمحورين الاحداثيين أقصر ما يمكن. بين أن طول هذا الجزء يساوى 9 وحدات.

٢٢ – مستطيل مرسوم داخـــل القطع الناقص $x^2/400 + y^2/225 = 1$ بأضلاع موازية لمحاور القطع أوجد بعدى المستطيل بحيث تكون (ا) مساحته أكبر ما يمكن (ب) طول محيطه أكبر ما يمكن.
ج: (ا) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$ (ب) 32×18.

٢٣ – أوجد نصف القطر R لمخروط دائرى قائم يمكن رسمه على كرة نصف قطرها r بحيث يكون حجمه أكبر ما يمكن.
ج: $R = {}^2/_3 \, r\sqrt{2}$.

٢٤ – المطلوب رسم اسطوانة دائرية قائمة داخل مخروط دائرى قائم نصف قطره r أوجد نصف قطر الاسطوانة R بحيث يكون (ا) إذا كان حجمها أكبر ما يمكن (ب) إذا كانت مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن.
ج: (ا) $R = {}^2/_3 \ r$ (ب) $R = \frac{1}{2} r$.

٢٥ – بين أن ارتفاع خيمة مخروطية الشكل، ذات سعة مفروضة، يساوى $\sqrt{2}$ مرة من نصف قطر قاعدتها إذا أردنا أن تكلفنا أقل ما يمكن من مادة الصنع.

٢٦ – بين أن المثلث المتساوى الأضلاع والذى ارتفاعه $3r$ هو أقل المثلثات المتساوية الساقين مساحة والتى يمكن رسمها على دائرة نصف قطرها r.

٢٧ – عين أبعاد اسطوانة دائرية قائمة يمكن رسمها داخل كرة نصف قطرها 20 cm بحيث تكون مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن. ج: $h = 2r = 20\sqrt{2}$ cm.

٢٨ – ناقش إمكانية رسم اسطوانة دائرية قائمة ذات مساحة عظمى داخل مخروط دائرى قائم نصف قطره r وارتفاعه h.
ج: إذا كان $h > 2r$ فإن نصف قطر الاسطوانة يساوى $\frac{1}{2} hr/(h - r)$.

الفصل العاشر

الحركة المستقيمية والدائرية

الحركة المستقيمة :

تتعين حركة جسيم P تعيينا تاما على خط مستقيم بالمعادلة $s = f(t)$ حيث $t > 0$ هو الزمن . و s هى بعد P عن نقطة ثابتة O من مسارها .

إن سرعة P فى لحظة ما هى $v = \frac{ds}{dt}$

إذا كانت $v > 0$ فإن P تتحرك فى اتجاه تزايد s .

وإذا كانت $v < 0$ فإن P تتحرك فى اتجاه تناقص s .

أما إذا كانت $v = 0$ فإن P فى وضع السكون آنيا .

وأما تسارع (عجلة) P فى اللحظة t فهى $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a$.

فإذا كانت $a > 0$ فإن v متزايدة وإذا كانت $a < 0$ فإن v متناقصة .

وعندما تكون كل من a و v لهما نفس الإشارة . فإن سرعة P متزايدة .

أما إذا كان لـ a و v إشارتان متعاكستان فإن سرعة P متناقصة . أنظر المسائل ١ – ٥

الحركة الدائرية :

تتعين حركة جسيم P تعيينا تاما على دائرة بالمعادلة $\theta = f(t)$ حيث θ الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى التى يقطعها المستقيم الذى يصل النقطة P بمركز الدائرة فى زمن قدرة t .

إن السرعة الزاوية لـ P فى اللحظة t تساوى $\frac{d\theta}{dt} = \omega$.

والتسارع الزاوى لـ P فى اللحظة t يساوى $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha$

إذا كان α ثابتا لجميع قيم t فإن P تتحرك بتسارع زاوى ثابت .

أما إذا كان α = صفر لجميع قيم t فإن P تتحرك بسرعة زاوية ثابتة . أنظر المسألة ٦

مســـــائل محلولة

تقدر s فى المسائل التالية لحركة المستقيمة بالأمتار (m) والزمن بالثوانى (s) .

١ – يتحرك جسم فى خط مستقيم وفقا للقانون $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$ عين سرعته وتسارعه عندما تمضى ثانيتان .

$v = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2$ وعندما $t = 2$ يكون $v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4\ \text{ms}^{-1}$.

$a = \frac{dv}{dt} = 3t$ وعندما $t = 2$ يكون $a = 3(2) = 6\ \text{ms}^{-2}$.

٢ – تعطى حركة جسيم يسير فى خط مستقيم بالمعادلة $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$.

(ا) أوجد a,s عندما $v = 0$. (ب) أوجد v,s عندما $a = 0$.

(ج) متى تكون s متزايدة ؟ (د) متى تكون v متزايدة ؟

(هـ) متى يتغير اتجاه الحركة ؟

$$v = ds/dt = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \qquad a = dv/dt = 6(t-2)$$

(ا) عندما $v = 0$ فإن $t = 1,3$ وعندما $t = 1$ تكون $s = 8$ و $a = -6$ وعندما $t = 3$ يكون $a = 6$ و $s = 4$.

(ب) عندما $a = 0$ فإن $t = 2$ وفى اللحظة $t = 2$ تكون $s = 6$ $v = -3$.

(ج) إن s متزايدة عندما $v > 0$ أى عندما $t < 1$ و $t > 3$.

(د) إن v متناقصة عندما $a > 0$ أى عندما $t > 2$.

(هـ) يتغير اتجاه الحركة عندما $v = 0$ و $a \neq 0$ نستنتج من (ا) أن الاتجاه يتغير عندما $t = 1$ و $t = 3$.

٣ – يتحرك جسم على مستقيم أفقى وفق القانون $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$.

(ا) متى تتزايد s ومتى تتناقص ؟

(ب) متى تتزايد v ومتى تتناقص ؟

(ج) متى تكون السرعة القياسية للجسم متزايدة ومتى تكون متناقصة ؟

(د) أوجد المسافة الكلية التى قطعها الجسم فى الثوانى الخمس الأولى للحركة .

$$v = ds/dt = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4) \qquad a = dv/dt = 6(t-3)$$

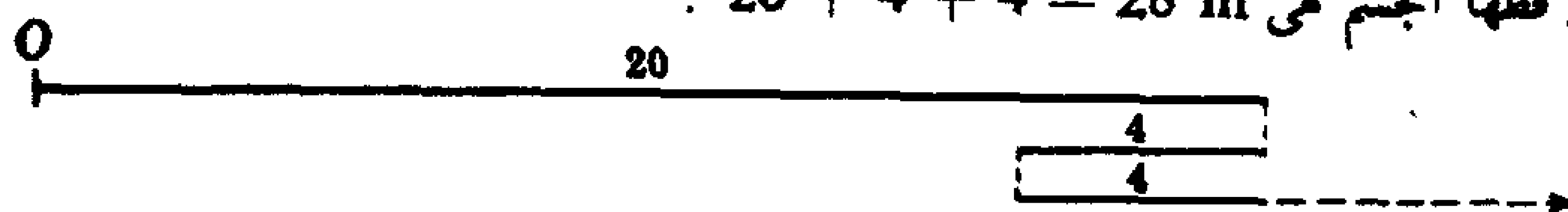
(ا) إن s متزايدة عندما $v > 0$ أى عندما $t < 2$ و $t > 4$.
وإن s متناقصة عندما $v < 0$ أى عندما $2 < t < 4$.

(ب) إن v متزايدة عندما $a > 0$ أى عندما $t > 3$.
وإن v متناقصة عندما $a < 0$ أى عندما $t < 3$.

(ج) إن السرعة القياسية متزايدة عندما يكون لـ v و a الإشارة ذاتها ومتناقصة عندما تكون إشارتاهما متعاكستين .
ولكن بما أن v تغير إشارتها عندما $t = 2$ و $t = 4$ فى حين تغير a إشارتها عندما $t = 3$ فإنه ينبغى أن نقارن الإشارات فى الفترات التالية $t < 2$ و $2 < t < 3$ و $3 < t < 4$ و $t > 4$.

فى الفترة $t < 2$ تكون $v > 0$ و $a < 0$ والسرعة القياسية متناقصة .
وفى الفترة $2 < t < 3$ تكون $v < 0$ و $a < 0$ والسرعة القياسية متزايدة .
وفى الفترة $3 < t < 4$ تكون $v < 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متناقصة .
وفى الفترة $t > 4$ تكون $v > 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متزايدة .

(د) عندما $t = 0$ يكون $s = 0$ والجسم فى الموضع O والحركة الإبتدائية نحو اليمين ($v > 0$) وتستمر كذلك مدة ثانيتين يصل الجسم فى نهايتها إلى البعد $s = f(2) = 20$ m من O .
بعد ذلك وخلال الثانيتين التاليتين يتحرك الجسم نحو اليسار ويكون فى نهاية هذا الزمن على بعد $s = f(4) = 16$ m عن O .
وبعدها يعود الجسم للحركة نحو اليمين حيث يصل بعد خمس ثوان من بداية الحركة إلى الموضع $s = f(5) = 20$ m من O .
والمسافة الكلية التى قطعها الجسم هى $20 + 4 + 4 = 28$ m .



شكل ١٠ – ١

٤ – يتحرك جسيم فى خط مستقيم أفقى وفق القانون $s = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$.

(ا) متى تكون السرعة القياسية متزايدة ومتى تكون متناقصة ؟

(ب) متى يتغير اتجاه الحركة ؟

(جـ) أوجد المسافة الكلية التى قطعها الجسيم خلال الثوانى الثلاث الأولى .

إن $v = ds/dt = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10 = 2(t-1)^2(2t-5) \quad a = dv/dt = 12(t-1)(t-2)$

(ا) قد تغير v إشارتها عندما $t = 1$ و $t = 2.5$ أما a فقد تغير إشارتها عندما $t = 1$ و $t = 2$.

فى الفترة $t < 1$ يكون $v < 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متناقصة .

وفى الفترة $1 < t < 2$ يكون $v < 0$ و $a < 0$ والسرعة القياسية متزايدة .

وفى الفترة $2 < t < 2.5$ يكون $v < 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متناقصة .

وفى الفترة $t > 2.5$ يكون $v > 0$ و $a > 0$ والسرعة القياسية متزايدة .

(ب) أما اتجاه الحركة فيتغير عندما $t = 2.5$ لأن $v = 0$ و $a \neq 0$.

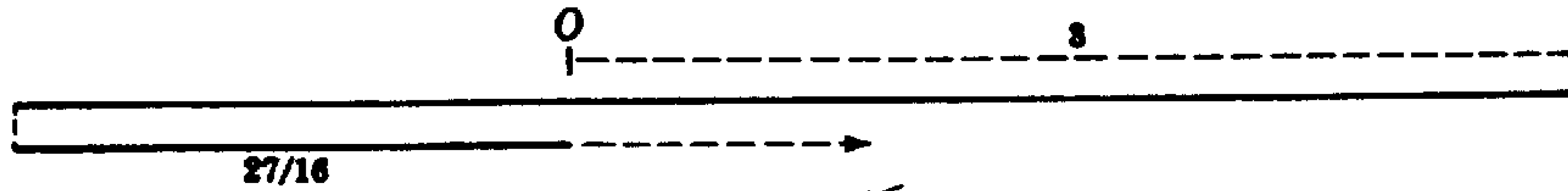
أما عند $t = 1$ فلا يتغير اتجاه الحركة لأن v لاتغير إشارتها عندما تتزايد t مارة بـ $t = 1$.

يلاحظ أنه عندما $t = 1$ فإن $v = 0$ و $a = 0$. وبالتالى ليست هناك معلومات يمكن الحصول عليها .

(جـ) عندما $t = 0$ تكون $s = 3$ والجسيم يبعد ثلاثة أمتار إلى اليمين من O .

وتتم الحركة نحو اليسار خلال 2.5 ثانية الأولى حيث يصل الجسيم فى نهايتها إلى 27/19 m إلى اليسار من O .

وعندما تصبح $t = 3$ تكون $s = 0$ ويكون بذلك قد تحرك الجسيم 27/16 m إلى اليمين . والمسافة الكلية المقطوعة $3 + 27/16 + 27/16 = 51/8$.



شكل ١٠ – ٢

٥ – قذف حجر رأسيا إلى أعلى بسرعة ابتدائية 34.3 m/s فتحرك وفق القانون $s = 34.3\,t - 4.9\,t^2$ حيث s البعد عن نقطة الإنطلاق احسب . (ا) السرعة والتسارع عندما $t = 3$ وعندما $t = 4$. (ب) أقصى إرتفاع يصله الحجر .

(جـ) متى يصبح إرتفاعه 29.4 m ؟

إن $v = ds/dt = 34.3 - 9.8t \quad a = dv/dt = -9.8$

(ا) عندما $t = 3$ تكون $v = 4.9$ و $a = -9.8$ والحجر صاعداً بمعدل 4.9 m/s .

وعندما $t = 4$ تكون $v = -4.9$ و $a = -9.8$ والحجر هابطاً بمعدل 4.9 m/s .

(ب) يكون الجسيم فى أعلى نقطة عندما تكون $v = 0$.

بحل المعادلة $v = 0 = 34.3 - 9.8\,t$ نجد أن $t = 3.5$.

وعند هذه اللحظة تكون $s = 60.025$ m .

(جـ) $29.4 = 34.3t - 9.8t^2, \quad t^2 - 7t + 6 = 0, \quad (t-1)(t-6) = 0, \quad t = 1, 6.$

فى نهاية الثانية الأولى من بدء الحركة يكون الحجر على ارتفاع 29.4 m وهو صاعد لأن $v > 0$ وأما فى نهاية الثانية السادسة فإن الحجر يكون على الإرتفاع ذاته ولكن هابطاً لأن $v < 0$.

٦ – يدور جسيم من السكون فى عكس اتجاه عقارب الساعة وفق القانون $\theta = t^3/50 - t$ حيث تقاس θ (rad) و t (sec) احسب الإزاحة الزاوية θ والسرعة الزاوية w والتسارع الزاوى α فى نهاية الثانية العاشرة .

$\theta = t^3/50 - t = 10$ rad, $\omega = d\theta/dt = 3t^2/50 - 1 = 5$ rad/sec, $\alpha = d\omega/dt = 6t/50 = 6/5$ rad/sec^2

مســـــائل اضـــــافية

٧ – يتحرك جسيم فى خط مستقيم وفق القانون $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ حيث تقاس المسافة بالأمتار والزمن بالثوانى .

حدد موضع الجسيم بالنسبة لنقطة البداية ($t = 0$) عند O وأوجد اتجاه الحركة وسرعتها وبين فيما إذا كانت السرعة القياسية متزايدة أو متناقصة عندما (ا) $t = 1/2$ (ب) $t = 3/2$ (ﺟ) $t = 5/2$ (د) $t = 4$.

ج : (ا) $25/8$ m إلى اليمين من O والحركة نحو اليمين بسرعة $v = 15/4$ m/s متناقصة .

(ب) $27/8$ m إلى اليمين من O ، والحركة نحو اليسار بسرعة $v = -9/4$ m/s متزايدة .

(ﺟ) $5/8$ m إلى اليمين من O ، والحركة نحو اليسار بسرعة $v = -9/4$ m/s متناقصة .

(د) 4 m إلى اليمين من O والحركة نحو اليمين بسرعة $v = 9$ m/s متزايدة .

٨ – تعطى المسافة التى تفصل قطاراً عن نقطة ثابتة على مساره المستقيم فى اللحظة t بالقانون $s = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. متى كانت حركة القطار نحو الوراء ؟ ج . $3 < t < 8$.

٩ – ادرس ، كما فى المسألة (٢) كلا من الحركات المستقيمة التالية :

(ا) $s = t^3 - 9t^2 + 24t,$ (ب) $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 3,$ (ﺟ) $s = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5,$

(د) $s = 3t^4 - 28t^3 + 90t^2 - 108t.$

ج . (ا) تقف الحركة عند $t=2$ و $t=4$ مع تغيير فى اتجاه الحركة .

(ب) تقف الحركة عند $t=1$ بدون تغيير فى اتجاه الحركة .

(ﺟ) تقف الحركة عند $t=1$ و $t=3$ مع تغيير فى اتجاه الحركة .

(د) تقف الحركة عند $t = 1$ مع تغيير فى اتجاه الحركة ، وتقف عند $t=3$ دون تغيير فى اتجاه الحركة .

١٠ – يصعد جسم من الأرض رأسيا لأعلى وفق القانون $s = 19.6\,t - 4.9\,t^2$ بين أن الجسم يفقد نصف سرعته خلال الـ 14.7m الأولى من صعوده .

١١ – قذفت كرة رأسيا لأعلى من طرف سقف بناء بحيث تسقط فى الشارع تحت السقف بمسافة 34.3 m .

فإذا تحركت الكرة بحيث بعد زمن قدرة t كانت مسافتها s (مقدرة بالأمتار) بده من السقف تعطى بالعلاقة $s = 29.4 - 4.9\,t^2$ فأوجد (ا) موضع الكرة وسرعتها واتجاه السرعة عندما $t = 2$.

(ب) سرعتها عندما تصطدم بالشارع .

ج . (ا) 73.5 m فوق الشارع والسرعة 9.8 m/s لأعلى .

(ب) 39.2 m/s .

١٢ – تدور عجلة زاوية θ rad فى t sec بحيث يكون $\theta = 128t - 12t^2$ أوجد السرعة الزاوية والتسارع الزاوى فى نهاية 3 sec .

ج . $\alpha = -24$ rad/s^2 $W = 56$ rad/s .

١٣ – ادرس المسألتين ٢ ، ٩ لتستنتج أن وقوف الحركة مع تغيير الإتجاه يتم عند قيم t التى تجعل $s = f(t)$ يبلغ قيمة عظمى أو صغرى فى حين يتم وقوف الحركة دون تغير الإتجاه عند نقط الانعطاف .

الفصل الحادي عشر

المعدلات المتعلقة ببعضها

المعدلات المتعلقة ببعضها : إذا كان المتغير x دالة للزمن t فعندئذ يعطى معدل المتغير الزمني لـ x بـ dx/dt .

وإذا كان متغيران أو أكثر ، جميعها دوال لـ t ، متعلقة ببعضها بواسطة معادلة فإنه يمكن الحصول على العلاقة بين معدلات تغيرهما باشتقاق المعادلة بالنسبة لـ t .

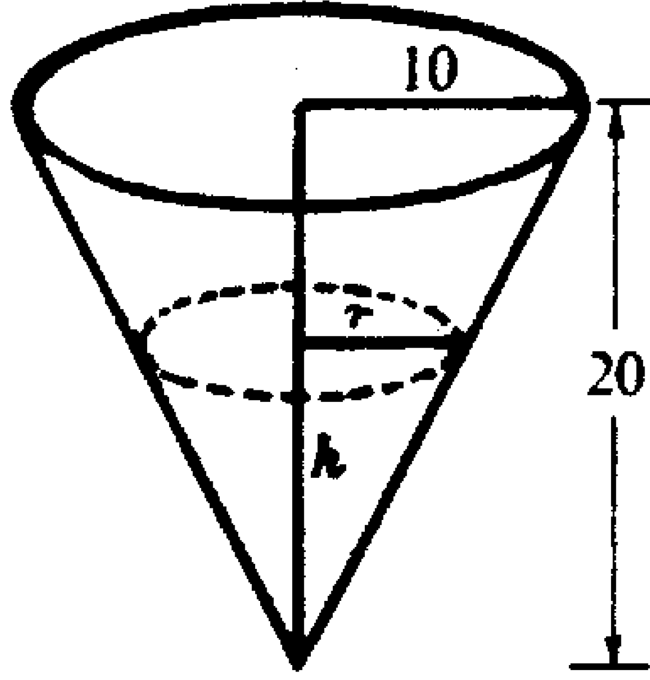
مســـــائل محلولة

١ – يتسرب غاز من بالون كروى بمعدل $900\ cm^3s^{-1}$ فبأية سرعة تتقلص مساحة السطح عندما يكون نصف القطر $360\ cm$ ؟

ليكن نصف قطر الكرة فى اللحظة t هو r والحجم $V = {}^4/_3\pi r^3$ و مساحة السطح $S = 4\pi r^2$ عندئذ :

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt},\ \frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt},\ \frac{dS/dt}{dV/dt} = \frac{2}{r},$$ و $$\frac{dS}{dt} = \frac{2}{r}\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{2}{360}(-900) = -5\ cm^2 s^{-1}.$$

٢ – ينسكب ماء من قمع مخروطى بمعدل $5\ cm^3s^{-1}$. فإذا كان نصف قطر قاعدة القمع مساوياً $10\ cm$ وارتفاعه $20\ cm$ ، فأوجد معدل انخفاض مستوى الماء عندما يكون هذا المستوى على بعد $5\ cm$ من قاعدة القمع .



شكل ١١ — ١

ليكن r نصف قطر سطح الماء فى اللحظة t و h ارتفاعه وليكن v حجم الماء فى المخروط .

ومن تشابه المثلثات نجد أن $r/10 = h/20$ أو $r = \frac{1}{2}h$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$ و $dV/dt = \frac{1}{4}\pi h^2\, dh/dt.$

وعندما يكون $dv/dt = -5$ و $h = 20 - 5 = 15$

فإن $dh/dt = -4/45\pi\ cm^3s^{-1}$.

٣ – يتساقط رمل من منحدر مشكلا كومة مخروطية ارتفاعها يساوى دائماً $4/3$ نصف قطر قاعدتها :

(أ) فبأى سرعة يتزايد الحجم عندما يكون نصف قطر القاعدة يساوى $1\ m$. إذا كان نصف القطر هذا يتزايد بمعدل $1/8\ cms^{-1}$ ؟

(ب) وبأى سرعة يتزايد نصف القطر عندما يكون مساوياً مترين والحجم يتزايد بمعدل $10^4\ cm^3s^{-1}$ ؟

ليكن r نصف قطر القاعدة و h ارتفاع الكومة فى اللحظة t .

بما أن $h = \frac{4}{3}r$، $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{9}\pi r^3$، ومنه $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^2\frac{dr}{dt}$.

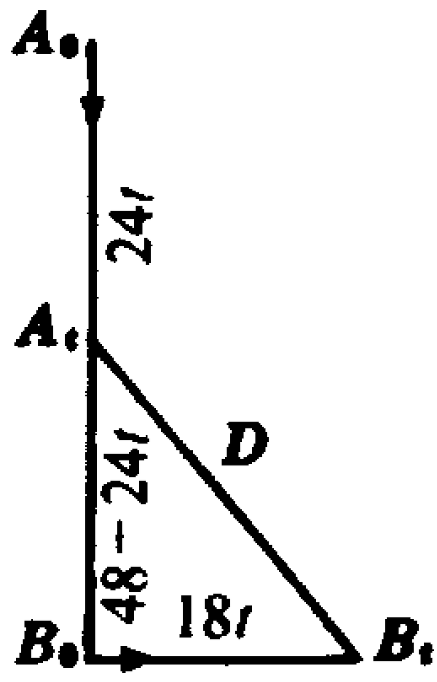
(ا) فعندما $r = 100$ و $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8}$ يكون cms^{-1} $\frac{dV}{dt} = \frac{5000\pi}{3}$

(ب) وعندما $r = 200$ و $\frac{dv}{dt} = 10000$ يكون cms^{-1} $\frac{dr}{dt} = \frac{3}{16\pi}$

٤ – تبحر باخرة A نحو الجنوب بمعدل $24\ \text{km hr}^{-1}$ فى حين تبحر باخرة أخرى B تقع على بعد $48\ \text{km}$ جنوب A نحو الشرق بمعدل $18\ \text{km hr}^{-1}$.

(ا) بأى معدل تتقاربان أو تتباعدان بعد مضى ساعة واحدة ؟ (ب) بعد مضى ساعتين (جـ) متى تكفان عن الاقتراب من بعضهما وما هى المسافة التى تفصلهما عندئذ ؟

ليكن A_0 و B_0 موضعى البدء الباخرتين ، A_t و B_t موضعيهما بعد t hr ولتكن D المسافة بينهما عندئذ .



شكل ١١ – ٢

$$D^2 = (48 - 24t)^2 + (18t)^2 \quad \text{و} \quad \frac{dD}{dt} = \frac{900t - 1152}{D}$$

(ا) عندما $t = 1$ تكون $D = 30$ و $dD/dt = -8.4$ والباخرتان تتقاربان بمعدل $8.4\ \text{km hr}^{-1}$.

(ب) وعندما $t = 2$ تكون $D = 36$ و $dt/dD = 18$ والباخرتان تتباعدان بمعدل $18\ \text{kmhr}^{-1}$.

(جـ) وتكف الباخرتان عن الاقتراب من بعضهما عندما يكون $dD/dt = 0$ أى عندما $t = 1152/900 = 1.28$ hr وعندما تكون المسافة بينهما $D = 28.8$ km .

٥ – يتمدد طولا ضلعين متقابلين من مستطيل بمعدل $2\ \text{cms}^{-1}$ بينما يتقلص طولا الضلعين الآخرين بحيث يبقى الشكل مستطيلا بمساحة ثابتة A تساوى $50\,\text{cm}^3$ ماهو معدل تغير المحيط P عندما يكون طول كل من الضلعين المتمددين . (ا) 5cm (ب) 10 cm ، (جـ) ما هما بعدا المستطيل عندما يكف المحيط عن التناقص ؟

ليكن x طول كل من الضلعين المتمددين فى اللحظة t و y طول كل من الضلعين المتقلصين فى اللحظة نفسها .

عندئذ يكون $P = 2(x + y)$ و $\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)$. ، $A = xy = 50$ ، $x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0.$

(آ) فعندما $dx/dt = 2$ ، $y = 10$ و $x = 5$ يكون :

$5\frac{dy}{dt} + 10(2) = 0$ أو $\frac{dy}{dt} = -4,$ و $\frac{dP}{dt} = 2(2 - 4) = -4\ \text{cms}^{-1}$ (والمحيط متناقص) .

(ب) وعندما $x = 10, y = 5, dx/dt = 2$ يكون :

$10\frac{dy}{dt} + 5(2) = 0$ أو $\frac{dy}{dt} = -1,$ و $\frac{dP}{dt} = 2(2 - 1) = 2\ \text{cm s}^{-1}$ (والمحيط متزايد) .

(جـ) يكف المحيط عن التناقص عندما يكون $dP/dt = 0$ أى عندما $\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt} = -2$ عندئذ :

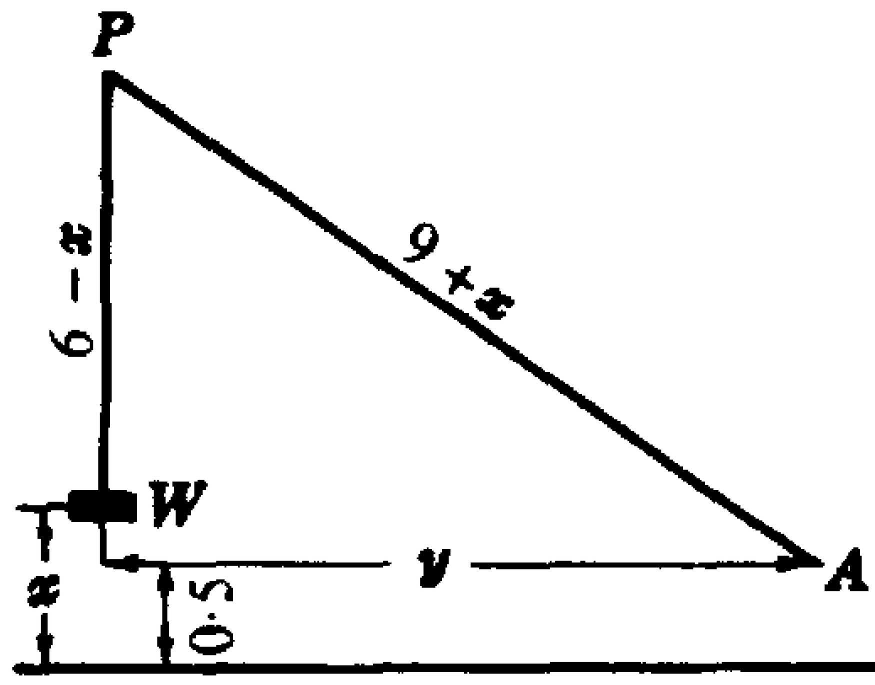
$x(-2) + y(2) = 0$ والمستطيل هو مربع طول ضلعه $x = y = 5\sqrt{2}$ cm .

٦ – نصف قطر كرة فى اللحظة t sec يساوى r cm . أوجد نصف القطر عندما يكون معدل ازدياد مساحة سطح الكرة ومعدل ازدياد نصف قطرها متساويين عددياً .

مساحة سطح الكرة $S = 4\pi r^2$. إذن $\frac{dS}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt}$.

وعندما يكون $\frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}$. فإن $\frac{dr}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$ ومنه نجد أن نصف القطر r يساوى $\frac{1}{8\pi}$ cm .

٧ – ربط وزن W بطرف حبل طوله 15 m ويمر على بكرة P تعلو 6 m عن سطح الأرض . وربط الطرف الآخر للحبل بشاحنة عند النقطة A تعلو 0.5 m عن سطح الأرض كما هو مبين بالشكل ١١ – ٣ . فإذا تحركت الشاحنة بمعدل $3\ ms^{-1}$ فبأية سرعة يرتفع الوزن عندما يكون هذا الوزن على ارتفاع 2 m فوق سطح الأرض .



شكل ١١ – ٣

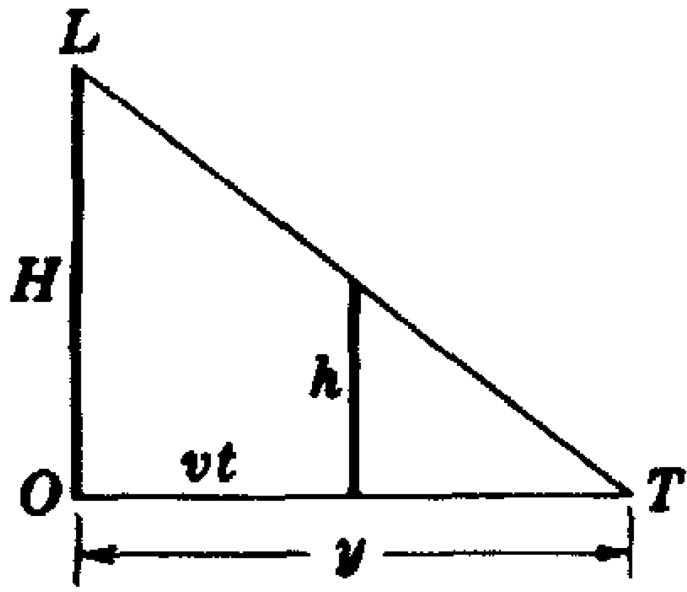
لنرمز بـ x لإرتفاع الوزن عن الأرض وللبعد الأفقى بين النقطة A حيث يرتبط الحبل بالشاحنة والخط الرأسى المار بالبكرة فى اللحظة t بـ y .

والمطلوب هو إيجاد dx/dt عندما $\frac{dy}{dt} = 3$ و $x=2$.

ولكن بما أن $y^2 = (9+x)^2 - (5.5)^2$ و $\frac{dy}{dt} = \frac{9+x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$.

فإنه عندما $x = 2$ يكون $y = 5.5\sqrt{3}$. $\frac{dy}{dt} = 3.$ وبالتالى $\frac{9+2}{5.5\sqrt{3}} \cdot \frac{dx}{dt} = 3$ ومنه نجد $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}\sqrt{3}\ ms^{-1}$.

٨ – يعلق مصباح كهربائى L على ارتفاع H m فوق الشارع . وضع شىء طوله h m عند الموضع O تحت المصباح الضوئى مباشرة . فإذا تحرك هذا الشىء فى خط مستقيم على طول الشارع بمعدل $v\ ms^{-1}$ فادرس السرعة V لرأس ظل هذا الشىء على الشارع بعد t sec . أنظر الشكل ١١ – ٤



شكل ١١ – ٤

بعد t sec يكون الجسم قد تحرك مسافة قدرها vt . لنفرض y المسافة التى تفصل رأس الشكل عن O .

إذن : $\frac{y - vt}{y} = \frac{h}{H}$ أو $y = \frac{Hvt}{H-h}$ ومنه $V = \frac{dy}{dt} = \frac{Hv}{H-h} = \frac{1}{1-h/H}v$

إذن فسرعة رأس ظل الشىء متناسبة مع سرعة الشىء نفسه ويعتمد ثابت التناسب على النسبة h/H . وعندما $h \to 0$ نجد $V \to v$ بينما تزداد V بسرعة أكبر كثيراً عندما $h \to H$.

مســــائل اضــــافية

٩ – حوض على شكل متوازى مستطيلات طوله 2 m وعرضه 0.5 m وعمقه 1 m فإذا كان الماء ينساب فيه بمعدل $900\ cm^3s^{-1}$ فبأية سرعة يرتفع سطح الماء عندما يكون عمق الماء 25 cm ؟ ج : $0.09\ cms^{-1}$.

١٠ – ينصب ماء فى خزان على شكل اسطوانة رأسية نصف قطرها 2 m بمعدل $3600\ cm^3s^{-1}$ فبأى سرعة يرتفع سطح الماء ؟ ج . $9/100\pi\ cm\ s^{-1}$.

١١ – يمشى رجل طوله 1.5 m بمعدل $1.2\ ms^{-1}$ مبتعداً بشكل مباشر عن ضوء الشارع الذى يعلو 6 m عن أرض الشارع
(آ) بأى معدل يتغير رأس ظل الرجل ؟ (ب) بأى معدل يتغير طول الظل ؟
ج : (أ) $1.6\ ms^{-1}$. (ب) $0.4\ ms^{-1}$.

١٢ – يرتفع بالون رأسيا فوق نقطة A واقعة على الأرض بمعدل $5ms^{-1}$. فإذا كانت B نقطة أخرى على الأرض فى مستوى A وتبعد عنها $20\ m$ فبأى معدل تتغير المسافة بين البالون والنقطة B عندما يكون البالون على بعد $15\ m$ عن A .
ج : $3\ ms^{-1}$.

١٣ – يستند سلم طوله $5\ m$ على جدار منزل . أوجد (آ) معدل حركة رأس السلم لأسفل إذا كان أسفل السلم على بعد $3\ m$ من الجدار ويبتعد عنه بمعدل $0.5\ ms^{-1}$. (ب) معدل تناقص ميل السلم .
الجواب : (أ) $3/8\ ms^{-1}$. (ب) $25/12$ فى الثانية .

١٤ – ينساب ماء من خزان مخروطى نصف قطره $1\ m$ وعمقه $3\ m$ بمعدل $1800\ cm^3s^{-1}$ فبأى سرعة يهبط سطح الماء عندما يكون عمق الماء مترين . وبأية سرعة يتناقص نصف قطر السطح ؟
ج : $81/200\pi\ cms^{-1}$ ، $9/200\pi\ cms^{-1}$.

١٥ – ينخفض ظهر مركب عن مستوى الرصيف $5\ m$. فإذا سحب هذا المركب بواسطة حبل مربوط بظهره ومار بحلقة على الرصيف . فبأية سرعة يسحب الحبل عندما يكون المركب على بعد $12\ m$ من الرصيف ويقترب منه بمعدل $0.25\ ms^{-1}$ (يهمل ارتخـاء الحبل) . ج : $3/13\ ms^{-1}$.

١٦ – ترتفع طائرة ورقية يمسك بها صبى $50\ m$ ، فإذا تحركت الطائرة أفقياً مبتعدة عن الصبى بمعدل $6\ ms^{-1}$. فبأية سرعة يزداد طول الخيط عندما تكون الطائرة على بعد $80\ m$ عن الصبى .
ج : $7.5\ ms^{-1}$.

١٧ – ينطلق قطار فى الساعة 11 قبل الظهر متجهاً نحو الشرق بمعدل $75\ km\,hr^{-1}$ فى حين ينطلق قطار آخر ظهراً من نفس الموضع متجهاً نحو الجنوب بمعدل $100\ km\ hr^{-1}$. فبأى سرعة يبتعدان عن بعضهما فى الساعة 3 بعد الظهر ؟
ج : $87.5\sqrt{2}\ km\,hr^{-1}$.

١٨ – يوجد مصباح كهربائى على رأس عمود ارتفاعه $28\ m$. فإذا أسقطت كرة من العلو نفسه ومن نقطة تبتعد $7\ m$ عن الضوء وإذا كانت الكرة تسقط وفق القانون $S = 4.9\,t^2$ فبأية سرعة يتحرك ظل الكرة على الأرض بعد مضى ثانية واحدة ؟ ج : $80\ ms^{-1}$.

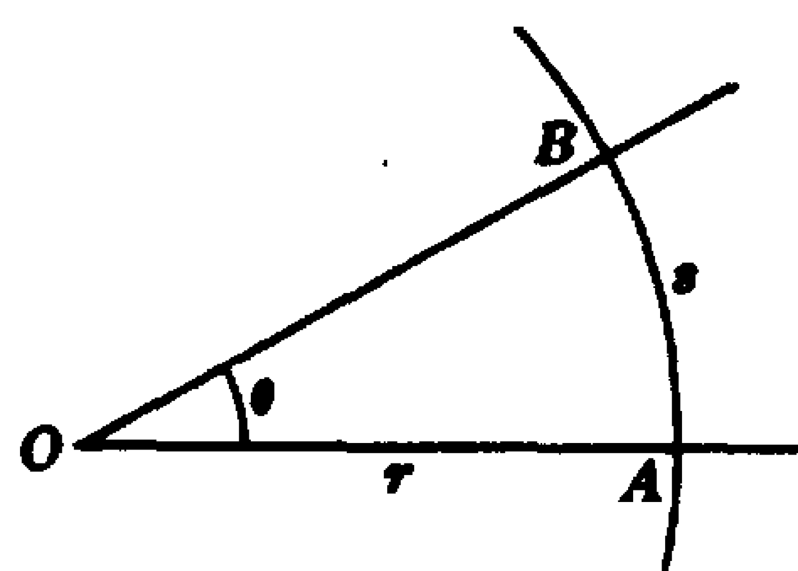
١٩ – تتحرك باخرة A تقع على الشرق من نقطة O ويفصلها عنها $21\ km$ بمعدل $28\ km\,hr^{-1}$ نحو الغرب فى حين تتحرك باخرة أخرى B تقع على الجنوب من O ويفصلها عنها $84\ km$ بمعدل $21\ km\ hr^{-1}$ نحو الشمال .
(أ) هل تتقارب الباخرتان أم تتباعدان بعد مضى ساعة واحدة وبأى معدل ؟
(ب) يعاد السؤال ، بعد مضى ثلاث ساعات ؟ (جـ) متى تكونان أقرب مايكون من بعضهما ؟
ج : (أ) تتقاربان $161\sqrt{82}\ km\,hr^{-1}$. (ب) تتباعدان $4.2\sqrt{10}\ km\,hr^{-1}$.
(جـ) 1 ساعة و 55 دقيقة .

٢٠ – يصب ماء بمعدل $4500\ cm^3s^{-1}$ فى حوض يتسرب الماء منه وهو على شكل مخروط عمقه $4\ m$ ونصف قطره العلوى $2\ m$ لوحظ أنه عندما يكون عمق الماء $3\ m$ يكون معدل ارتفاع سطح الماء $0.1\ cms^{-1}$ فبأية سرعة يتسرب الماء من الحوض ؟ ج : $(4500 - 562.5\pi)\ cm^3s^{-1}$.

٢١ – يرشح محلول من مصفاة مخروطية عمقها $60\ cm$ وقطر قاعدتها $40\ cm$ ، إلى وعاء اسطوانى قطره $30\ cm$. بأى معدل يرتفع مستوى المحلول فى الإسطوانة عندما يكون المحلول فى المصـفاة على ارتفاع $30\ cm$ ومعدل هبوط مستـواه $2.5\ cm/min$. ج : $10/9\ cm/min$.

الفصل الثانى عشر

اشـــتقاق الدوال المثلثية



شكل ١٢ – ١

المقيـــاس الدائرى : لنرمز بـ s لطول القوس AB المقابل للزاوية المركزية AOB لدائرة نصف قطرها r ، ولنرمز بـ S لمساحة القطاع AOB (إذا كانت s تساوى $1/360$ من محيط الدائرة فإن $\angle AOB = 1^\circ$ وإذا كان $s = r$ فإن الزاوية AOB تساوى قطرى أى $\angle AOB = 1$ rad) .

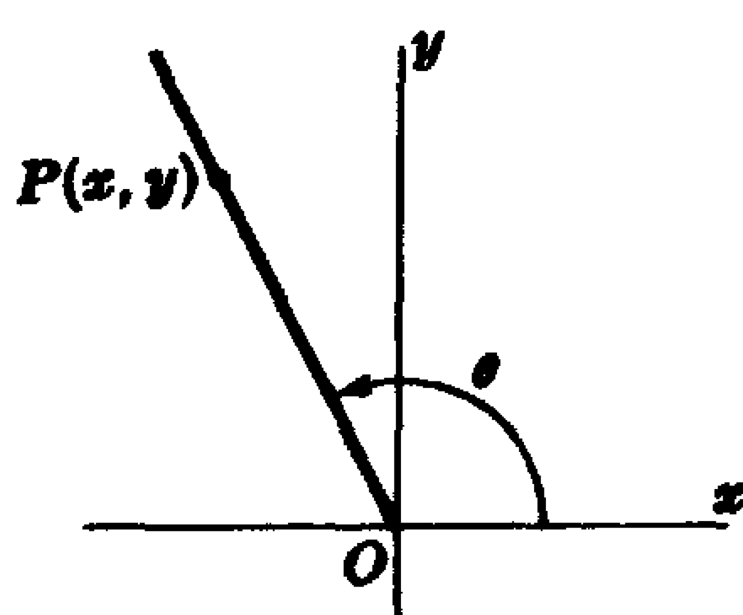
لنفرض الآن أن قياس $\angle AOB$ يساوى α درجة عندئذ :

$$S = \frac{\pi}{360}\alpha r^2 \quad \text{و} \quad s = \frac{\pi}{180}\alpha r \qquad (\text{i})$$

ولنفرض بعد ذلك أن قياس $\angle AOB$ يساوى θ rad عندئذ :

$$S = \tfrac{1}{2}\theta r^2 \quad \text{و} \quad S = \theta r \qquad (\text{ii})$$

وبمقارنة (i) مع (ii) يتضح لنا فائدة استعمال المقياس القطرى .



شكل ١٢ – ٢

الدوال المثلثية : ليكن θ عدداً حقيقياً . ارسم الزاوية التى قياسها يساوى θ rad بحيث يقع رأسها فى نقطة الأصل من مجموعة محاور إحداثية قائمة وبحيث ينطبق الضلع الأول (الإبتدائى) للزاوية على المحور x الموجب . لتكن $P(x, y)$ على الضلع الثانى (النهائى) للزاوية وعلى بعد يساوى وحدة المسافة عن O عندئذ يكون $\sin\theta = y$ و $\cos\theta = x$ إن حيز التعريف لكل من $\sin\theta$ و $\cos\theta$ هو فئة الأعداد الحقيقية أما مدى $\sin\theta$ فهو $-1 \le y \le 1$ ومدى $\cos\theta$ هو $-1 \le x \le 1$.

وينتج أن :
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{و} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

مدى كل من $\tan\theta$ و $\sec\theta$ هو فئة الأعداد الحقيقية فى حين يكون حيز التعريف ($\cos\theta \neq 0$) هو $\theta \neq \pm \frac{2n-1}{2}\pi$ و ($n = 1, 2, 3, \ldots$) وتترك للقارىء كتمرين ، أن ينظر فى الدالتين $\cot\theta$ و $\csc\theta$

سنبرهن فى المسأله ١ أن :

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

(أما إذا قدرنا الزاوية بالدرجات فإن النهاية تكون $\pi/180$. ومن أجل هذا السبب يفضل فى حساب التفاضل والتكامل استعمال المقياس القطرى دائماً) .

قواعد الاشتقاق : لتكن u دالة قابلة للاشتقاق فى x عندئذ :

١٤ $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$

١٥ $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$

١٦ $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$

١٧ $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$

١٨ $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$

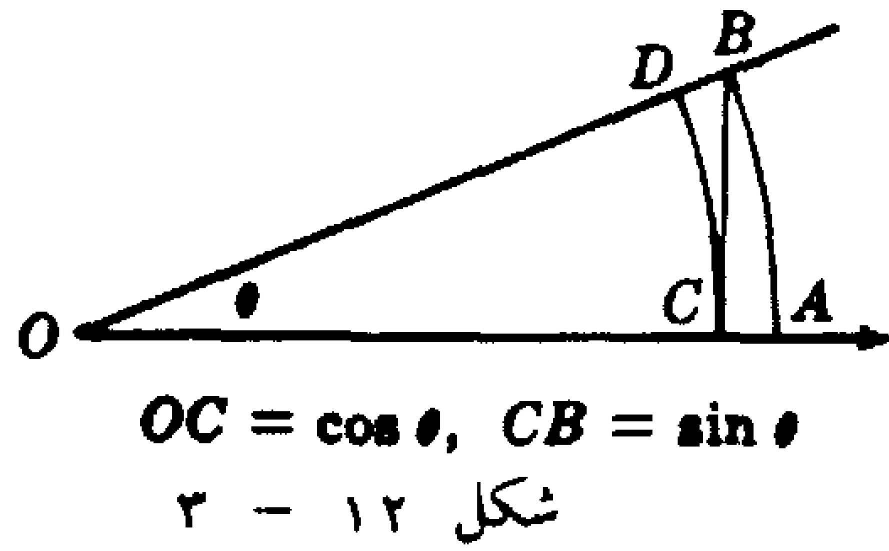
١٩ $\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$

أنظر المسائل ٢ – ٢٣

مســــائل محلولة

١ – أثبت أن $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

بما أن $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-\theta)}{-\theta}$ فإننا نكتفى ببرهان $\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta}$.



$OC = \cos\theta,\ CB = \sin\theta$

شكل ١٢ – ٣

فى الشكل ١٢ – ٣ الزاوية $\angle AOB = \theta$ زاوية مركزية موجبة وصغيرة من دائرة نصف قطرها $OA = 1$. لنرمز بـ C لموقع العمود النازل من B على OA ولنرمز بـ D لتقاطع OB مع القوس الذى نصف قطره OC نلاحظ أن :

$$\text{القطاع } COD \le \text{المثلث } COB \le \text{القطاع } AOB$$

وبالتالى فإن $\frac{1}{2}\theta\cos^2\theta \le \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \le \frac{1}{2}\theta$

وبالقسمة على $\frac{1}{2}\theta\cos\theta > 0$ نجد أن :

$$\cos\theta \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le \frac{1}{\cos\theta}$$

فإذا جعلنا $\theta \to 0^+$ نلاحظ أن $\cos\theta \to 1$ و $\frac{1}{\cos\theta} \to 1$ وأن $1 \le \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$ وبالتالى فإن

$$\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

٢ – استنتج أن $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$، بفرض u دالة قابلة للاشتقاق فى x .

ليكن $y = \sin u$

عندئذ :

$$y + \Delta y = \sin(u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \sin(u+\Delta u) - \sin u = 2\cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\sin\tfrac{1}{2}\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0}\cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}\Delta u}{\frac{1}{2}\Delta u} = \cos u$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نجد أن : $\frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{du}(\sin u)\cdot\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$

٣ - $\frac{d}{dx}(\cos u) = \frac{d}{dx}[\sin(\frac{1}{2}\pi - u)] = \frac{d}{du}[\sin(\frac{1}{2}\pi - u)]\frac{du}{dx} = -\cos(\frac{1}{2}\pi - u)\frac{du}{dx} = -\sin u\frac{du}{dx}$.

٤ - $\frac{d}{dx}(\tan u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin u}{\cos u}\right) = \frac{\cos u \cdot \cos u\frac{du}{dx} - \sin u\left(-\sin u\frac{du}{dx}\right)}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}\frac{du}{dx} = \sec^2 u\frac{du}{dx}$.

أوجد المشتق الأول في المسائل ٥ - ١٢ .

٥ - $y = \sin 3x + \cos 2x. \quad y' = \cos 3x\frac{d}{dx}(3x) - \sin 2x\frac{d}{dx}(2x) = 3\cos 3x - 2\sin 2x$

٦ - $y = \tan x^2. \quad y' = \sec^2 x^2\frac{d}{dx}(x^2) = 2x\sec^2 x^2$

٧ - $y = \tan^2 x = (\tan x)^2. \quad y' = 2\tan x\frac{d}{dx}(\tan x) = 2\tan x\sec^2 x$

٨ - $y = \cot(1-2x^2). \quad y' = -\csc^2(1-2x^2)\frac{d}{dx}(1-2x^2) = 4x\csc^2(1-2x^2)$

٩ - $y = \sec^3\sqrt{x} = \sec^3 x^{1/2}$.

$$y' = 3\sec^2 x^{1/2}\frac{d}{dx}(\sec x^{1/2}) = 3\sec^2 x^{1/2}\cdot\sec x^{1/2}\tan x^{1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{3}{2\sqrt{x}}\sec^3\sqrt{x}\tan\sqrt{x}$$

١٠ - $\rho = \sqrt{\csc 2\theta} = (\csc 2\theta)^{1/2}$.

$$\rho' = \tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\csc 2\theta) = -\tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2}\cdot\csc 2\theta\cot 2\theta\cdot 2 = -\sqrt{\csc 2\theta}\cdot\cot 2\theta$$

١١ - $f(x) = x^2\sin x. \quad f'(x) = x^2\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x^2) = x^2\cos x + 2x\sin x$

١٢ - $f(x) = \frac{\cos x}{x}. \quad f'(x) = \frac{x\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(x)}{x^2} = \frac{-x\sin x - \cos x}{x^2}$

أوجد المشتقة المشار إليها في المسائل ١٣ - ١٦

١٣ - $y = x\sin x; \; y'''$.

$$\begin{aligned} y' &= x\cos x + \sin x \\ y'' &= x(-\sin x) + \cos x + \cos x = -x\sin x + 2\cos x \\ y''' &= -x\cos x - \sin x - 2\sin x = -x\cos x - 3\sin x \end{aligned}$$

١٤ - $y = \tan^2(3x-2); \; y''$.

$$\begin{aligned} y' &= 2\tan(3x-2)\sec^2(3x-2)\cdot 3 = 6\tan(3x-2)\sec^2(3x-2) \\ y'' &= 6[\tan(3x-2)\cdot 2\sec(3x-2)\cdot\sec(3x-2)\tan(3x-2)\cdot 3 + \sec^2(3x-2)\sec^2(3x-2)\cdot 3] \\ &= 36\tan^2(3x-2)\sec^2(3x-2) + 18\sec^4(3x-2) \end{aligned}$$

١٥ - $y = \sin(x+y); \; y'. \quad y' = \cos(x+y)\cdot(1+y') \text{ and } y' = \frac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

١٦ - $\sin y + \cos x = 1; \; y''$.

$$\cos y\cdot y' - \sin x = 0 \quad \text{and} \quad y' = (\sin x)/(\cos y)$$

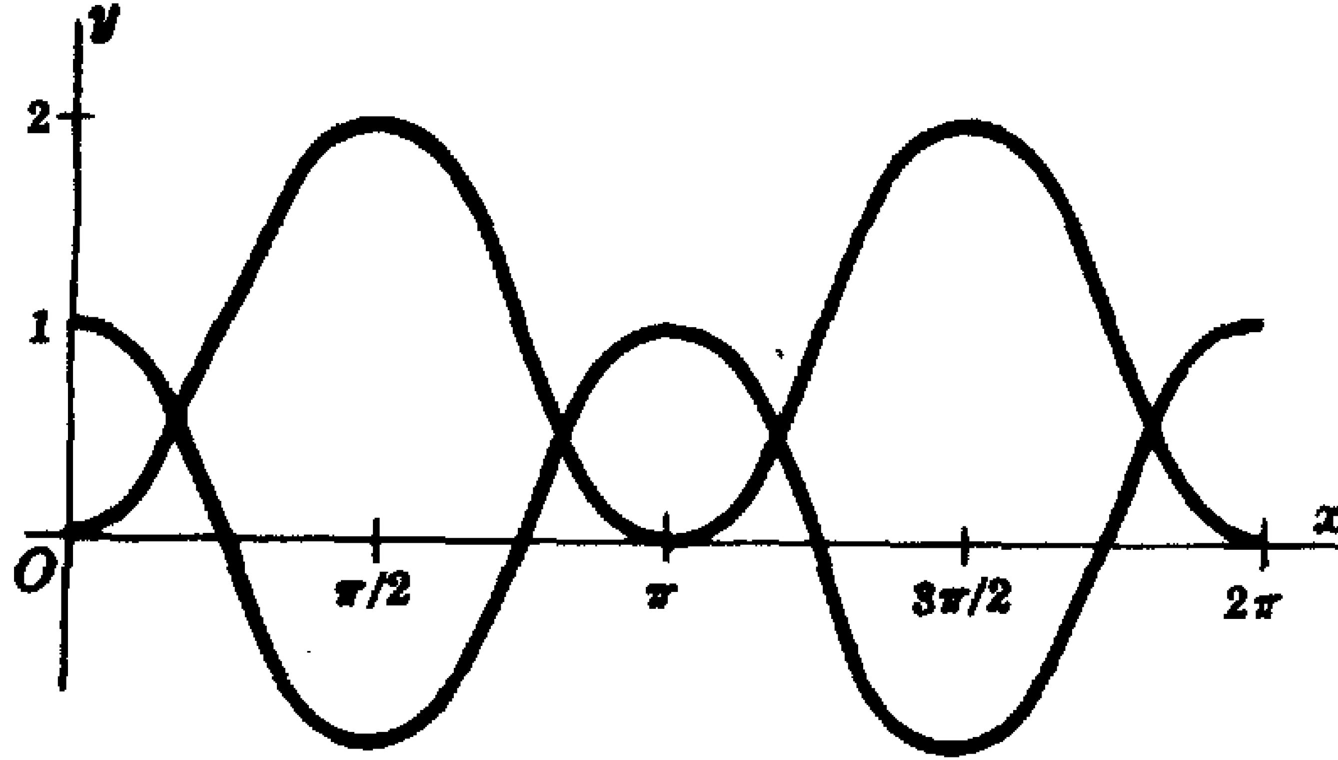
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\cos y\cos x - \sin x(-\sin y)\cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x\cos y + \sin x\sin y\cdot y'}{\cos^2 y} \\ &= \frac{\cos x\cos y + \sin x\sin y(\sin x)/(\cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x\cos^2 y + \sin^2 x\sin y}{\cos^3 y} \end{aligned}$$

١٧ — أوجد $f'(\pi/3),\ f''(\pi/3),\ f'''(\pi/3)$ بفرض أن $f(x) = \sin x \cos 3x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \sin x \sin 3x + \cos 3x \cos x \\ &= (\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) - 2 \sin x \sin 3x \\ &= \cos 4x - 2 \sin x \sin 3x. \qquad f'(\pi/3) = -\tfrac{1}{2} - 2(\sqrt{3}/2)(0) = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -4 \sin 4x - 2(3 \sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x) \\ &= -4 \sin 4x - 2(\sin x \cos 3x + \sin 3x \cos x) - 4 \sin x \cos 3x \\ &= -6 \sin 4x - 4f(x). \qquad f''(\pi/3) = -6(-\sqrt{3}/2) - 4(\sqrt{3}/2)(-1) = 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$f'''(x) = -24 \cos 4x - 4f'(x). \qquad f'''(\pi/3) = -24(-\tfrac{1}{2}) - 4(-\tfrac{1}{2}) = 14$$



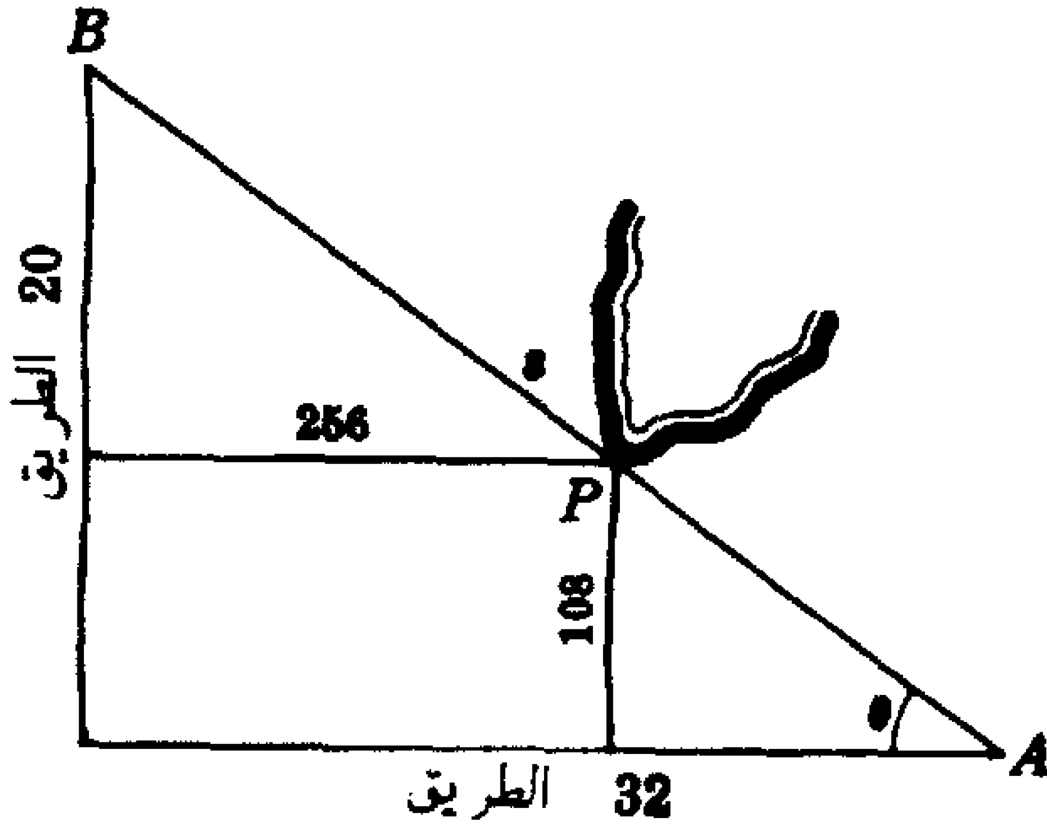
شكل ١٢ — ٤

١٨ — أوجد زاوية التقاطع الحادة للمنحنيين (١) $y = 2\sin^2 x$
(٢) $y = \cos 2x$ فى الفترة: $0 < x < 2\pi$.

(ا) نحل المعادلة $2\sin^2 x = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
فنحصل على الإحداثيات السينية لنقط التقاطع $\pi/6$ و $5\pi/6$ و $7\pi/6$ و $11\pi/6$.

(ب) $y' = 4 \sin x \cos x$ للمنحنى (١)
و $y' = -2 \sin x$ للمنحنى (٢)
ويكون عند النقطة $\pi/6$ ، $m_1 = \sqrt{3}$ و $m_2 = -\sqrt{3}$

(جـ) $\tan \phi = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$ وزاوية التقاطع الحادة تساوى 60° كذلك تكون زاوية التقاطع الحادة عند كل من النقط المتبقية مساوية 60° .

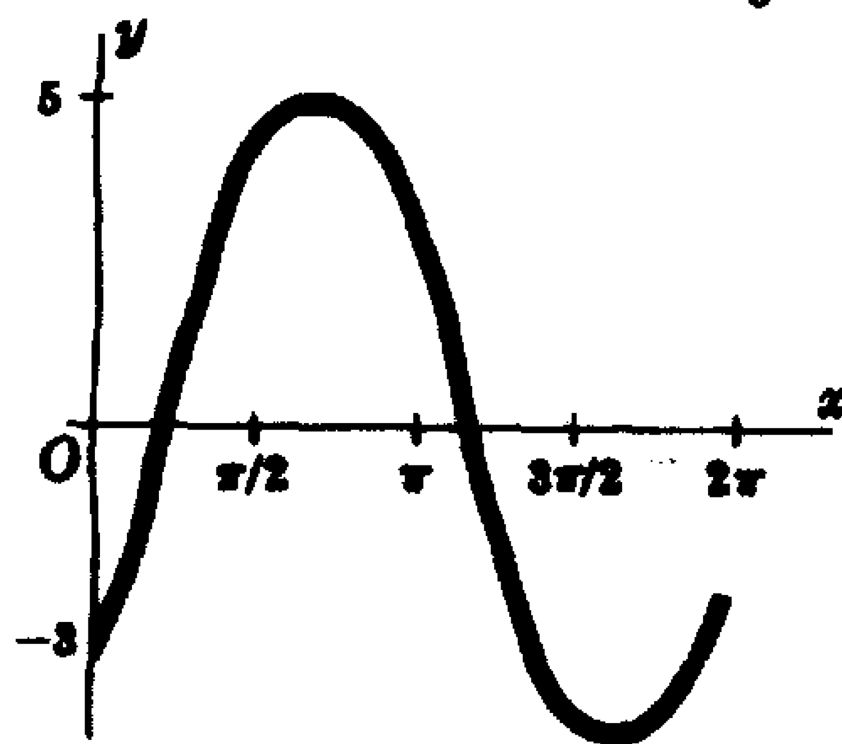


شكل ١٢ — ٥

١٩ — ضلعان متجاوران لقطعة أرض مستطيلة يمتدان على الطريقين العامين 20 و 32 . يوجد فى قطعة الأرض بحيرة صغيرة يبتعد أحد أطرافها عن الطريق 20 مسافة 256 m وعن الطريق 32 المسافة 256 m .
أوجد أقصر الطرق المستقيمة طولا الذى يقطع الأرض من أحد الطريقين العامين إلى الآخر بحيث يمر بذلك الطرف المشار إليه من البحيرة .
ليكن s طول الطريق المطلوب و θ الزاوية التى يصنعها مع الطريق العام 32 .

$$\begin{aligned} s &= AP + PB = 108 \csc\theta + 256 \sec\theta \\ ds/d\theta &= -108 \csc\theta \cot\theta + 256 \sec\theta \tan\theta \\ &= \frac{-108 \cos^3\theta + 256 \sin^3\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \end{aligned}$$
ومنه

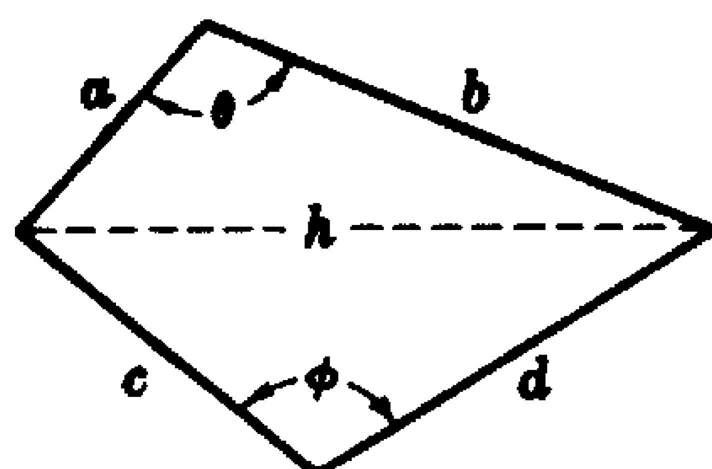
ومنه، $-108 \cos^3\theta + 256 \sin^3\theta = 0$, و $\tan^3\theta = 27/64$ والقيمة الحرجة هى $\theta = \arctan 3/4$
وبالتالى فإن $s = 108 \csc\theta + 256 \sec\theta = 108(5/3) + 256(5/4) = 500$ m.



شكل ١٢ — ٦

٢٠ — ادرس المنحنى $y = f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$ فى الفترة: $[0, 2\pi]$
عندما $x = 0$ تكون $y = f(0) = 4(0) - 3(1) = -3$
وحيث أن $f(x) = 4 \sin x - 3 \cos x$. فإذا وضعنا $f(x) = 0$
نجد أن $x = 3/4$ وأن المنحنى يقطع المحور x فى $x = .64$ rad
و $x = \pi + 0.64 = 3.78$ rad وإن $f'(x) = 4 \cos x + 3 \sin x$.
فإذا وضعناه $f'(x) = 0$ نجد $\tan x = -4/3$
والقيم الحرجة هى $x = \pi - .93 = 2.21$ و $x = 2\pi - .93 = 5.35$

وأن $f''(x) = -4\sin x + 3\cos x$. فإذا وضعنا $f''(x) = 0$ نجد $\tan x = 3/4$
والنقط المرشحة لتكون نقط انعطاف هى $x = .64$ و $x = \pi + .64 = 3.78$.
وأن $f'''(x) = -4\cos x - 3\sin x$.
(ا) عندما $x = 2.21$ يكون $\sin x = 4/5$ و $\cos x = -3/5$ ومنه $f''(x) < 0$ و $x = 2.21$ فهناك قيمة عظمى نسبية $= 5$ ، وعندما $x = 5.35$ نجد قيمة صغرى نسبية $= -5$.
(ب) إن $f''(.64) \neq 0$ و $f'''(3.78) \neq 0$ ونقطتى الانعطاف هما : $(.64, 0)$ و $(3.78, 0)$.
(جـ) إن المنحنى مقعر لأعلى من $x = 0$ إلى $x = .64$ ومقعر لأسفل من $x = .64$ إلى 3.78 ومقعر لأعلى من $x = 3.78$ إلى 2π .



شكل ١٢ — ٧

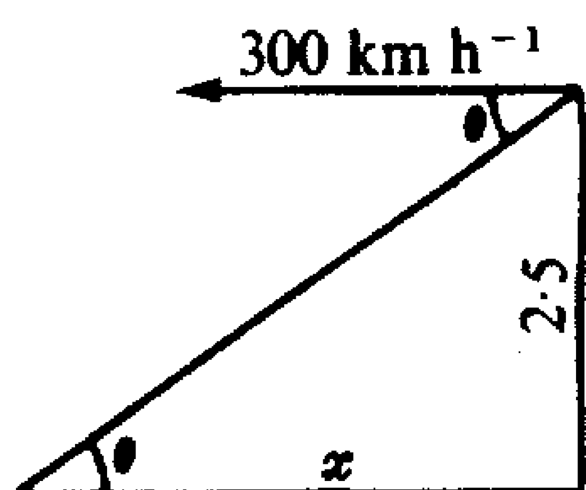
٢١ — ترتبط أربعة قضبان ، أطوالها d, c, b, a مع بعضها لتكون شكلا رباعياً . بين أن المساحة A تكون أكبر مايمكن عندما تكون الزاويتان المتقابلتان متكاملتين .
لنرمز بـ θ للزاوية بين القضيبين اللذين طوليهما b, a وبـ ϕ للزاوية المقابلة . ولنرمز بـ h لطول القطر المقابل لهاتين الزاويتين .
والمطلوب البحث عن القيمة العظمى لـ :
(١) $A = \frac{1}{2}ab\sin\theta + \frac{1}{2}cd\sin\phi$ والمقيدة بالشرط
(٢) $h^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\phi$. بالاشتقاق بالنسبة لـ x نجد :

$$\frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab\cos\theta + \frac{1}{2}cd\cos\phi\frac{d\phi}{d\theta} = 0 \quad (\text{١}') \qquad ab\sin\theta = cd\sin\phi\frac{d\phi}{d\theta} \quad (\text{٢}')$$

وبحل (٢') بالنسبة لـ $d\phi/d\theta$ والتعويض فى (١') نحصل على :

$$ab\cos\theta + cd\cos\phi\frac{ab\sin\theta}{cd\sin\phi} = 0 \quad \text{أو} \quad \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta = \sin(\phi+\theta) = 0$$

ومنه نجد $\theta + \phi$ مساوية للصفر أو لـ π ولكن الحالة الأولى مرفوضة كما يتبين بسهولة .

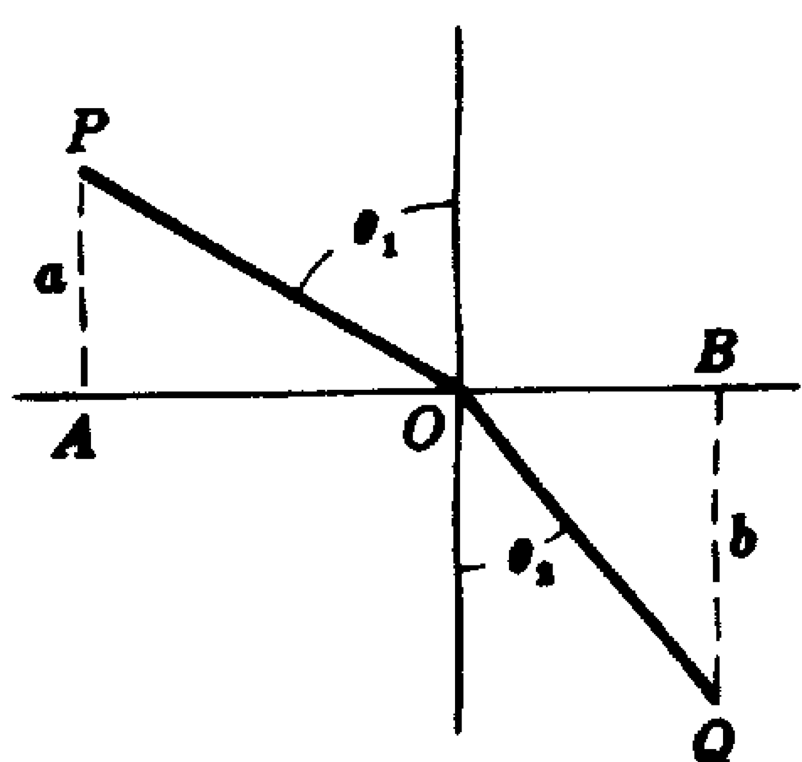


شكل ١٢ — ٨

٢٢ — قاذف للقنابل مسدد مباشرة نحو هدف على الأرض . فإذا كانت القذيفة تطير على علو 2.5 km فوق الأرض بمعدل 300 km/hr فبأية سرعة ينبغى أن ندير جهاز التسديد عندما تكون الزاوية بين مسار القذيفة وخط التسديد تساوى 30° ؟

$x = 2.5\cot\theta$ و $\frac{dx}{dt} = -300\ \text{km h}^{-1}, \theta = 30^\circ$.

$$\frac{dx}{dt} = -2.5\csc^2\theta\frac{d\theta}{dt} \text{ أو } -300 = -2.5(4)\frac{d\theta}{dt}, \text{ و } \frac{d\theta}{dt} = 30\ \text{rad/hr} = \frac{3}{2\pi}\ \text{deg/sec.}$$



شكل ١٢ — ٩

٢٣ — يسير شعاع ضوئى فى الهواء بسرعة v_1 من نقطة P على علو a وحدة فوق سطح جسم مائى إلى نقطة O على السطح ومن ثم يتابع سيره بسرعة v_2 إلى نقطة Q تقطع على مسافة b وحدة أسفل السطح . فإذا كانت الزاويتان اللتان يصنعهما OP و OQ مع العمود على السطح هما θ_1, θ_2 فبين أن المسار من P إلى Q أسرع مايمكن عندما تتحقق العلاقة $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$

لنرمز بـ t للفترة الزمنية اللازمة من P إلى Q وبـ c للمسافة من A إلى B عندئذ يكون :

$$t = \frac{a\sec\theta_1}{v_1} + \frac{b\sec\theta_2}{v_2} \quad \text{و} \quad c = a\tan\theta_1 + b\tan\theta_2$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ θ_1 نجد :

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec\theta_1 \tan\theta_1}{v_1} + \frac{b \tan\theta_2 \sec\theta_2}{v_2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad \text{و} \quad 0 = a \sec^2\theta_1 + b \sec^2\theta_2 \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على $\frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\frac{a \sec^2\theta_1}{b \sec^2\theta_2}$. ولكي تكون t أقصر ما يمكن يجب أن يكون :

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec\theta_1 \tan\theta_1}{v_1} + \frac{b \sec\theta_2 \tan\theta_2}{v_2}\left(-\frac{a \sec^2\theta_1}{b \sec^2\theta_2}\right) = 0$$

ومنه تنتج العلاقة المطلوبة .

مسائل اضافية

٢٤ ـ احسب القيم التالية (أ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$ ، (ب) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ،

(جـ) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{x \sin^2 3x}$ (د) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.

الجواب : (أ) 2 (ب) a/b (جـ) $8/9$ (د) 0 .

٢٥ ـ استنتج صيغة الاشتقاق (١٧) باستخدام (أ) $\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$ و (ب) $\cot u = \frac{1}{\tan u}$.

استنتج أيضاً صيغ الاشتقاق ١٨ و ١٩ .

في المسائل ٢٦ ـ ٤٥ أوجد المشتقة dy/dx أو المشتقة $d\rho/d\theta$.

٢٦ ـ $y = 3 \sin 2x$ ج : $6 \cos 2x$

٢٧ ـ $y = 4 \cos \frac{1}{2}x$ ج : $-2 \sin \frac{1}{2}x$

٢٨ ـ $y = 4 \tan 5x$ ج : $20 \sec^2 5x$

٢٩ ـ $y = \frac{1}{4} \cot 8x$ ج : $-2 \csc^2 8x$

٣٠ ـ $y = 9 \sec \frac{1}{3}x$ ج : $3 \sec \frac{1}{3}x \tan \frac{1}{3}x$

٣١ ـ $y = \frac{1}{4} \csc 4x$ ج : $y = -\csc 4x \cot 4x$

٣٢ ـ $y = \sin x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$ ج : $x \sin x + 2x + 4$

٣٣ ـ $\rho = \sqrt{\sin\theta}$ ج : $(\cos\theta)/(2\sqrt{\sin\theta})$

٣٤ ـ $y = \sin 2/x$ ج : $(-2 \cos 2/x)/x^2$

٣٥ ـ $y = \cos(1-x^2)$ ج : $2x \sin(1-x^2)$

٣٦ ـ $y = \cos(1-x)^2$ ج : $y = 2(1-x) \sin(1-x)^2$

٣٧ ـ $y = \sin^2(3x-2)$ ج : $3 \sin(6x-4)$

٣٨ ـ $y = \sin^3(2x-3)$ ج : $-\frac{3}{2}\{\cos(6x-9) - \cos(2x-3)\}$

٣٩ ـ $y = \frac{1}{2} \tan x \sin 2x$ ج : $\sin 2x$

٤٠ ـ $\rho = \frac{1}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ ج : $\frac{-3 \sec 2\theta \tan 2\theta}{(\sec 2\theta - 1)^{5/2}}$

٤١ ـ $\rho = \frac{\tan 2\theta}{1 - \cot 2\theta}$ ج : $2\,\frac{\sec^2 2\theta - 4 \csc 4\theta}{(1-\cot 2\theta)^2}$

٤٢ ـ $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$ ج : $x^2 \cos x$

٤٣ ـ $\sin y = \cos 2x$ ج : $\frac{2 \sin 2x}{\cos y}$

٤٤ ـ $\cos 3y = \tan 2x$ ج : $\frac{2 \sec^2 2x}{3 \sin 3y}$

٤٥ ـ $x \cos y = \sin(x+y)$ ج : $\frac{\cos y - \cos(x+y)}{x \sin y + \cos(x+y)}$

٤٦ – يفرض أن $x = A\sin kt + B\cos kt$ حيث A, B, k ثوابت بين أن $\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ و $\frac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-1)^n k^{2n} x$.

٤٧ – بين أن : (أ) $y'' + 4y = 0$ إذا كان $y = 3\sin(2x+3)$,

(ب) $y''' + y'' + y' + y = 0$ إذا كان $y = \sin x + 2\cos x$.

٤٨ – ادرس وارسم فى الفترة $0 \le x < 2\pi$:

(أ) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ (جـ) $y = x - 2\sin x$ (هـ) $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$

(ب) $y = \cos^2 x - \cos x$ (د) $y = \sin x(1 + \cos x)$

الجـــواب :

(أ) قيمة عظمى عند $x = \pi/4$ و$5\pi/4$ وقيمة صغرى عند $x = 3\pi/4, 7\pi/4$; ونقط انعطاف عند $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

(ب) قيمة عظمى عند $x = 0, \pi$ وقيمة صغرى عند $x = \pi/3, 5\pi/3$;

ونقط انعطاف عند $x = 32°32', 126°23', 233°37', 327°28'$

(جـ) قيمة عظمى عند $x = 5\pi/3$ وقيمة صغرى عند $x = \pi/3$ ونقط انعطاف عند $x = 0, \pi$.

(د) قيمة عظمى عند $x = \pi/3$ وقيمة صغرى عند $x = 5\pi/3$ ونقط انعطاف عند $x = 0, \pi, 104°29', 255°31'$

(هـ) قيمة عظمى عند $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ وقيمة صغرى عند $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$;

ونقط انعطاف عند $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11\pi/6$

٤٩ – إذا كانت زاوية ارتفاع الشمس $45°$ وإذا تناقصت هذه الزاوية بمعدل 1/4 rad / hr فبأية سرعة يزداد طول الظل الملقى على سطح الأرض لعمود طوله 16 m .

ج : 8 m / hr .

٥٠ – تعلو طائرة ورقية 60 m عن الأرض وتتحرك أفقياً بمعدل 5 m/sec فبأية نسبة يتناقص ميل الخيط عن الأفق بفرض أن طول الخيط الخارجى 120 m .

الجـــواب : 1/48 rad/sec .

٥١ – منارة دائرة موضوعة على بعد 1200 m من شاطىء مستقيم . فإذا كانت هذه المنارة تدور بمعدل 4π rad/min فبأية سرعة يمسح الشعاع الضوئى الشاطىء (ا) عند أقرب نقطة منه ؟ (ب) عند النقطة التى تبعد 1600 m من النقطة الأقـــرب ؟ .

ج : (أ) 80π m/s .

(ب) $2000\pi/9$ m/s .

٥٢ – طولا ضلعى مثلث 6 m و 8 m على الترتيب (آ) بأية سرعة يزداد طول الضلع الثالث عندما تكون الزاوية بين الضلعين المفروضين 60 وتزداد بمعدل $2°$ كل ثانية ؟ (ب) بأية سرعة تزداد المساحة ؟

ج : (أ) $2\pi/5\sqrt{39}$

(ب) $2\pi/15$ m²/s .

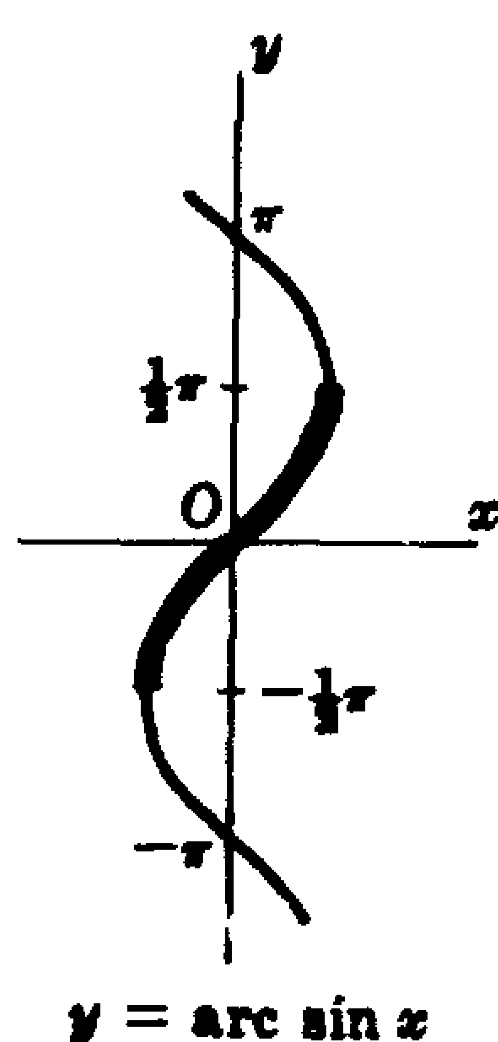
الفصل الثالث عشر

اشتقاق الدوال المثلثية العكسية

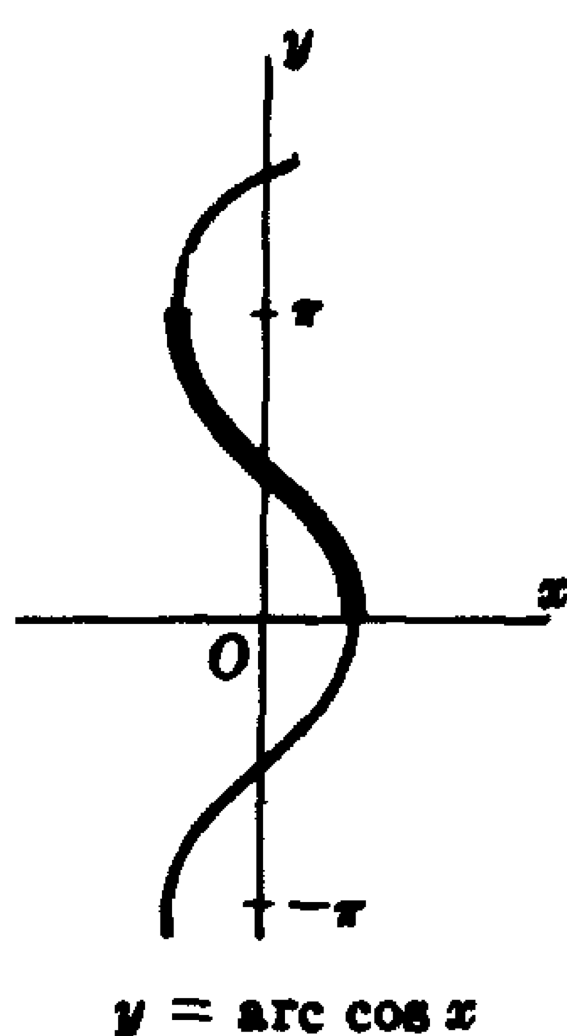
الدوال المثلثية العكسية :

إذا كانت $x = \sin y$ فإن الدالة العكسية تكتب بالشكل $y = \text{arc}\sin x$. حيز التعريف لـ $\text{arc}\sin x$ هو $-1 \leq x \leq 1$ ومدى $\sin y$ أو $\text{arc}\sin x$ هو فئة الأعداد الحقيقية وهو حيز التعريف لـ $\sin y$. ويمكن بشكل مماثل الحصول على حيز التعريف وعلى مدى كل من الدوال المثلثية العكسية الأخرى .

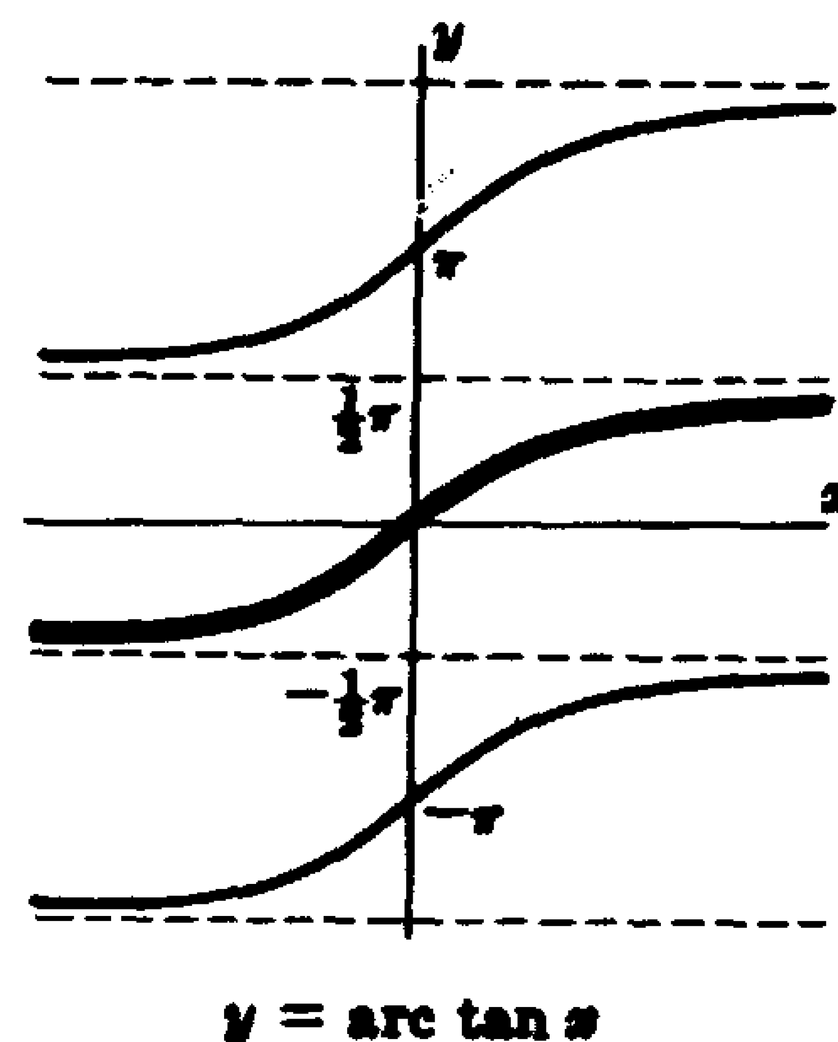
إن الدوال المثلثية العكسية متعددة القيم . ومن المتفق عليه أن يقسم المنحنى إلى أقواس وحيدة القيم . لنعرف فيما يلي قوسا من هذا النوع (يسمى الفرع الرئيسى) لكل دالة . ولقد ميزنا فى المنحنيات المرافقة الفرع الرئيسى بخط أسود عريض .



$y = \text{arc}\sin x$



$y = \text{arc}\cos x$



$y = \text{arc}\tan x$

شكل ١٢ ـــ ١

الدالة	الفرع الرئيسى
$y = \text{arc}\sin x$	$-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc}\cos x$	$0 \leqq y \leqq \pi$
$y = \text{arc}\tan x$	$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc}\cot x$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arc}\sec x$	$-\pi \leqq y < -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leqq y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc}\csc x$	$-\pi < y \leqq -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 < y \leqq \frac{1}{2}\pi$

قواعد الاشتقاق : لتكن u دالة قابلة للاشتقاق فى x عندئذ يكون :

٢٠ $$\frac{d}{dx}(\text{arc}\sin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{au}{dx}$$

٢٣ $$\frac{d}{dx}(\text{arc}\cot u) = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

٢١ $\frac{d}{dx}(\text{arc cos}\, u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$ ٢٤ $\frac{d}{dx}(\text{arc sec}\, u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

٢٢ $\frac{d}{dx}(\text{arc tan}\, u) = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$ ٢٥ $\frac{d}{dx}(\text{arc csc}\, u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$

مسائل محلولة

١ – استنتج (أ) $\frac{d}{dx}(\text{arc sin}\, u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, (ب) $\frac{d}{dx}(\text{arc sec}\, u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$.

(أ) ليكن $y = \text{arc sin}\, u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق فى x عندئذ يكون $u = \sin y$ ومنه

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dy}(\sin y)\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-u^2}\frac{dy}{dx}$$

لقد اخترنا الإشارة الموجبة لأن $\cos y \geq 0$ فى الفترة $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$ وهكذا نجد $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$.

(ب) ليكن $y = \text{arc sec}\, u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق فى x عندئذ يكون $u = \sec y$ ومنه .

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dy}(\sec y)\frac{dy}{dx} = \sec y\tan y\frac{dy}{dx} = u\sqrt{u^2-1}\frac{dy}{dx}$$

لقد اخترنا الاشارة الموجبة لأن $\tan y \geq 0$ فى الفترتين $0 \leq y < \frac{1}{2}\pi$ و $-\pi \leq y < -\frac{1}{2}\pi$ وهكذا نجد .

$$\frac{d}{dx}(\text{arc sec}\, u) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}.$$

أوجد المشتقة الأولى ، فى كل من المسائل ٢ – ٩ :

٢ – $y = \text{arc sin}\,(2x-3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\frac{d}{dx}(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$$

٣ – $y = \text{arc cos}\, x^2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\frac{d}{dx}(x^2) = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

٤ – $y = \text{arc tan}\, 3x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3x^2)^2}\frac{d}{dx}(3x^2) = \frac{6x}{1+9x^4}$$

٥ – $f(x) = \text{arc cot}\frac{1+x}{1-x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

٦ – $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\,\text{arc sin}\frac{x}{a}$

$$f'(x) = x\cdot\tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x) + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\cdot\frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

٧ – $y = x\,\text{arc csc}\frac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$

$$y' = x\left[\frac{-1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \text{arc csc}\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \text{arc csc}\frac{1}{x}$$

٨ ـ $y = \frac{1}{ab}\arc\tan\left(\frac{b}{a}\tan x\right)$

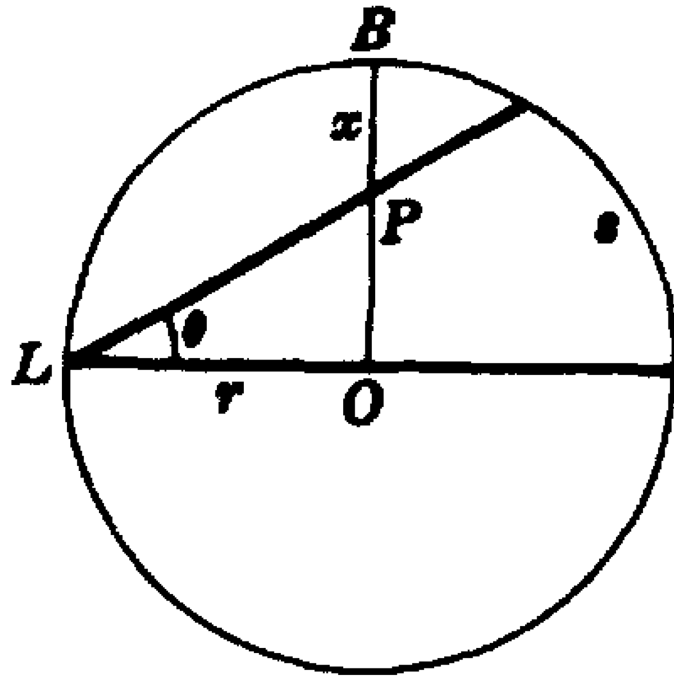
$$y' = \frac{1}{ab}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\tan x\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a}\tan x\right)\Big] = \frac{1}{ab}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2\tan^2 x}\cdot\frac{b}{a}\sec^2 x$$

$$= \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\tan^2 x} = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

٩ ـ $y^2\sin x + y = \arctan x$ ، $2yy'\sin x + y^2\cos x + y' = \frac{1}{1+x^2}$

$y'(2y\sin x + 1) = \frac{1}{1+x^2} - y^2\cos x$ ، ومنه $y' = \frac{1-(1+x^2)y^2\cos x}{(1+x^2)(2y\sin x+1)}$

١٠ ـ فى النقطة L من ميدان سباق دائرى يوجد منبع ضوئى . لنفرض أن صبيا انطلق من B راكضا بمعدل $3\ \mathrm{ms^{-1}}$ متجها نحو المركز O . فبأى معدل يتحرك ظله على محيط الميدان وذلك عندما يكون الصبى فى منتصف المسافة من B إلى O ؟



شكل ١٣ ـ ٢

لتكن P التى تبعد عن B بمقدار x m ، موضع الصبى فى اللحظة t ولنرمز بـ r لنصف قطر الميدان وبـ θ للزاوية OLP وبـ S للقوس الدائرى الذى تحدده θ عندئذ

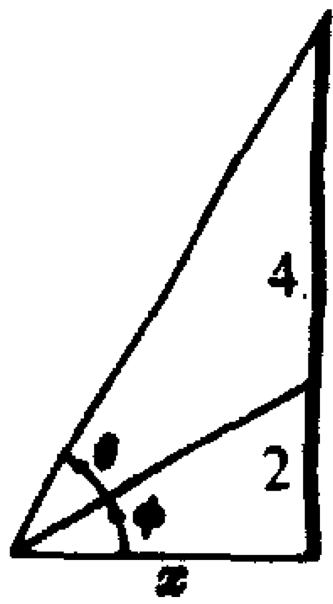
$$s = r\,(2\theta) \text{ ، } \theta = \arctan OP/LO = \arctan (r-x)/r.$$

$$\frac{ds}{dt} = 2r\frac{d\theta}{dt} = 2r\cdot\frac{1}{1+[(r-x)/r]^2}\cdot\left(-\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{-2r^2}{x^2-2rx+2r^2}\cdot\frac{dx}{dt}.$$

وعندما تكون $x = \frac{1}{2}r$ و $dx/dt = 3$ نجد $ds/dt = -4.8\ \mathrm{ms^{-1}}$.

والظل يتحرك على جدار الميدان بمعدل $4.8\ \mathrm{ms^{-1}}$.

١١ ـ يرتفع الطرف الأسفل لصورة عن الأرض 4 m ويعلو عن عينى مشاهد 2 m فإذا قبلنا أنه يمكن الحصول على أفضل مشهد عندما تكون الزاوية التى يرى المشاهد من خلالها الصورة أكبر ما يمكن ، فأوجد على أى بعد من الجدار ينبغى أن يقف المشاهد ؟



شكل ١٣ ـ ٣

لنرمز بـ θ للزاوية التى يرى المشاهد من خلالها الصورة وبـ x لبعده عن الجدار . من الشكل ١٣ ـ ٣ نجد $\tan\phi = 2/x$ و $\tan(\theta+\phi) = 6/x$.

$$\tan\theta = \tan\{(\theta+\phi)-\phi\} = \frac{\tan(\theta+\phi)-\tan\phi}{1+\tan(\theta+\phi)\tan\phi} = \frac{6/x-2/x}{1+(6/x)(2/x)} = \frac{4x}{x^2+12}$$

ومنه $\theta = \arctan\frac{4x}{x^2+12}$ وبالتالى $\frac{d\theta}{dx} = \frac{4(-x^2+12)}{x^4+40x^2+144}$ والقيمة الحرجة هى $x = 2\sqrt{3} = 3.5$ وهكذا نجد أن على المشاهد أن يقف على بعد 3.5 m من الجدار .

مسائل اضافية

١٢ – استنتج صيغة الاشتقاق ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٥

أوجد dy/dx فى كل من المسائل ١٣ – ٢٠

١٣ – $y = \text{arc sin } 3x$ ج: $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$ ١٧ – $y = x^2 \text{ arc cos } 2/x$ ج: $2x\left(\text{arc cos } \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

١٤ – $y = \text{arc cos } \frac{1}{2}x$ ج: $-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ١٨ – $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \text{arc sin } \dfrac{x}{a}$ ج: $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

١٥ – $y = \text{arc tan } 3/x$ ج: $-\dfrac{3}{x^2+9}$ ١٩ – $y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2 \text{ arc sin } \dfrac{x-a}{a}$ ج: $2\sqrt{2ax-x^2}$

١٦ – $y = \text{arc sin } (x-1)$ ج: $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ ٢٠ – $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \dfrac{1}{2} \text{ arc sec } \dfrac{x}{2}$ ج: $\dfrac{8}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

٢١ – يراد وضع منبع ضوئى فوق المركز مباشرة لقطعة أرض دائرية الشكل نصف قطرها 10 m على أن يكون ارتفاع المنبع عن المركز بحيث تكون شدة الإضاءة على حواف القطعة أكبر ما يمكن . أوجد هذا الارتفاع بفرض أن شدة الإضاءة عند أى نقطة من الحواف تتناسب طرديا مع جيب تمام زاوية السقوط (الزاوية بين شعاع الضوء والعمودى) وعكسيا مع مربع البعد عن المنبع .

إرشاد : لنفرض x الارتفاع المطلوب ، ولنرمز بـ y لبعد المنبع عن نقطة من الحواف وبـ θ لزاوية السقوط عندئذ يكون $I = k\dfrac{\cos\theta}{y^2} = \dfrac{kx}{(x^2+100)^{3/2}}$. ج : $5\sqrt{2}$ m

٢٢ – تبدأ باخرتان فى الإبحار من نقطة A فى آن واحد ، غير أن واحدة منها تبحر نحو الجنوب بمعدل 24 km hr^{-1} فى حين تبحر الثانية نحو الشرق بمعدل 40 km hr^{-1} لمدة ساعة واحدة ثم تدور نحو الشمال . أوجد سرعة دوران المستقيم الذى يصل بين الباخرتين وذلك بعد مضى 3 hr . ج : 30/193 rad/hr .

الفصل الرابع عشر

اشتقاق الدوال الأسية واللوغارتمية

يعرف العدد e كما يلي :

$$e = \lim_{h \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^h = \lim_{k \to 0} (1 + k)^{1/k}$$

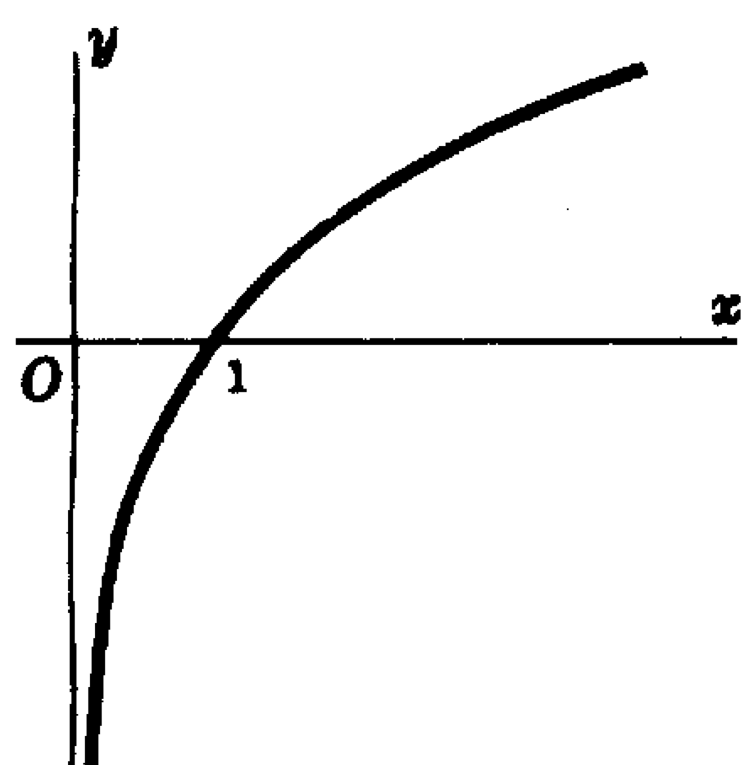
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2.718\,28\ldots$$

انظر المسألة ١

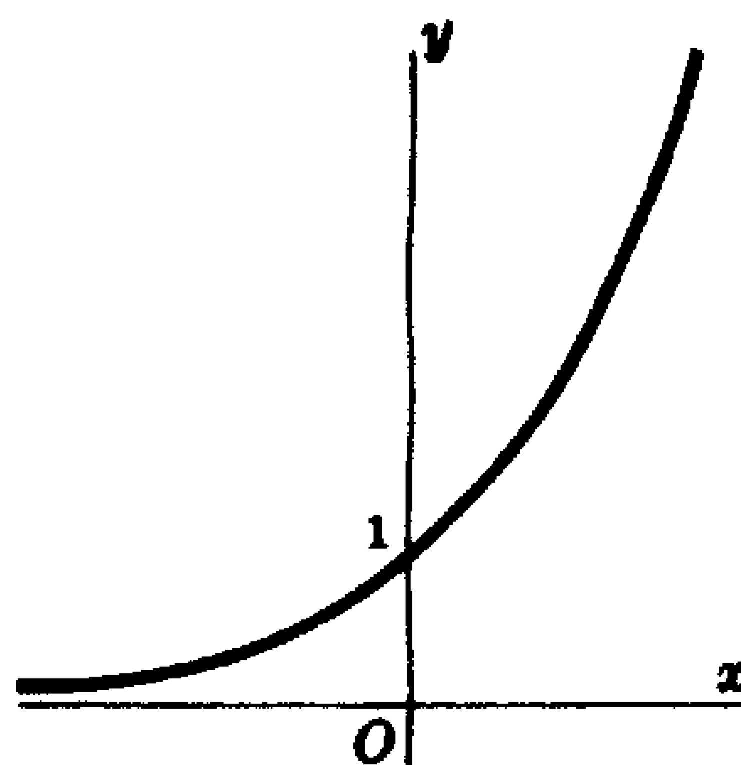
ملاحظة : إذا كان $a > 0$ و $a \neq 1$ وإذا كان $a^y = x$ فإن $y = \log_a x$.

$$y = \log_e x = \ln x \qquad y = \log_{10} x = \log x$$

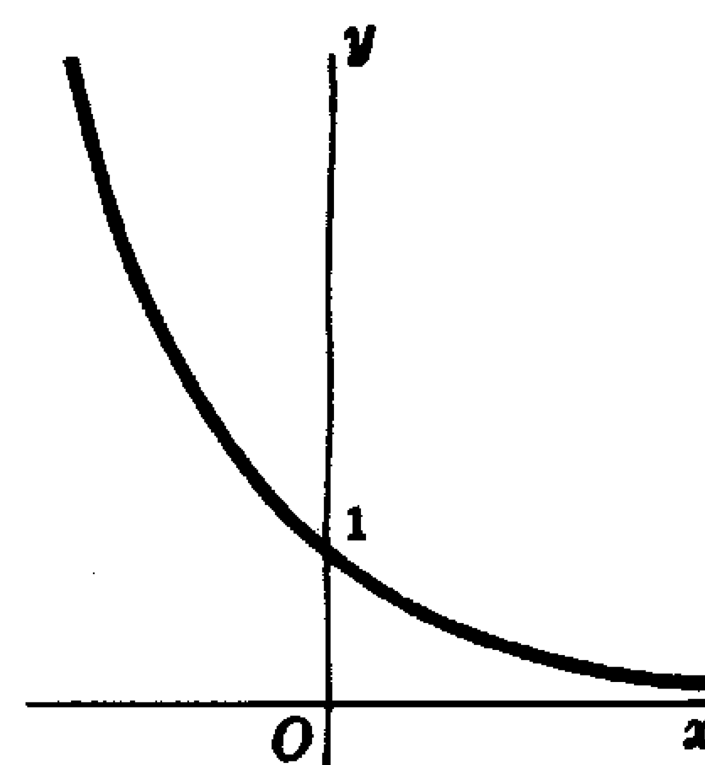
إن حيز التعريف $x \geq 0$ وأما المدى فهو فئة الأعداد الحقيقية .



$y = \ln x$



$y = e^{ax}$



$y = e^{-ax}$

شكل ١٤ — ١

قواعد الاشتقاق : إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق فى x فإن :

٢٦ — $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}, \ (a > 0, \ a \neq 1)$

٢٧ — $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$

٢٨ — $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \ (a > 0)$

٢٩ — $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

انظر المسائل ٢ — ١٧

الاشتقاق اللوغاريتمى : إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق $y = f(x)$ مكونة من حاصل ضرب عدة عوامل فإنه يمكن تبسيط طريقة اشتقاقها ، وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للدالة قبل الاشتقاق ، أى اننا ، بعبارة مكافئة ، نستعمل الصيغة :

٣٠ – $$\frac{d}{dx}(y) = y\frac{d}{dx}(\ln y)$$

انظر المسائل ١٨ – ١٩

مسائل محلولة

١ – تحقق من كون $2 < \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$

باستخدام نظرية ذات الحدين ، عندما n عدد صحيح موجب نجد :

(i)
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} \\ &\quad + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}\end{aligned}$$

ومنه يتضح أنه لجميع قيم $n \neq 1$ فإن $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$ كذلك إذا استبدلنا فى (i) كل فرق من $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots$ العدد 1 الذى يكبره فإننا نجد :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \left(\text{لأن } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &< 3 \qquad \left(\text{لأن } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1\right)\end{aligned}$$

وبالتالى فإن $$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

فإذا جعلنا الآن $n \to \infty$ على القيم الصحيحة الموجبة فإنه يكون :

$1 - \frac{1}{n} \to 1,\ 1 - \frac{2}{n} \to 1,\ \ldots,$ و $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} \to \frac{1}{k!}$

ويترتب على هذه النتيجة :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = 2.718\,28\ldots$$

٢ – استنتج $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}$ ، $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$

لتكن $y = \log_a u$, حيث u دالة قابلة للاشتقاق فى x عندئذ يكون :

$$y + \Delta y = \log_a (u + \Delta u)$$
$$\Delta y = \log_a (u + \Delta u) - \log_a u = \log_a \frac{u + \Delta u}{u} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}\log_a\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\Delta u}\log_a\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\log_a\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}$$

و

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\lim_{\Delta u \to 0}\log_a\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u}\log_a\left\{\lim_{\Delta u \to 0}\left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right\} = \frac{1}{u}\log_a e$$

وهكذا نجد ، باستخدام قاعدة السلسلة :
$$\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{du}(\log_a u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}.$$

فإذا كان $a = e$ يكون $\log_a e = \log_e e = 1$ وبالتالى
$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}.$$

٣ – $y = \log_a(3x^2 - 5)$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 - 5}\log_a e\cdot\frac{d}{dx}(3x^2 - 5) = \frac{6x}{3x^2 - 5}\log_a e$$

٤ – $y = \ln(x + 3)^2 = 2\ln(x + 3)$
$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x + 3}\cdot\frac{d}{dx}(x + 3) = \frac{2}{x + 3}$$

٥ – $y = \ln^2(x + 3)$
$$y' = 2\ln(x + 3)\cdot\frac{d}{dx}[\ln(x + 3)] = 2\ln(x + 3)\cdot\frac{1}{x + 3}\cdot\frac{d}{dx}(x + 3) = \frac{2\ln(x + 3)}{x + 3}$$

٦ – $y = \ln(x^3 + 2)(x^2 + 3) = \ln(x^3 + 2) + \ln(x^2 + 3)$
$$y' = \frac{1}{x^3 + 2}\cdot\frac{d}{dx}(x^3 + 2) + \frac{1}{x^2 + 3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 3) = \frac{3x^2}{x^3 + 2} + \frac{2x}{x^2 + 3}$$

٧ – $f(x) = \ln\frac{x^4}{(3x - 4)^2} = \ln x^4 - \ln(3x - 4)^2 = 4\ln x - 2\ln(3x - 4)$
$$f'(x) = 4\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x) - 2\frac{1}{3x - 4}\frac{d}{dx}(3x - 4) = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x - 4}$$

٨ – $y = \ln\sin 3x$
$$y' = \frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin 3x) = 3\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = 3\cot 3x$$

٩ – $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
$$y' = \frac{1 + \frac{1}{2}(1 + x^2)^{-1/2}(2x)}{x + (1 + x^2)^{1/2}} = \frac{1 + x(1 + x^2)^{-1/2}}{x + (1 + x^2)^{1/2}}\cdot\frac{(1 + x^2)^{1/2}}{(1 + x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

١٠ – استنتج $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u\ln a\frac{du}{dx}$ و $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$.

ليكن $y = a^u$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق فى x . عندئذ يكون $\ln y = u\ln a$

$$\frac{dy}{dx} = y\ln a\frac{du}{dx}, \quad \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a\frac{du}{dx},$$
أو
$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u\ln a\frac{du}{dx}$$

فإذا كان $a = e$ يكون $\ln a = \ln e = 1$ وبالتالى نجد
$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}.$$

١١ – $y = e^{-\frac{1}{2}x}$
$$y' = e^{-\frac{1}{2}x}\frac{d}{dx}\left(-\tfrac{1}{2}x\right) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

١٢ – $y = e^{x^2}$
$$y' = e^{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = 2xe^{x^2}$$

١٣ ــ $y = a^{3x^2}$ $\qquad y' = a^{3x^2} \ln a \cdot \frac{d}{dx}(3x^2) = 6xa^{3x^2} \ln a$

١٤ ــ $y = x^2 3^x$ $\qquad y' = x^2 \cdot \frac{d}{dx}(3^x) + 3^x \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = x^2 3^x \ln 3 + 3^x 2x = x3^x(x \ln 3 + 2)$

١٥ ــ $y = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}}$

$$y' = \frac{(e^{ax} + e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax} - e^{-ax}) - (e^{ax} - e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax} + e^{-ax})}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$$

$$= \frac{(e^{ax} + e^{-ax})[a(e^{ax} + e^{-ax})] - (e^{ax} - e^{-ax})[a(e^{ax} - e^{-ax})]}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$$

$$= a\frac{(e^{2ax} + 2 + e^{-2ax}) - (e^{2ax} - 2 + e^{-2ax})}{(e^{ax} + e^{-ax})^2} = \frac{4a}{(e^{ax} + e^{-ax})^2}$$

١٦ ــ أوجد y'' بفرض أن $y = e^{-x} \ln x$.

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{x\frac{d}{dx}(e^{-x}) - e^{-x}\frac{d}{dx}(x)}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x} \ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \ln x\right)$$

١٧ ــ أوجد y'' بفرض أن $y = e^{-2x} \sin 3x$.

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\sin 3x) + \sin 3x \frac{d}{dx}(e^{-2x}) = 3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x = 3e^{-2x} \cos 3x - 2y$$

$$y'' = 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3 \cos 3x \frac{d}{dx}(e^{-2x}) - 2y'$$

$$= -9e^{-2x} \sin 3x - 6e^{-2x} \cos 3x - 2(3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x)$$

$$= -e^{-2x}(12 \cos 3x + 5 \sin 3x)$$

استخدم الاشتقاق اللوغاريتمى للحصول على المشتقة الأولى

١٨ ــ $y = (x^2+2)^3(1-x^2)^4$ $\qquad \ln y = \ln (x^2+2)^3(1-x^2)^4 = 3 \ln (x^2+2) + 4 \ln (1-x^2)$

$$y' = y\frac{d}{dx}[3 \ln (x^2+2) + 4 \ln (1-x^2)] = (x^2+2)^3(1-x^2)^4\left[\frac{6x}{x^2+2} - \frac{12x^3}{1-x^2}\right]$$

$$= 6x(x^2+2)^2(1-x^2)^3(1-4x-3x^2)$$

١٩ ــ $y = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}$ $\qquad \ln y = \ln x + 2 \ln (1-x^2) - \frac{1}{2} \ln (1+x^2)$

$$y' = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{4x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{x^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

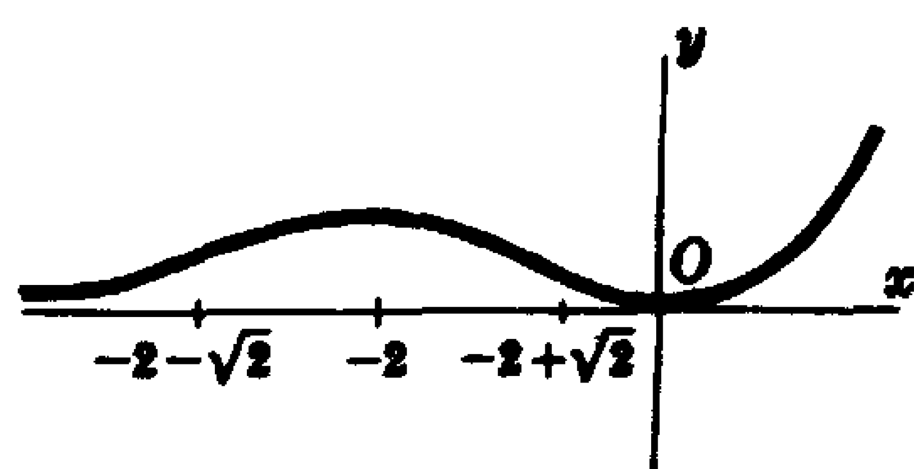
$$= \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$$

٢٠ ــ حدد (ا) مواضع نقط القيم العظمى والصغرى النسبية (ب) مواضع نقط الانعطاف للمنحنى $y = f(x) = x^2 e^x$.

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$

$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = e^x(2+4x+x^2)$$

$$f'''(x) = 6e^x + 6xe^x + x^2e^x = e^x(6+6x+x^2)$$



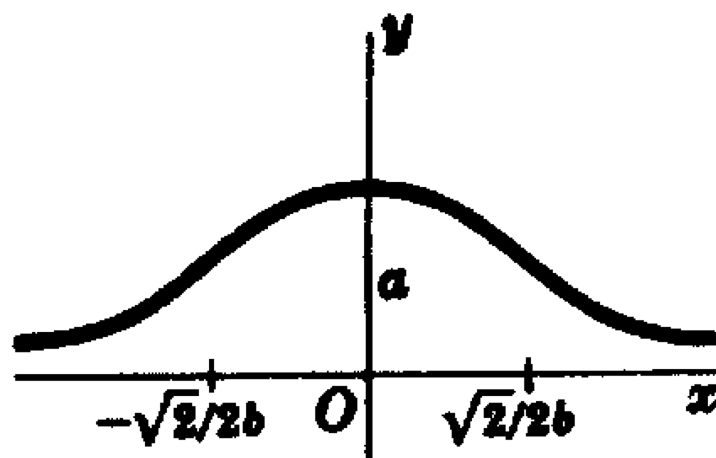
شكل ١٤ ــ ٢

(أ) بحل المعادلة $f'(x) = 0$ نجد القيمتين الحرجتين $x = 0$, $x = -2$ وبما إن $f''(0) > 0$ فالنقطة $(0,0)$ هي نقطة قيمة صغرى نسبية .

وبما أن $f''(-2) < 0$ فالنقطة $(-2,4/e^2)$ هي نقطة قيمة عظمى نسبية .

(ب) بحل المعادلة $f''(x) = 0$ نجــد أن نقط الانعطاف المتوقعة عند $x = -2 \pm \sqrt{2}$ وبما أن $f'''(-2+\sqrt{2}) \neq 0$ و $f'''(-2-\sqrt{2}) \neq 0$ فالنقطتان $x = -2 \pm \sqrt{2}$ نقطتا انعطاف .

٢١ – ادرس منحنى الاحتمال $y = ae^{-b^2x^2}$ و $a > 0$.



شكل ١٤ — ٣

(أ) إن المنحنى برمته يقع فوق المحور x لأن $e^{-b^2x^2} > 0$ لجميع قيم x .
وعندما $x \to \pm\infty$ فإن $y \to 0$ وهذا يعنى أن المحور x هو خط مقارب أفقى .

(ب) إن $y' = -2ab^2xe^{-b^2x^2}$ و $y'' = 2ab^2(2b^2x^2-1)e^{-b^2x^2}$.
وعندما $y' = 0$ يكون $x = 0$ وعندما $x = 0$ يكون $y'' < 0$
وبالتالى فإن النقطة $(0, a)$ هى نقطة قيمة عظمى للمنحنى .

(جـ) عندما $y'' = 0$ يكون $2b^2x^2 - 1 = 0$ ومنه تكون $x = \pm\sqrt{2}/2b$ نقطتى انعطاف محتملتين :

$\frac{-\sqrt{2}}{2b}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2b}$

$y'' > 0$ التقعر لأعلى	$y'' < 0$ التقعر لأسفل	$y'' > 0$ التقعر لأعلى

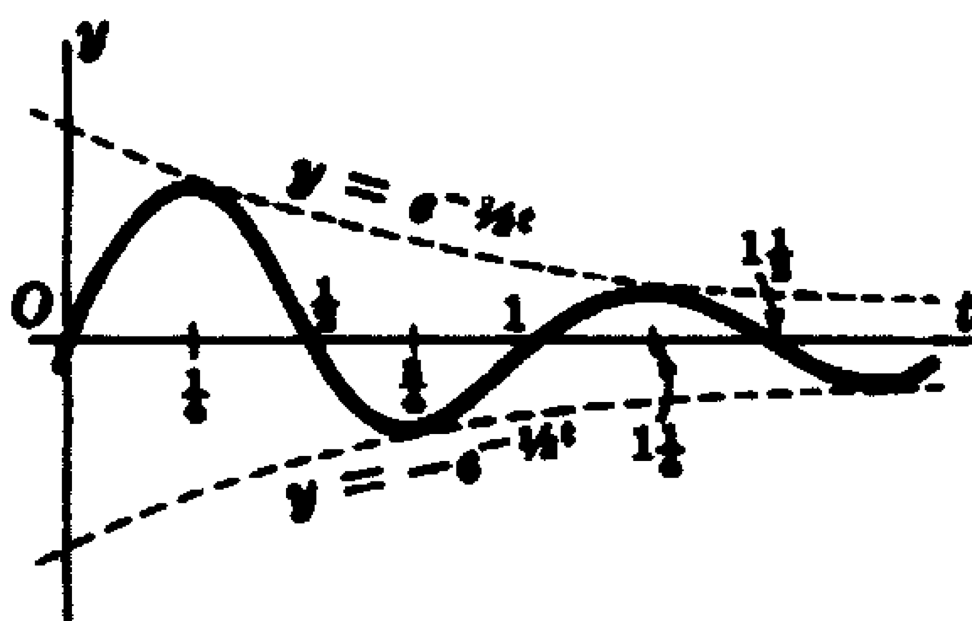
والنقطتان $(\pm\sqrt{2}/2b, ae^{-1/2})$ هما فعلا نقطتا انعطاف .

٢٢ – يتغير ثابت التوازن K لتفاعل كيميائى متوازن مع درجة الحرارة المطلقة T وفق القانون $K = K_0 e^{-\frac{1}{2}q(T-T_0)/T_0T}$, حيث T_0 و q و K_0 ثوابت . أوجد النسبة المئوية لمعدل تغير K لكل درجة تتغيرها T .

تعطى النسبة المئوية لمعدل تغير K لكل درجة تتغيرها T بـ $\frac{1}{K}\frac{dK}{dT} = \frac{d(\ln K)}{dT}$.

إذن $\ln K = \ln K_0 - \frac{1}{2}q\frac{T-T_0}{T_0T}$ و $\frac{d(\ln K)}{dT} = -\frac{q}{2T^2} = -\frac{50q}{T^2}\ \%$.

٢٣ – ادرس منحنى الاهتزاز المخمد $y = f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\sin 2\pi t$.



شكل ١٤ — ٤

(أ) عندما $t = 0$ ، $y = 0$ فالمنحنى يقطع المحور y فى النقطة 0
وعندما $y = 0$, $\sin 2\pi t = 0$, والمنحنى يقطع المحور t
فى النقط $t = \ldots, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.

(ب) عندما $t = \ldots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$ و $\sin 2\pi t = 1$ وبالتالى $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ ، وعندما $t = \ldots, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$ ، يكون $\sin 2\pi t = -1$ وبالتالى $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$.

فالمنحنى المفروض يهتز بين المنحنيين $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ و $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$ مماسا لهما عند النقط المذكورة.

(ﺟ)

$$y' = f'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(2\pi \cos 2\pi t - \tfrac{1}{2}\sin 2\pi t)$$
$$y'' = f''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\{(\tfrac{1}{4} - 4\pi^2)\sin 2\pi t - 2\pi \cos 2\pi t\}$$

وعندما $y' = 0$ ، $2\pi \cos 2\pi t - \frac{1}{2}\sin 2\pi t = 0,$ أي أن $\tan \pi t = 4\pi$ فإذا كانت $t = \xi = .237$ أصغر زاوية موجبة محققة لهذه العلاقة فإن النقط الحرجة تكون $\ldots, \xi - \frac{3}{2}, \xi - 1, \xi - \frac{1}{2}, \xi, \xi + \frac{1}{2}, \xi + 1, \ldots$

وحيث أن إشارتي $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ و $f''\left(\xi \pm \frac{n+1}{2}\right)$ متعاكستان عندما $n = 0,1,2,\ldots$ وإشارتي $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ و $f''\left(\xi \pm \frac{n+2}{2}\right)$ متماثلتان فإن القيم الحرجة تعطي على المنحنى نقطاً عظمى وصغرى بالتناوب.

وهذه النقط تقع قريبة من نقط الالتصاق مع المنحنيين $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ و $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$.

(د) عندما $\tan 2\pi t = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4} - 4\pi^2} = \dfrac{8\pi}{1 - 16\pi^2}.$

وإذا كانت $t = \eta = .475$ أصغر زاوية موجبة محققة لهذه العلاقة فإن نقط الانقلاب الممكنة هي $t =$ $\ldots, \eta - 1, \eta - \frac{1}{2}, \eta, \eta + \frac{1}{2}, \eta + 1, \ldots$ إن هذه النقط ، والتي تقع على يسار نقط تقاطع المنحنى مع المحور ، وقريبة منها ، هي فعلا نقط انعطاف.

٢٤ ـ تمثل المعادلة $s = ce^{-bt}\sin(kt + \theta),$ ، حيث k, b, c ، θ ثوابت ، حركة اهتزازية مخمدة (مبطأة) بين أن $a = -2bv - (k^2 + b^2)s.$

$$v = ds/dt = ce^{-bt}[-b\sin(kt+\theta) + k\cos(kt+\theta)]$$
$$\begin{aligned} a = dv/dt &= ce^{-bt}[(b^2 - k^2)\sin(kt+\theta) - 2bk\cos(kt+\theta)] \\ &= ce^{-bt}[-2b\{-b\sin(kt+\theta) + k\cos(kt+\theta)\} - (k^2+b^2)\sin(kt+\theta)] \\ &= -2bv - (k^2+b^2)s \end{aligned}$$

مسائل اضافية

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ في المسائل ٢٥ ـ ٣٥ :

٢٥ ـ $y = \ln(4x - 5)$ ج : $4/(4x - 5)$

٢٦ ـ $y = \ln\sqrt{3 - x^2}$ ج : $x/(x^2 - 3)$

٢٧ ـ $y = \ln 3x^5$ ج : $5/x$

٢٨ ـ $y = \ln(x^2 + x - 1)^3$ ج : $(6x + 3)/(x^2 + x - 1)$

٢٩ ـ $y = x \cdot \ln x - x$ ج : $\ln x$

٣٠ ـ $y = \ln(\sec x + \tan x)$ ج : $\sec x$

٣١ ـ $y = \ln(\ln \tan x)$ ج : $2/(\sin 2x \ln \tan x)$

٣٢ ـ $y = (\ln x^2)/x^2$ ج : $(2 - 4\ln x)/x^3$

٣٣ ـ $y = \frac{1}{5}x^5(\ln x - \frac{1}{5})$ ج : $x^4 \ln x$

٣٤ ـ $y = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$ ج : $2\sin \ln x$

٣٥ ـ $y = x\ln(4 + x^2) + 4\arctan \frac{1}{2}x - 2x$ ج : $\ln(4 + x^2)$

٣٦ – أوجد معادلة مماس المنحنى $y = \ln x$ عند أى نقطة من نقطه (x_0, y_0) .

استخدم نقطة تقاطع المماس مع المحور y كى تحصل على إنشاء بسيط لمستقيم المماس .

٣٧ – ناقش $y = x^2 \ln x$ وارسمه . ج : قيمة صغرى عند $x = 1/\sqrt{e}$ ونقطة انعطاف عند $x = 1/e^{3/2}$.

٣٨ – بين أن زاوية تقاطع المنحنى $y = \ln(x - 2)$ مع المنحنى $y = x^2 - 4x + 3$ عند النقطة $(3, 0)$ هى $\phi = \text{arc tan } 1/3$.

أوجد dy/dx فى المسائل ٣٩ – ٤٦ .

٣٩ – $y = e^{5x}$ ج : $5e^{5x}$

٤٠ – $y = e^{x^3}$ ج : $3x^2 e^{x^3}$

٤١ – $y = e^{\sin 3x}$ ج : $3e^{\sin 3x} \cos 3x$

٤٢ – $y = 3^{-x^2}$ ج : $-2x \cdot 3^{-x^2} \ln 3$

٤٣ – $y = e^{-x} \cos x$ ج : $-e^{-x}(\cos x + \sin x)$

٤٤ – $y = \text{arc sin } e^x$ ج : $e^x/\sqrt{1 - e^{2x}}$

٤٥ – $y = \tan^2 e^{3x}$ ج : $6e^{3x} \tan e^{3x} \sec^2 e^{3x}$

٤٦ – $y = e^{e^x}$ ج : $e^{(x + e^x)}$

٤٧ – إذا كانت $y = x^2 e^x$ بين أن $y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$.

٤٨ – إذا كانت $y = e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)$, بين أن $y'' + 4y' + 8y = 0.$

٤٩ – ناقش وارسم (ا) $y = x^2 e^{-x}$ (ب) $y = x^2 e^{-x^2}.$

ج : (ا) قيمة عظمى عند $x = 2$ وقيمة صغرى عند $x = 0$ ونقطتا انعطاف عند $x = 2 \pm \sqrt{2}$.

(ب) قيمة عظمى عند $x = \pm 1$ وقيمة صغرى عند $x = 0$ ونقط انعطاف عند $x = \pm 1.51$ و $x = \pm 0.47$.

٥٠ – ابحث عن المستطيل ذى المساحة العظمى الذى يقع أحد أضلاعه على المحور تحت المنحنى $y = e^{-x^2}$.

إرشاد : $A = 2xy = 2xe^{-x^2},$ حيث $P(x, y)$ رأس المستطيل على المنحنى .

ج : $A = \sqrt{2/e}$.

٥١ – بين أن المنحنيين $y = e^{ax}$ و $y = e^{ax} \cos ax$ متماسان عند النقط التى لها $x = 2n\pi/a, \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ وأن المنحنيين $y = e^{-ax}/a^2$ و $y = e^{ax} \cos ax$.تعامدان عند النقط نفسها .

٥٢ – للمنحنى $y = x e^x$ بين (ا) أن النقطة $(-1, -1/e)$ هى نقطة قيمة صغرى نسبية (ب) وأن النقطة $(-2, -2/e^2)$ هى نقطة انعطاف (جـ) وأن المنحنى مقعر لأسفل على يسار نقطة الانعطاف ومقعر لأعلى على يمينها .

استخدم الاشتقاق اللوغاريتمى لإيجاد $\dfrac{dy}{dx}$ فى المسائل ٥٣ – ٥٦

٥٣ – $y = x^x$ ج : $x^x(1 + \ln x)$

٥٤ – $y = x^{\ln x}$ ج : $2x^{(\ln x - 1)} \ln x$

٥٥ – $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$ ج : $x^2 e^{2x} \cos 3x \ \{2/x + 2 - 3 \tan 3x\}$

٥٦ – $y = x^{e^{-x^2}}$ ج : $e^{-x^2} x^{e^{-x^2}} (1/x - 2x \ln x)$

٥٧ – بين أن (ا) $\dfrac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x + n)e^x,$ (ب) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \dfrac{(n-1)!}{x}.$

الفصل الخامس عشر

اشتقاق الدوال الزائدية

تعريف الدوال الزائدية : إذا كان u عددا حقيقيا ، باستثناء ما أشير إليه ، فإن :

$$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \coth u = \frac{1}{\tanh u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

$$\tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \qquad \operatorname{csch} u = \frac{1}{\sinh u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

صيغ الاشتقاق . إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق فى x فإن :

٣١ - $\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$

٣٢ - $\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$

٣٣ - $\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$

٣٤ - $\frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$

٣٥ - $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$

٣٦ - $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$

انظر المسائل ١ - ١٢

تعاريف الدوال الزائدية العكسية :

$$\sinh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{1+u^2}), \quad \text{all } u \qquad \coth^{-1} u = \tfrac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}, \quad (u^2 > 1)$$

$$\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), \quad (u \geqq 1) \qquad \operatorname{sech}^{-1} u = \ln \frac{1 + \sqrt{1-u^2}}{u}, \quad (0 < u \leqq 1)$$

$$\tanh^{-1} u = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad (u^2 < 1) \qquad \operatorname{csch}^{-1} u = \ln\left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}\right), \quad (u \neq 0)$$

(القيم الرئيسية لـ $\cosh^{-1} x$ و $\operatorname{sech}^{-1} x$ متضمنة هنا فقط)

صيغ الاشتقاق . إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق فى x فإن :

٣٧ - $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$

٣٨ - $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad (u > 1)$

٣٩ - $\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 < 1)$

٤٠ - $\frac{d}{dx}(\coth^{-1} u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}, \quad (u^2 > 1)$

٤١ - $\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (0 < u < 1)$

٤٢ - $\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}, \quad (u \neq 0)$

انظر المسائل ١٣ - ١٩

مسائل محلولة

١ – برهن أن $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1.$

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \tfrac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1$$

٢ – استنتج $\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx}$, حيث u دالة قابلة للاشتقاق فى x.

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\frac{du}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

أوجد dy/dx فى المسائل ٣ – ١٠

٣ – $y = \sinh 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \cosh 3x \cdot \frac{d}{dx}(3x) = 3\cosh 3x$$

٤ – $y = \cosh \tfrac{1}{2}x$

$$\frac{dy}{dx} = \sinh \tfrac{1}{2}x \cdot \frac{d}{dx}(\tfrac{1}{2}x) = \tfrac{1}{2}\sinh \tfrac{1}{2}x$$

٥ – $y = \tanh(1 + x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(1 + x^2) \cdot \frac{d}{dx}(1 + x^2) = 2x \operatorname{sech}^2(1 + x^2)$$

٦ – $y = \coth\frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\operatorname{csch}^2\frac{1}{x}$$

٧ – $y = x \operatorname{sech} x^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x^2) + \operatorname{sech} x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x)\\ &= x(-\operatorname{sech} x^2 \tanh x^2)2x + \operatorname{sech} x^2\\ &= -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \tanh x^2 + \operatorname{sech} x^2\end{aligned}$$

٨ – $y = \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(x^2 + 1)]\\ &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1)[-\operatorname{csch}(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1) \cdot 2x]\\ &= -4x \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1)\end{aligned}$$

٩ – $y = \tfrac{1}{4}\sinh 2x - \tfrac{1}{2}x$

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{4}(\cosh 2x)2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1) = \sinh^2 x$$

١٠ – $y = \ln \tanh 2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tanh 2x}(2\operatorname{sech}^2 2x) = \frac{2}{\sinh 2x \cosh 2x} = 4\operatorname{csch} 4x$$

١١ – أوجد إحداثيى القيمة الصغرى للسلسلة $y = a\cosh\frac{x}{a}.$

$$f'(x) = \frac{1}{a}\left(a\sinh\frac{x}{a}\right) = \sinh\frac{x}{a}, \qquad f''(x) = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)$$

عندما $f'(x) = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = 0,$ يكون $x = 0$ ويكون $f''(0) > 0$ و النقطة $(0, a)$ هى نقطة قيمة صغرى .

١٢ – ابحث عن نقط الانعطاف للدوال التالية

(ا) $y = \sinh x$ (ب) $y = \cosh x$ (جـ) $y = \tanh x$.

(آ) $f'(x) = \cosh x,\ f''(x) = \sinh x,$ و $f'''(x) = \cosh x.$

إن $f''(x) = \sinh x = 0$ عندما $x = 0$ وحيث أن $f'''(0) \neq 0$ فإن النقطة $(0,0)$ هي نقطة الانعطاف

(ب) إن $f'(x) = \sinh x,\ f''(x) = \cosh x \neq 0$ مهما كانت x ولذلك فلا يوجد نقطة انعطاف .

(جـ) $f'(x) = \text{sech}^2 x,\ f''(x) = -2\,\text{sech}^2 x \tanh x = -2\dfrac{\sinh x}{\cosh^3 x}$, و $f'''(x) = \dfrac{4\sinh^2 x - 2}{\cosh^4 x}$.

إن $f''(x) = 0$ عند ما $x = 0$ وحيث أن $f'''(0) \neq 0$ فالنقطة $(0,0)$ هي نقطة انعطاف .

١٣ – استنتج (ا) $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, لجميع قيم x

(ب) $\text{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}\dfrac{1}{x} = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, عندما $0 < x \le 1$.

(ا) ليكن $\sinh^{-1} x = y;$ عندئذ $x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ أو $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0.$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ e^y نجد $e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, لأن $e^y > 0$ وهكذا يكون $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

(ب) ليكن $\text{sech}^{-1} x = y;$ عندئذ $\cosh y = \dfrac{1}{x}$, $x = \text{sech}\, y = \dfrac{1}{\cosh y}$, و $y = \cosh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \text{sech}^{-1} x.$

كذلك $x = \text{sech}\, y = \dfrac{2}{e^y + e^{-y}}$ أو $e^{2y}x - 2e^y + x = 0.$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ e^y نجد $e^y = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, عندما $y \ge 0$ وهكذا نجد $y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$,
عندما $0 < x \le 1$.

١٤ – استنتج $\dfrac{d}{dx}(\sinh^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}.$

ليكن $y = \sinh^{-1} u,$ حيث u دالة قابلة للاشتقاق في x عندئذ يكون $\sinh y = u,$

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

أوجد dy/dx في المسائل ١٥ - ١٨ .

١٥ – $y = \sinh^{-1} 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(3x)^2+1}}\cdot\frac{d}{dx}(3x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$$

١٦ – $y = \cosh^{-1} e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}\cdot\frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

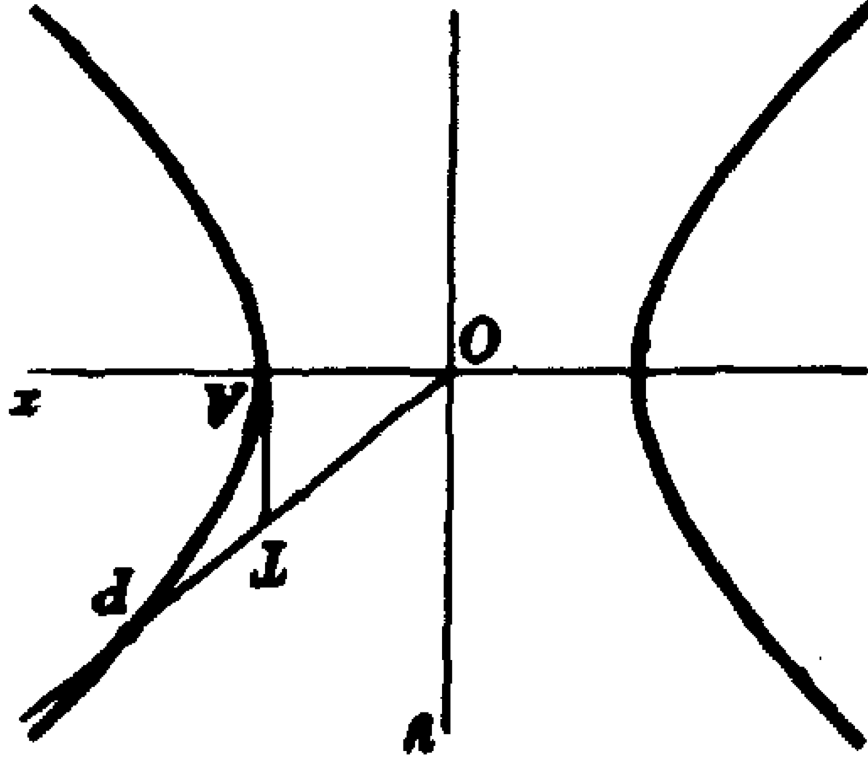
١٧ – $y = 2\tanh^{-1}(\tan\frac{1}{2}x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,\frac{1}{1-\tan^2\frac{1}{2}x}\cdot\frac{d}{dx}(\tan\tfrac{1}{2}x)$$
$$= 2\,\frac{1}{1-\tan^2\frac{1}{2}x}\sec^2\tfrac{1}{2}x\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sec^2\frac{1}{2}x}{1-\tan^2\frac{1}{2}x} = \sec x$$

١٨ — $y = \coth^{-1}\frac{1}{x}$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2-1}$

١٩ — $y = \operatorname{sech}^{-1}(\cos x)$ ، $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x\sqrt{1-\cos^2 x}} = \sec x$

مســائل اضــافية



شكل ١٥ — ١

٢٠ — (١) ارسم المنحنيين $y = e^x$, $y = -e^{-x}$ ثم خذ متوسط ترتيبى (الاحداثيين الثانيين) المنحنيين لقيم مختلفة لـ x لتحصل على نقط من المنحنى $y = \sinh x$ أتمم المنحنى .

(ب) أعد العمل كما فى (١) مستخدما $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ لتحصل على المنحنى $y = \cosh x$.

٢١ — لقطع الزائد $x^2 - y^2 = 1$ بين (١) أن النقطة $P(\cosh u, \sinh u)$ تقع عليه .

(ب) أن المستقيم المماس عند A يقطع المستقيم OP فى $T(1, \tanh u)$. أرجع إلى الشكل ١٥ — ١ .

٢٢ — برهن أن : (١) $\sinh(x+y) = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$

(ب) $\cosh(x+y) = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$

(جـ) $\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x$

(د) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

(هـ) $\tanh 2x = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}$

أوجد dy/dx فى كل من المسائل ٢٣ — ٢٨

٢٣ — $y = \sinh\frac{1}{2}x$ ج $\frac{1}{2}\cosh\frac{1}{2}x$

٢٤ — $y = \cosh^2 3x$ ج $3\sinh 6x$

٢٥ — $y = \tanh 2x$ ج $2\operatorname{sech}^2 2x$

٢٦ — $y = \ln\cosh x$ ج $\tanh x$

٢٧ — $y = \arctan\sinh x$ ج $\operatorname{sech} x$

٢٨ — $y = \ln\sqrt{\tanh 2x}$ ج $2\operatorname{csch} 4x$

٢٩ — برهن : (١) أنه إذا كان $y = a\cosh\frac{x}{a}$, فإن $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2}$.

(ب) وأنه إذا كان $y = A\cosh bx + B\sinh bx$, حيث b, A, B ثوابت فإن $y'' = b^2 y$.

٣٠ – برهن أن (ا) $\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}),\ u \geq 1$

(ب) $\tanh^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u},\ u^2 < 1.$

٣١ – (ا) ارسم المنحنى $y = \sinh^{-1} x$ وذلك بعكس المنحنى $y = \sinh x$. بالنسبة للمستقيم الذى ميله 45° .

(ب) ارسم الفرع الرئيسى لـ $y = \cosh^{-1} x$ وذلك بعكس النصف الأيمن للمنحنى $y = \cosh x$. بالنسبة للمستقيم الذى ميله 45° .

٣٢ – استنتج صيغ الاشتقاق ٣٢ – ٣٦ و ٣٨ – ٤٠ و ٤٢

أوجد dy/dx فى كل من المسائل ٣٣ – ٣٦

٣٣ – $y = \sinh^{-1} \frac{1}{2}x$ ج: $1/\sqrt{x^2+4}$

٣٤ – $y = \cosh^{-1}(1/x)$ ج: $-1/x\sqrt{1-x^2}$

٣٥ – $y = \tanh^{-1}(\sin x)$ ج: $\sec x$

٣٦ – $x = a\,\text{sech}^{-1}(y/a) - \sqrt{a^2 - y^2}$ ج: $-y/\sqrt{a^2 - y^2}$

الفصل السادس عشر

التمثيل البـــارامترى للمنحنيـــــات

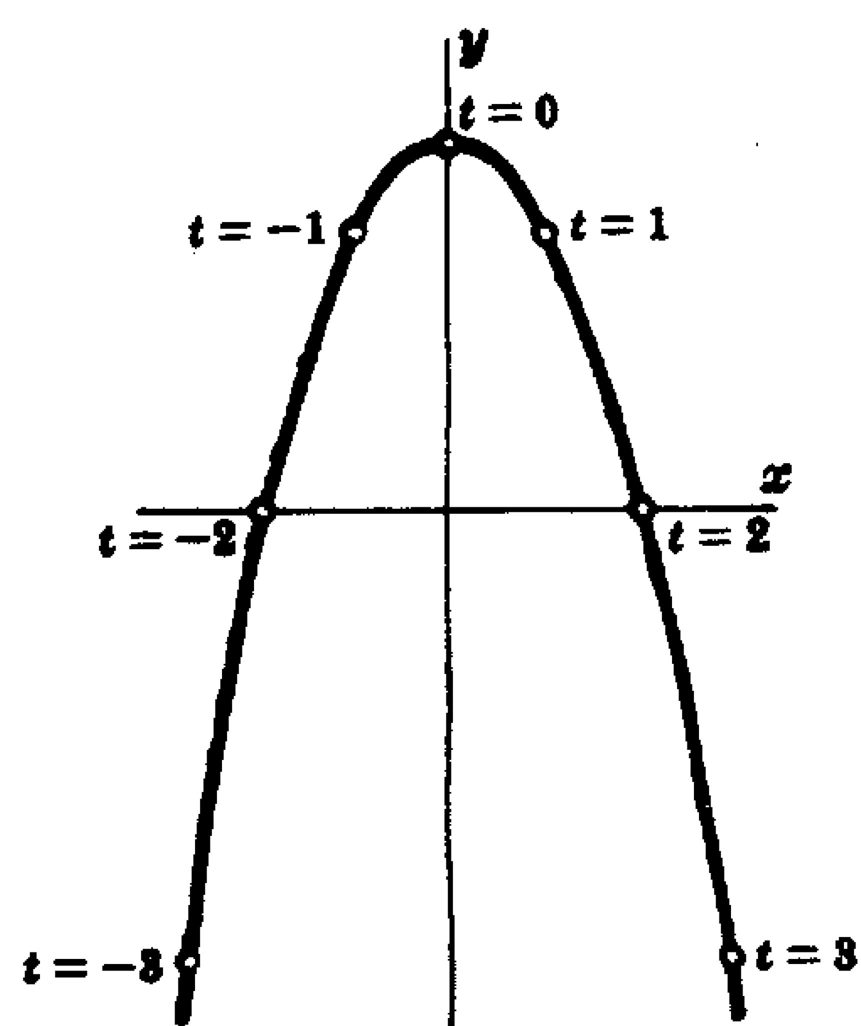
المعادلات البارامترية : إذا أعطيت الإحداثيات (x, y) لنقطة P من منحنى على شكل دالتين $x = f(u),\ y = g(u)$ لمتغير ثالث أو بارامتر u, فإننا نسمى المعادلتين $x = f(u),\ y = g(u)$ المعادلتين البارامترين للمنحنى .

مثـــــال :

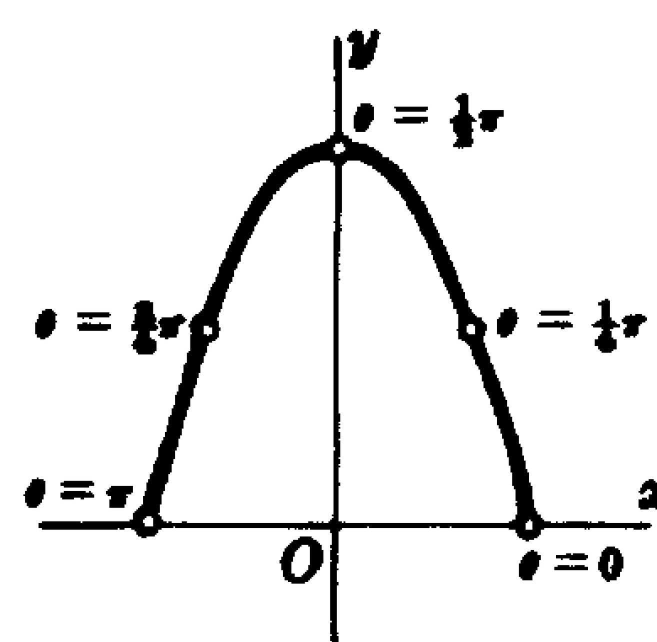
(أ) $x = \cos\theta,\ y = 4\sin^2\theta$ هما معادلتان بارامتريتان بالبارامتر θ. القطع المكافئ $4x^2 + y = 4$ ، لأن

$$4x^2 + y = 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta = 4.$$

(ب) $x = \frac{1}{2}t,\ y = 4 - t^2$ هما تمثيل بارامترى آخر ، بالبارامتر t المنحنى ذاته .



(ب)



(أ)

شكل ١٦ – ١

نلاحظ أن التمثيل البارامترى الأول يمثل جزءا من القطع المكافئ فقط ، فى حين يمثل التمثيل الثانى المنحنى برمته .

وتعطى المشتقة الأولى : $\dfrac{dy}{dx}$ بـ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/du}{dx/du}$.

وتعطى المشتقة الثانية : $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ بـ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\cdot\dfrac{du}{dx}$.

مسـائل محلولـة

١ — أوجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$، بفرض أن $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta.$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta - 1}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos\theta} = -\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}$$

٢ — أوجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$، بفرض أن $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t.$

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{2}{(\cos t - \sin t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$$

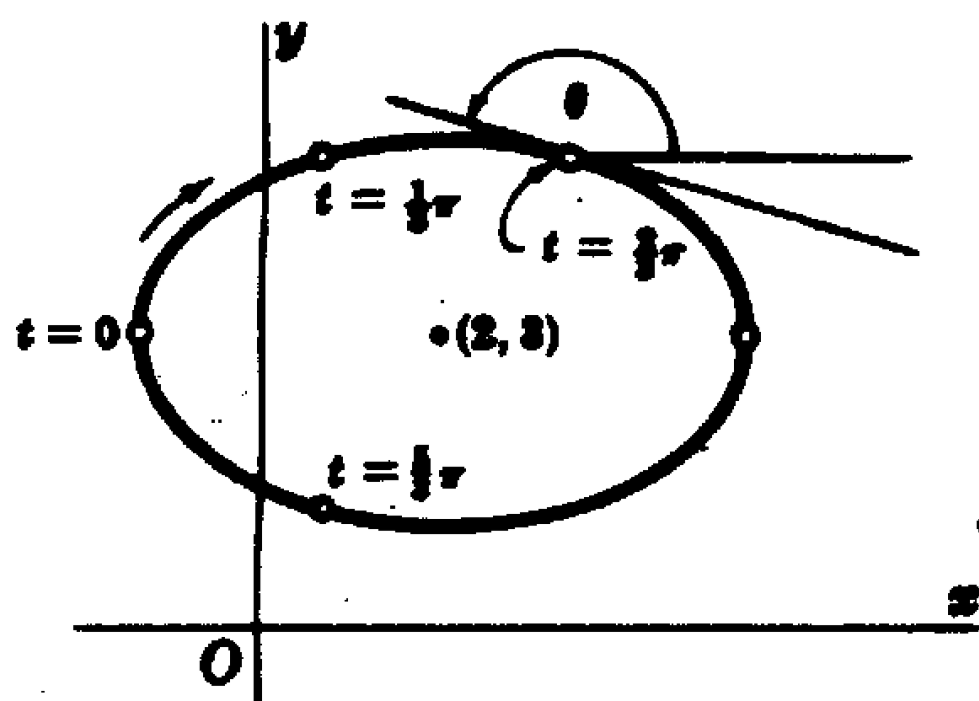
٣ — أوجد معادلة المماس للمنحنى $x = \sqrt{t},\ y = t - 1/\sqrt{t}$ عند النقطة التى عندها $t = 4$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}, \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

وعند $t = 4:\ x = 2,\ y = 7/2,$ يكون $m = dy/dx = 17/4.$

ومعادلة المماس هى $(y - 7/2) = (17/4)(x - 2)$ أو $17x - 4y = 20.$

٤ — يعطى موضع جسيم، يتحرك على منحنى، عند اللحظة t بالمعادلتين البارامتريين $x = 2 - 3\cos t,\ y = 3 + 2\sin t,$ حيث x و y مقاسة بالأمتار و t بالثوانى. أوجد المعدل الزمنى واتجاه التغير لـ
(ا) (الإحداثى السينى) عندما $t = \pi/3$، (ب) الإحداثى الصادى عندما $t = 5\pi/3,$ (جـ) θ زاوية ميل المماس عندما $t = 2\pi/3$.



شكل ١٦ — ٢

$$dx/dt = 3\sin t, \quad dy/dt = 2\cos t, \quad \tan\theta = dy/dx = \tfrac{2}{3}\cot t$$

(ا) عندما $t = \pi/3,\ dx/dt = 3\sqrt{3}/2.$ والإحداثى السينى متزايد بمعدل $3\sqrt{3}/2\ \text{ms}^{-1}$.

(ب) عندما $t = 5\pi/3,\ dy/dt = 2(\tfrac{1}{2}) = 1.$ والإحداثى الصادى متزايد بمعدل 1 m/sec .

(جـ) أن $\theta = \arctan(\tfrac{2}{3}\cot t),$ ومنه $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6\csc^2 t}{9 + 4\cot^2 t}$. وعندما $t = 2\pi/3,$

يكون $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-6(2/\sqrt{3})^2}{9 + 4(-1/\sqrt{3})^2} = -\frac{24}{31}$. وزاوية ميل المماس متناقصة بمعدل 24/31 rad/sec .

مسائل اضافية

أوجد dy/dx و d^2y/dx^2 فى كل من المسائل ٥ — ٩ .

٥ — $x = 2 + t,\ y = 1 + t^2$ ج: $dy/dx = 2t,\ d^2y/dx^2 = 2$

٦ — $x = t + 1/t,\ y = t + 1$ ج: $dy/dx = t^2/(t^2 - 1),\ d^2y/dx^2 = -2t^3/(t^2 - 1)^3$

٧ — $x = 2 \sin t,\ y = \cos 2t$ ج: $dy/dx = -2 \sin t,\ d^2y/dx^2 = -1$

٨ — $x = \cos^3 \theta,\ y = \sin^3 \theta$ ج: $dy/dx = -\tan \theta,\ d^2y/dx^2 = 1/(3 \cos^4 \theta \sin \theta)$

٩ — $x = a(\cos \phi + \phi \sin \phi),\ y = a(\sin \phi - \phi \cos \phi)$ ج: $dy/dx = \tan \phi,\ d^2y/dx^2 = 1/(a\phi \cos^3 \phi)$

١٠ — أوجد ميل المنحنى $x = e^{-t} \cos 2t,\ y = e^{-2t} \sin 2t$ عند النقطة $t = 0$ ج : -2 .

١١ — أوجد الاحداثيين القائمين لأعلى نقطة من المنحنى $x = 96t,\ y = 96t - 16t^2$.
إرشاد : t التى تكون عندها y عظمى ج : $(288, 144)$.

١٢ — أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودى لكل من المنحنيين التاليين (أ) $x = 3e^t,\ y = 5e^{-t}$ عند $t = 0$,
(ب) $x = a \cos^4 \theta,\ y = a \sin^4 \theta$ عند $\theta = \frac{1}{4}\pi$.
ج : (أ) $5x + 3y - 30 = 0,\ 3x - 5y + 16 = 0;$ (ب) $2x + 2y - a = 0,\ x - y = 0$

١٣ — أوجد معادلة المماس للمنحنى $x = a \cos^3 t,\ y = a \sin^3 t.$ أى عند نقطة $P(x, y)$ منه . بين أن الطول المقطوع من المماس بين المحورين الإحداثيين يساوى a .
ج : $x \sin t + y \cos t = \frac{1}{2} a \sin 2t$

١٤ — حدد على المنحنى $x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t,$ النقط التى يكون عندها المماس (أ) أفقيا (ب) رأسيا .
بين أن مماسى المنحنى متعامدان عند النقط التى يقطع فيها المنحنى نفسه .
ج : (أ) $t = \pm\sqrt{3}/3,$ (ب) $t = 0$.

الفصل السابع عشر

الانحناء (التقوس)

اشتقاق طول القوس :

لتكن $y = f(x)$ دالة مشتقتها الأولى مستمرة . ولتكن A (انظر الشكل ١٧ – ١) نقطة ثابتة على المنحنى، ولنرمز بـ s لطول القوس المقاس من A إلى أى نقطة أخرى على المنحنى . لتكن $P(x, y)$ نقطة اختيارية و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطة مجاورة على المنحنى . لنرمز بـ Δs لطول القوس من P إلى Q .

إن معدل تغير القوس $s\,(= AP)$ بمقدار الوحدة لكل تغير فى x ومعدل تغير هذا القوس لكل وحدة تغير فى y هما على الترتيب :

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad \frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

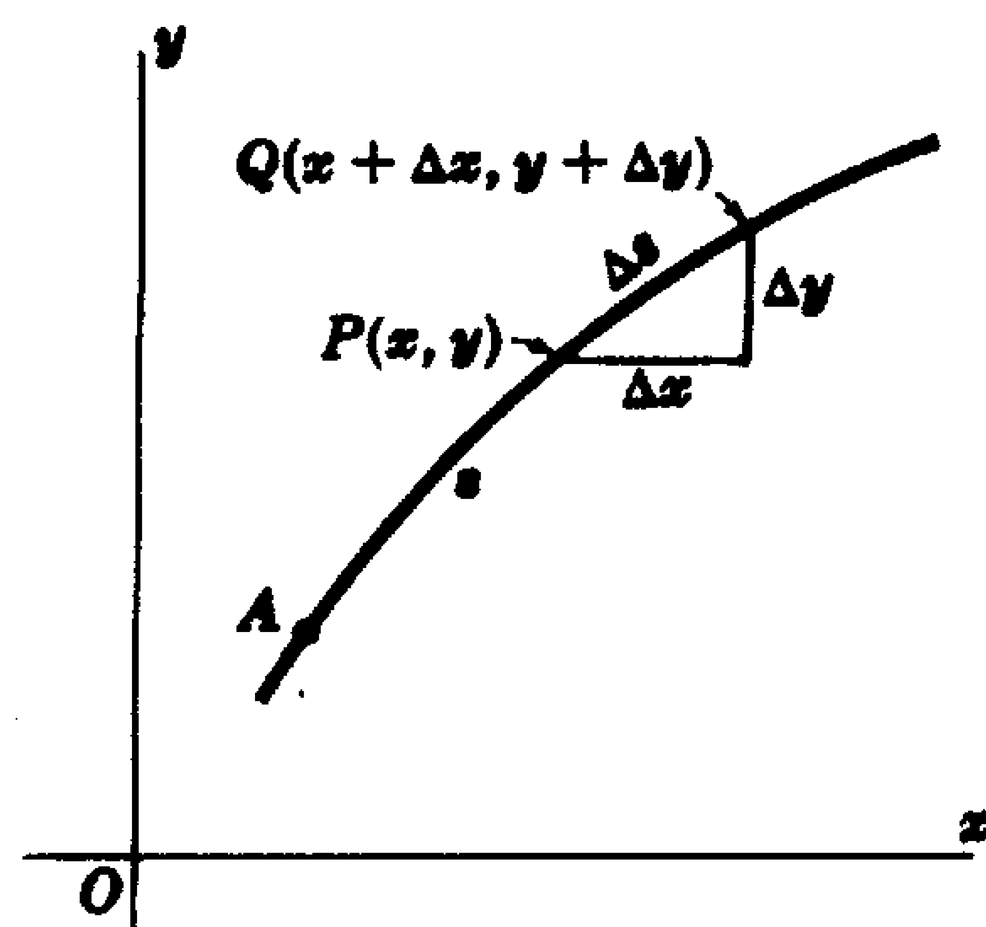
على أن تؤخذ الإشارة الموجبة أو الإشارة السالبة فى العلاقة الأولى حسبما تزداد s أو تتناقص عندما تزداد x ، وفى العلاقة الثانية حسبما تزداد s أو تتناقص عندما تزداد y .

وعندما يعطى المنحنى بالمعادلتين البارامتريتين $x = f(u)$, $y = g(u)$, فإن معدل تغير s بالنسبة لـ u يعطى بـ

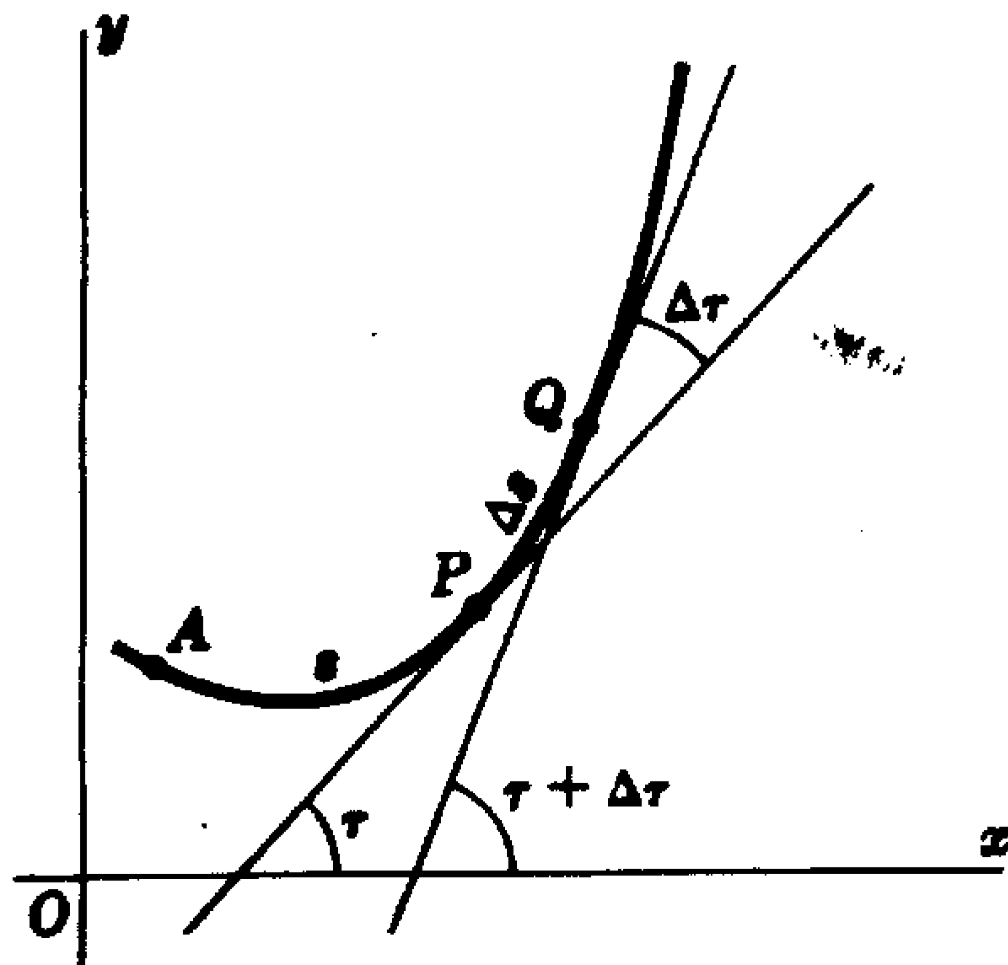
$$\frac{ds}{du} = \pm\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}.$$

وهنا تؤخذ الإشارة الموجبة أو السالبة حسبما تزداد s أو تتناقص عندما تزداد u وكى نتحاشى تكرار الإشارات الغامضة سنفرض فيما يأتى أن الاتجاه على كل منحنى قد اختير بحيث تكون مشتقة طول القوس موجبة .

انظر المسائل ١ – ٥



شكل ١٧ — ١



شكل ١٧ — ٢

الانحنـــاء (التقوس) :

إن الانحناء K للمنحنى $y = f(x)$, عند أى نقطة P منه هو معدل تغير الاتجاه (أى زاوية الميل τ لمماس المنحنى عند P) لكل وحدة طول القوس s (انظر الشكل ١٧ — ٢) .

إذن :

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \; ; \qquad K = \frac{-\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

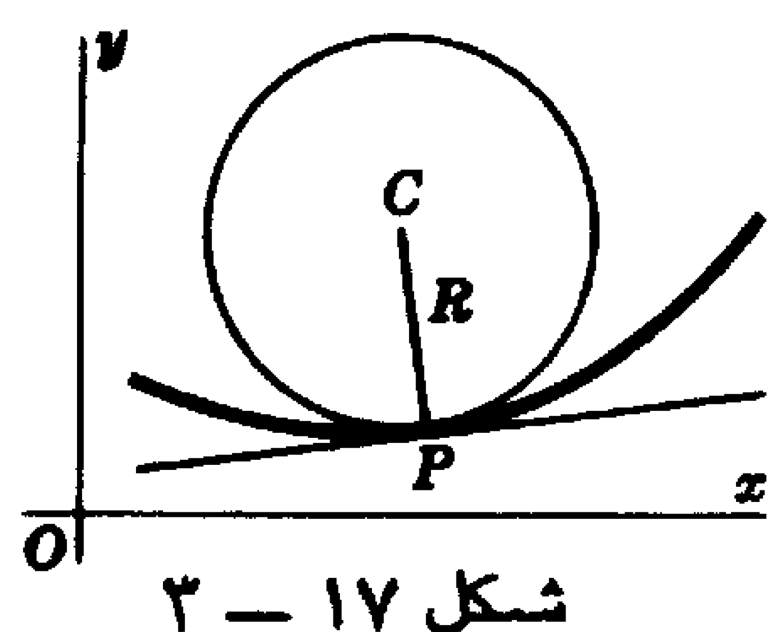
يتضح من العلاقة الأولى أن K موجب عندما تكون P على قوس مقعر لأعلى وسالب عندما تكون P على قوس مقعر لأسفل .

سيجد القارئ أن K قد يعرف أحيانا بحيث يكون موجبا ، أى يعرف على أنه القيمة العددية للقيمة المعطاة فى العلاقة السابقة . ينبغى ، إذا أخذنا بهذا التعريف ، أن نتجاهل إشارة K فى الأجوبة التى نحصل عليها أدناه .

نصف قطر الانحناء R : عند نقطة P من المنحنى يعطى بـ , $R = |1/K|$ بفرض أن $K \neq 0$.

دائرة الانحناء : أو الدائرة الملاصقة لمنحنى عند نقطة P منه هى الدائرة التى نصف قطرها R والواقعة فى جهة تقعر المنحنى والمماسة له عند P .

لرسم دائرة الانحناء : ابدأ بإقامة العمودى على المنحنى عند النقطة P نحو جهة تقعره ثم خذ عليه $PC = R$. فتكون النقطة C مركز الدائرة المطلوبة .



شكل ١٧ — ٣

مركز الانحناء : عند النقطة $P(x, y)$ من المنحنى هى المركز C لدائرة الانحناء عند P. ويعطى الاحداثيات (α, β) لمركز الانحناء بـ .

$$\alpha = x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \beta = y + \frac{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

أو

$$\alpha = x + \frac{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}, \qquad \beta = y - \frac{\dfrac{dx}{dy}\left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}$$

منشىء المنحنى : هو المحل الهندسى لمراكز الانحناء للمنحنى المفروض .

انظر المسائل ٦ — ١٣

مســـائل محلولة

١ — أوجد : $\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.$

ارجع إلى الشكل ١٧ – ١ لنرمز على المنحنى $y = f(x)$, حيث لـ $f(x)$ مشتقة مستمرة بـ s لطول القوس اعتبارا من نقطة ثابتة A إلى نقطة متغيرة $P(x, y)$ ، ولنرمز لـ Δs لطول القوس اعتبارا من النقطة P إلى نقطة مجاورة $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ على المنحنى وبـ PQ لطول الوتر الذى يصل P بـ Q .

إن $\frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta s}{PQ} \cdot \frac{PQ}{\Delta x}$ وبما أن $(PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$,

فإن :
$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2\left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}$$

وعندما تقترب Q من P على المنحنى فإن $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0,$ و $\frac{\Delta s}{PQ} = \frac{\text{القوس } PQ}{\text{الوتر } PQ} \to 1$ (لبرهان الجزء الأخير انظر الفصل ٤١ (المسألة ٢٢) . وبالتالى :

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

٢ – أوجد $\frac{ds}{dx}$ عندالنقطة $P(x,y)$ على القطع المكافئ $y = 3x^2$.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (6x)^2} = \sqrt{1 + 36x^2}$$

٣ – أوجد $\frac{ds}{dx}$ و $\frac{ds}{dy}$ عند النقطة $P(x, y)$ على القطع الناقص $x^2 + 4y^2 = 8.$

(ا) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}; 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16y^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{16y^2} = \frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}$ و $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}}$

(ب) $\frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x}; \quad 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{16y^2}{x^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{x^2} = \frac{2 + 3y^2}{2 - y^2}$, $\frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2 + 3y^2}{2 - y^2}}$

٤ – أوجد $\frac{ds}{d\theta}$ عند النقطة $P(\theta)$ على المنحنى $x = \sec\theta, \ y = \tan\theta.$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\sec^2\theta\tan^2\theta + \sec^4\theta} = |\sec\theta|\sqrt{\tan^2\theta + \sec^2\theta}$$

٥ – يعطى الاحداثيان (x, y) المقاسان بالأمتار لجسيم متحرك P بـ $x = \cos t - 1,$ و $y = 2\sin t + 1,$ حيث t هو الزمن المقاس بالثوانى . بأى معدل تتحرك P على المنحنى عندما (ا) $t = 5\pi/3,$ (ب) $t = 5\pi/6,$ (جـ) P تتحرك بأقصى سرعة ؟

إن $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$

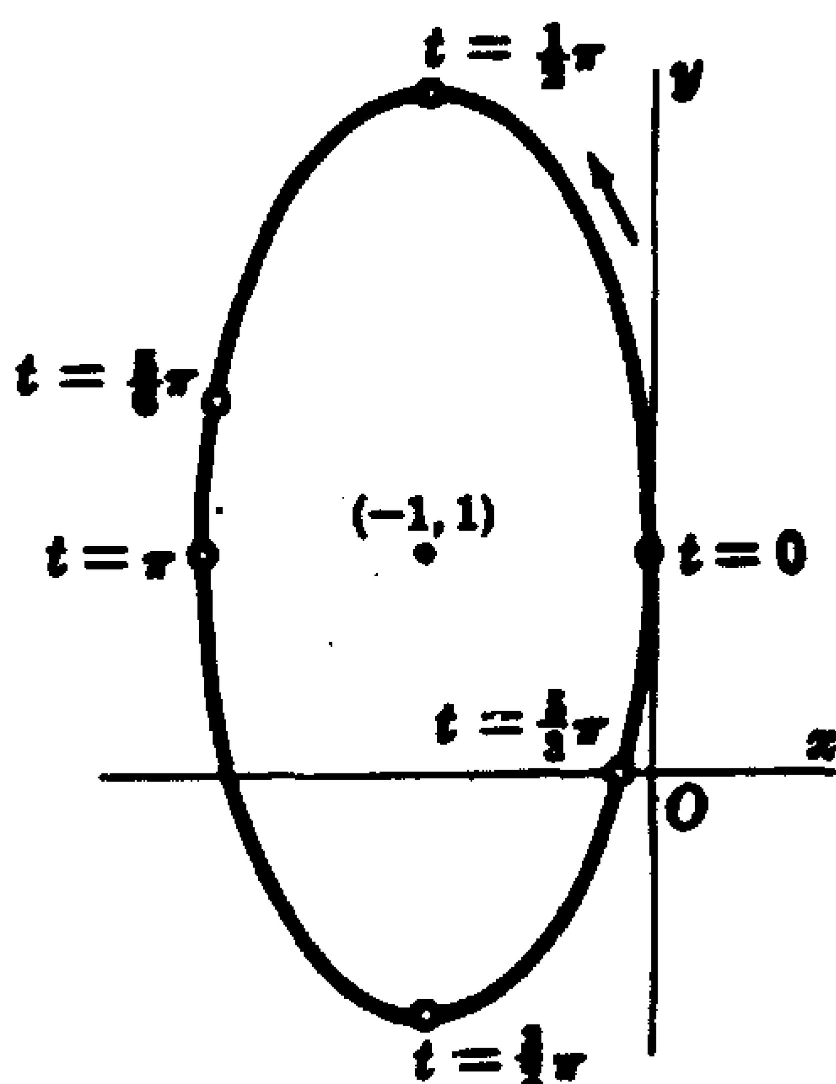
(ا) عندما $t = 5\pi/6,$ يكون : $ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{3}{4})} = \sqrt{13}/2$ ms^{-1}

(ب) عندما $t = 5\pi/3,$ يكون : $ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{1}{4})} = \sqrt{7}/2$ ms^{-1}

(جـ) ليكن $S = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}.$ عندئذ $\frac{dS}{dt} = \frac{-3\cos t \sin t}{S}.$

وبحل $dS/dt = 0$ نجد القيم الحرجة $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2.$

فإذا كان $t = 0$ أو $\pi,$ يكون المعدل : $ds/dt = \sqrt{1 + 3(1)} = 2$ ms^{-1} أسرع مايمكن



شكل ١٧ — ٤

أما إذا كان $t = \pi/2$ أو $3\pi/2$, يكون المعدل : ms^{-1} $ds/dt = \sqrt{1+3(0)}$ أبطأ ما يمكن .

٦ — أوجد انحناء القطع المكافئ $y^2 = 12x$ عند النقطة (ا) $(3, 6)$, (ب) $(\frac{3}{4}, -3)$, (جـ) $(0, 0)$.

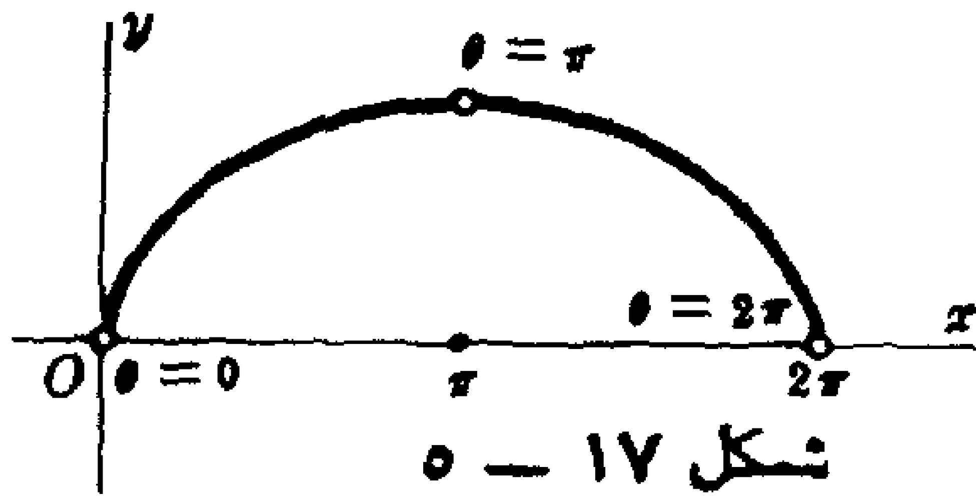
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{36}{y^3} \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6}{y}, \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{36}{y^2},$$

(ا) عند $(3,6)$: يكون, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{6}$, $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2$, $\frac{dy}{dx} = 1$, ومنه $K = \frac{-1/6}{2^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$.

(ب) عند $(3/4, -3)$: يكون, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{3}$, $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5$, $\frac{dy}{dx} = -2$, ومنه $K = \frac{4/3}{5^{3/2}} = \frac{4\sqrt{5}}{75}$.

(جـ) عند $(0,0)$, يكون $\frac{dy}{dx}$ غير معروف ولكن, $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{6}$, $1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1$, $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6} = 0$, ومنه. $K = -\frac{1}{6}$.

٧ — أوجد انحناء الدويرى (السيكلوئيد) $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$, عند أعلى نقطة للقوس .



شكل ١٧ — ٥

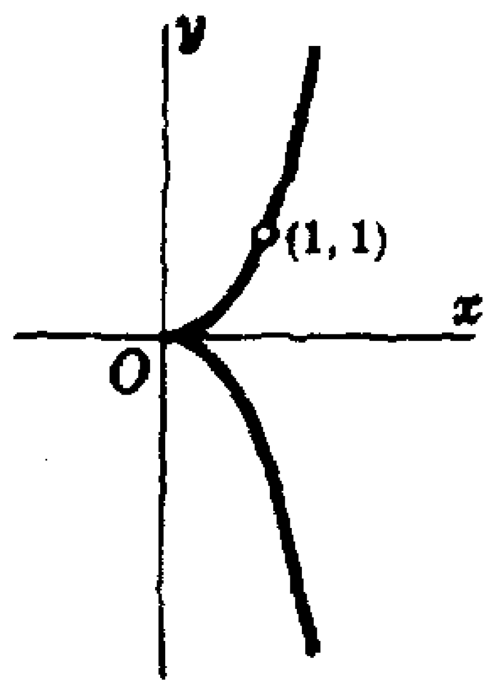
للحصول على أعلى نقطة على الفترة $0 < x < 2\pi$: نلاحظ أن $dy/d\theta = \sin\theta$ والقيمة الحرجة على الفترة المذكورة هي $x = \pi$ وبما أن $d^2y/d\theta^2 = \cos\theta < 0$ عندما $\theta = \pi$, فالنقطة $\theta = \pi$ هي نقطة قيمة عظمى نسبية وهي أعلى نقطة من المنحنى على الفترة المذكورة .

للحصول على الانحناء :

$$\frac{dx}{d\theta} = 1-\cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{(1-\cos\theta)^2}$$

وعند $\theta = \pi$, يكون $dy/dx = 0$, $d^2y/dx^2 = -1/4$, ومنه $K = -1/4$.

٨ — أوجد انحناء المنحنى المستوى السهمى (السيسوئيد) $y^2(2-x) = x^3$ عند النقطة $(1, 1)$.



شكل ١٧ — ٦

نشتق المعادلة المعطاة ضمنيا بالنسبة لـ x فنجد

(ا) $-y^2 + (2-x)2yy' = 3x^2$ و

(ب) $-2yy' + (2-x)2yy'' + (2-x)2(y')^2 - 2yy' = 6x$

من (ا) عندما $x = y = 1$, $-1 + 2y' = 3$ ومنه $y' = 2$.

من (ب) عندما $x = y = 1$ و $y' = 2$, $-4 + 2y'' + 8 - 4 = 6$ ومنه $y'' = 3$.

إذن $K = 3/(1+4)^{3/2} = 3\sqrt{5}/25$.

٩ — أوجد نقطة أقصى انحناء على المنحنى $y = \ln x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \text{و} \quad K = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

ومنه $\frac{dK}{dx} = \frac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}$ والقيمة الحرجة هي $x = 1/\sqrt{2}$. وبالتالى فإن النقطة المطلوبة هى $(1/\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2)$.

١٠ – عين موضع مركز الانحناء C للمنحنى $y = f(x)$ عند إحدى نقاطه $P(x, y)$ التى يكون عندها $y'' \neq 0$. (انظر الشكل ١٧ – ٣) .

يقع مركز الانحناء $C(\alpha, \beta)$ (١) على المستقيم العمودى عند P و (٢) على مسافة R عن P مقاسة نحو جهة تقعر المنحنى . لذلك فإن :

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = R^2 = \frac{[1 + (y')^2]^3}{(y'')^2} \quad (٢) \qquad و \qquad \beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x) \quad (١)$$

ومن (١) نجد $\alpha - x = -y'(\beta - y)$; بالتعويض فى (٢) نجد

$$\beta - y = \pm\frac{1 + (y')^2}{y''} \quad ومنه \quad (\beta - y)^2[1 + (y')^2] = \frac{[1 + (y')^2]^3}{(y'')^2}$$

ولتحديد الإشارة الصحيحة نلاحظ أن تقعر المنحنى يكون لأعلى عندما $y'' > 0$ وبما أن C عندئذ تقع فوق P فإن $\beta - y > 0$. والإشارة المناسبة فى هذه الحالة هى + (ونترك للقارئ أن يبرهن أن الإشارة هى كذلك + عندما $y'' < 0$). وهكذا :

$$\alpha = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''} \quad نجد \quad ومن (١) \quad \beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

١١ – أوجد معادلة دائرة الانحناء للمنحنى $2xy + x + y = 4$ عند النقطة $(1, 1)$.

إن $2y + 2xy' + 1 + y' = 0$; وعند $(1, 1)$. يكون $y' = -1$. إذن $1 + (y')^2 = 2$.

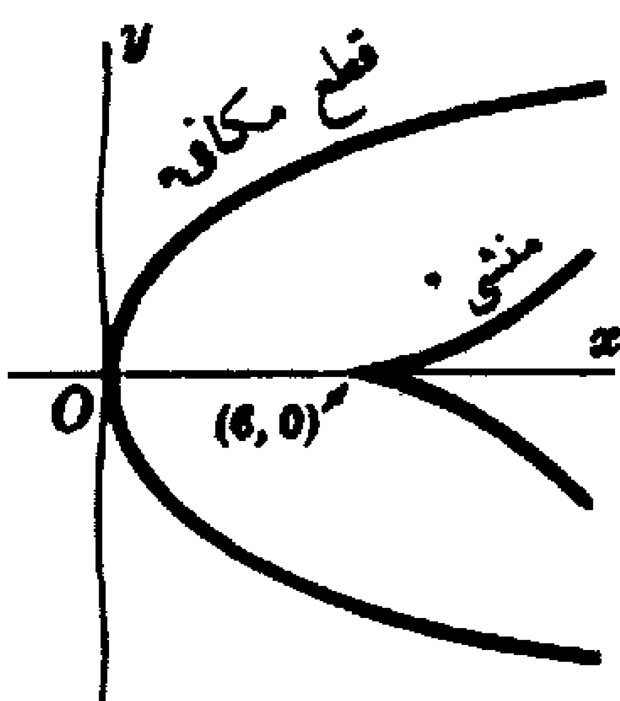
وإن $4y' + 2xy'' + y'' = 0$; وعند $(1, 1)$, يكون $y'' = 4/3$.

ومنه $K = \dfrac{4/3}{2\sqrt{2}}$ و $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. كذلك $\beta = 1 + \dfrac{2}{4/3} = \dfrac{5}{2}$, $\alpha = 1 - \dfrac{-1(2)}{4/3} = \dfrac{5}{2}$,

والمعادلة المطلوبة هى $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ أو $(x - 5/2)^2 + (y - 5/2)^2 = 9/2$.

١٢ – أوجد معادلة منشئ (المحل الهندسى لمركز الانحناء) القطع المكافئ $y^2 = 12x$

عند $P(x,y)$ يكون : $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \dfrac{36}{y^2} = 1 + \dfrac{3}{x}$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6}{y} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$, و $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{36}{y^3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2x^{3/2}}$.



شكل ١٧ — ٧

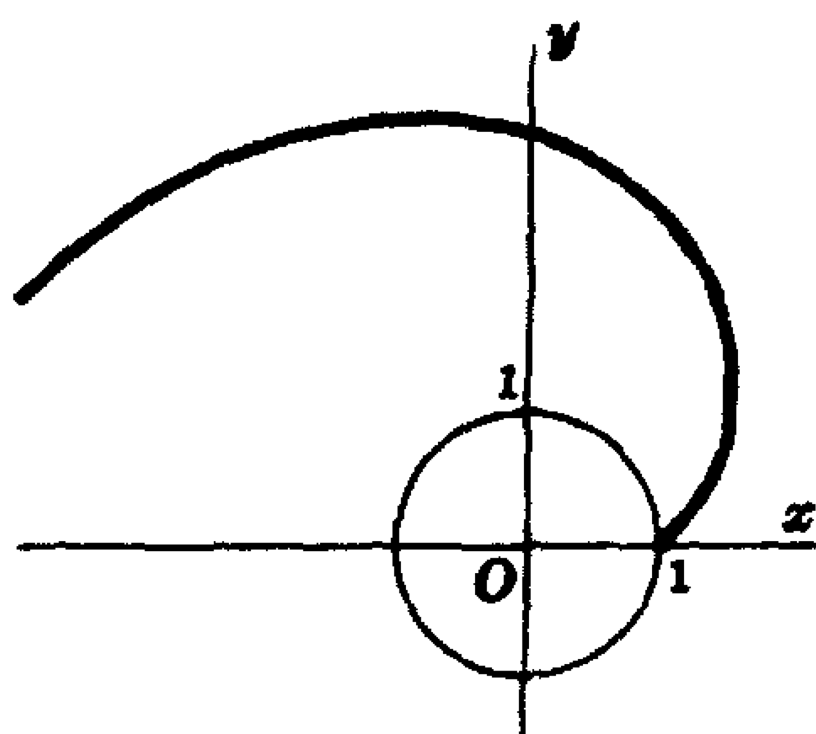
$$\alpha = x - \frac{\sqrt{3/x}\,(1 + 3/x)}{-\sqrt{3}/2x^{3/2}} = x + \frac{2\sqrt{3}\,(x + 3)}{\sqrt{3}} = 3x + 6$$

$$\beta = y + \frac{1 + 36/y^2}{-36/y^3} = y - \frac{y^3 + 36y}{36} = -\frac{y^3}{36}$$

ويمكن اعتبار المعادلتين $\alpha = 3x + 6,\ \beta = -y^3/36$ المعادلتين البارامتريتين للمنشئ حيث x و y المرتبطتان بمعادلة القطع المكافئ بارامتريتين . غير أنه من السهل نسبيا فى هذه المسألة ، حذف البارامتريتين وفى هذه الحالة $x = (\alpha - 6)/3$, و $y = -\sqrt[3]{36\beta}$, وبالتعويض فى معادلة القطع المكافئ نجد أن :

$$81\beta^2 = 4(\alpha - 6)^3 \quad أو \quad (36\beta)^{2/3} = 4(\alpha - 6)$$

١٣ – أوجد معادلة منشئ المنحنى $x = \cos\theta + \theta\sin\theta,$
$y = \sin\theta - \theta\cos\theta.$



شكل ١٧ – ٨

عند $P(x,y)$: يكون $\frac{dx}{d\theta} = \theta\cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \theta\sin\theta,\quad \frac{dy}{dx} = \tan\theta,$

و $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^2\theta}{\theta\cos\theta} = \frac{\sec^3\theta}{\theta}$

$$\alpha = x - \frac{\tan\theta\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = x - \theta\sin\theta = \cos\theta$$

$$\beta = y + \frac{\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = y + \theta\cos\theta = \sin\theta$$

والمعادلتان $\alpha = \cos\theta,\ \beta = \sin\theta$ هما المعادلتان البارامتريتان للمنشئ .

مســـائل اضـــافية

فى المسائل ١٤ – ١٩ أوجد المشتقة المشار إليها لطول القوس :

١٤– $x^2 + y^2 = 25$ ج : $ds/dx = 5/\sqrt{25-x^2},\ ds/dy = 5/\sqrt{25-y^2}$

١٥– $y^2 = x^3$ ج : $ds/dx = \frac{1}{2}\sqrt{4+9x},\ ds/dy = \sqrt{4+9y^{2/3}}/3y^{1/3}$

١٦– $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ج : $ds/dx = (a/x)^{1/3},\ ds/dy = (a/y)^{1/3}$

١٧– $6xy = x^4 + 3$ ج : $ds/dx = (x^4+1)/2x^2$

١٨– $27ay^2 = 4(x-a)^3$ ج : $ds/dx = \sqrt{(x+2a)/3a}$

١٩– $y = a\cosh x/a$ ج : $ds/dx = \cosh x/a$

٢٠– للمنحنى $x = f(u),\ y = g(u),$ استنتج $(ds/du)^2 = (dx/du)^2 + (dy/du)^2.$

فى المسائل ٢١ – ٢٤ أوجد ds/dt .

٢١– $x = t^2,\ y = t^3$ ج : $t\sqrt{4+9t^2}$

٢٢– $x = \cos t,\ y = \sin t$ ج : 1

٢٣– $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t$ ج : $\sqrt{4+5\cos^2 t}$

٢٤– $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ ج : $\frac{3}{2}\sin 2t$

٢٥– باستخدام $dy/dx = \tan\tau,$ أوجد $dx/ds = \cos\tau,\ dy/ds = \sin\tau.$

٢٦– باستخدام $\tau = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$ أوجد $K = \frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{y''}{\{1+(y')^2\}^{3/2}}.$

٢٧– أوجد انحناء كل من المنحنيات التالية عند النقطة المذكورة .

(ا) $y = x^3/3$ at $x = 0,\ x = 1,\ x = -2$ ج : $0,\ \sqrt{2}/2,\ -4\sqrt{17}/289$

(ب) $x^2 = 4ay$ at $x = 0,\ x = 2a$ ج : $\frac{1}{2a},\ \frac{\sqrt{2}}{8a}$

(ج) $y = \sin x$ at $x = 0,\ x = \frac{1}{2}\pi$ ج : $0,\ -1$

(د) $y = e^{-x^2}$ at $x = 0$ ج : -2

٢٨– بين (ا) أن انحناء الخط المستقيم يساوى صفر (ب) وأن انحناء الدائرة يساوى عدديا مقلوب نصف قطرها .

٢٩ – أوجد النقطة التى عندها الانحناء نهاية عظمى لـ (ا) $y = e^x,$ (ب) $y = x^3/3.$

ج : (ا) $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2},$ (ب) $x = 1/\sqrt[4]{5}$

٣٠ — تتكون خطوط سكك حديدية فى مجموعة إحداثية معينة من جزء من الاتجاه السالب للمحور x حتى نقطة الأصل O ثم من المنحنى الانتقالى $y = \frac{1}{2}x^4$ حتى $A(1,\frac{1}{2})$, وبعد ذلك من قوس الدائرة $144x^2 + 144y^2 - 96x - 264y + 9 = 0.$ أثبت أن (ا) المنحنى الانتقالى يمس المستقيم والمسار الدائرى عند نقطتى ارتباطه بهما (ب) الانحناء للمنحنى الانتقالى يساوى الصفر عند O ويساوى مقلوب نصف قطر المقطع الدائرى عند A .

٣١ — أوجد نصف قطر الانحناء لـ (ا) $x^3 + xy^2 - 6y^2 = 0$ عند $(3, 3)$, (ب) $x = a \operatorname{sech}^{-1} y/a - \sqrt{a^2 - y^2}$ عند (x,y), (جـ) $x = 2a \tan\theta,\ y = a \tan^2\theta$, (د) $x = a \cos^4\theta,\ y = a \sin^4\theta$.

ج : (ا) $5\sqrt{5}$, (ب) $a\sqrt{a^2 - y^2}/|y|$, (جـ) $2a\,|\sec^3\theta|$, (د) $2a(\sin^4\theta + \cos^4\theta)^{3/2}$

٣٢ — أوجد مركز الانحناء لـ (ا) المسألة ٣١ - (ا) (ب) $y = \sin x$ عند نقطة النهاية العظمى .

ج : (ا) $C(-7, 8)$, (ب) $C(\frac{1}{2}\pi, 0)$

٣٣ — أوجد معادلة دائرة الانحناء للقطع المكافئ $y^2 = 12x$ عند النقطتين $(0,0)$ و $(3,6)$.

ج : $(x - 6)^2 + y^2 = 36,\ (x - 15)^2 + (y + 6)^2 = 288$

٣٤ — أوجد معادلة المتشى لـ :

(ا) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (ب) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, (جـ) $x = 2\cos t + \cos 2t,\ y = 2\sin t + \sin 2t$.

ج : (ا) $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ (ب) $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2a^{2/3}$

(جـ) $\alpha = \frac{1}{3}(2\cos t - \cos 2t),\ \beta = \frac{1}{3}(2\sin t - \sin 2t)$

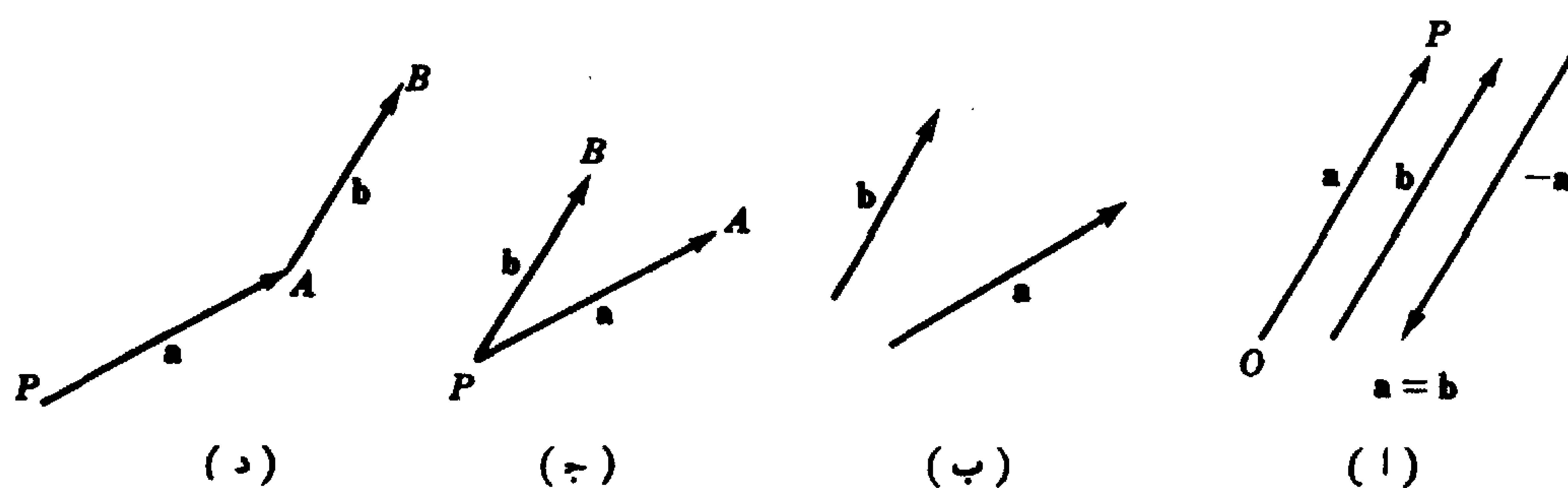
الفصل الثامن عشر

المتجهات المستوية

الكميات العددية والمتجهات : تسمى الكميات مثل الزمن ودرجة الحرارة والسرعة القياسية والتي لها مقادير فقط ، كيات عددية ، أو قياسية . والكميات العددية إذن هي مجرد أعداد تخضع لقوانين الجبر العادية مثل :

$$5 \text{ sec} + 3 \text{ sec} = 8 \text{ sec}$$

أما الكميات مثل القوة والسرعة والتسارع (العجلة) وكية الحركة والتي لها مقدار واتجاه معا فإنها تسمى كيات متجهة أو متجهات . وتمثل المتجهات هندسيا بأجزاء مستقيمة موجهة (اسهم) . واتجاه السهم (الزاوية التي يصنعها المتجه مع مستقيم ثابت من المستوى) هو اتجاه المتجه، ويمثل طول السهم (بدلالة وحدة قياس نختارها) قياس المتجهه أو طوله . سنرمز للمقادير العددية بأحرف من النوع العادى ... $a, b, c,$ فى حين نرمز للمتجهات بأحرف داكنة مثل . . . **a, b, c,** أو مثل **OP** [انظر الشكل ١٨ - ٢ (ا)] وسنرمز لطول متجه **a** أو **OP** بـ | **a** | أو | **OP** | .



شكل ١٨ — ١

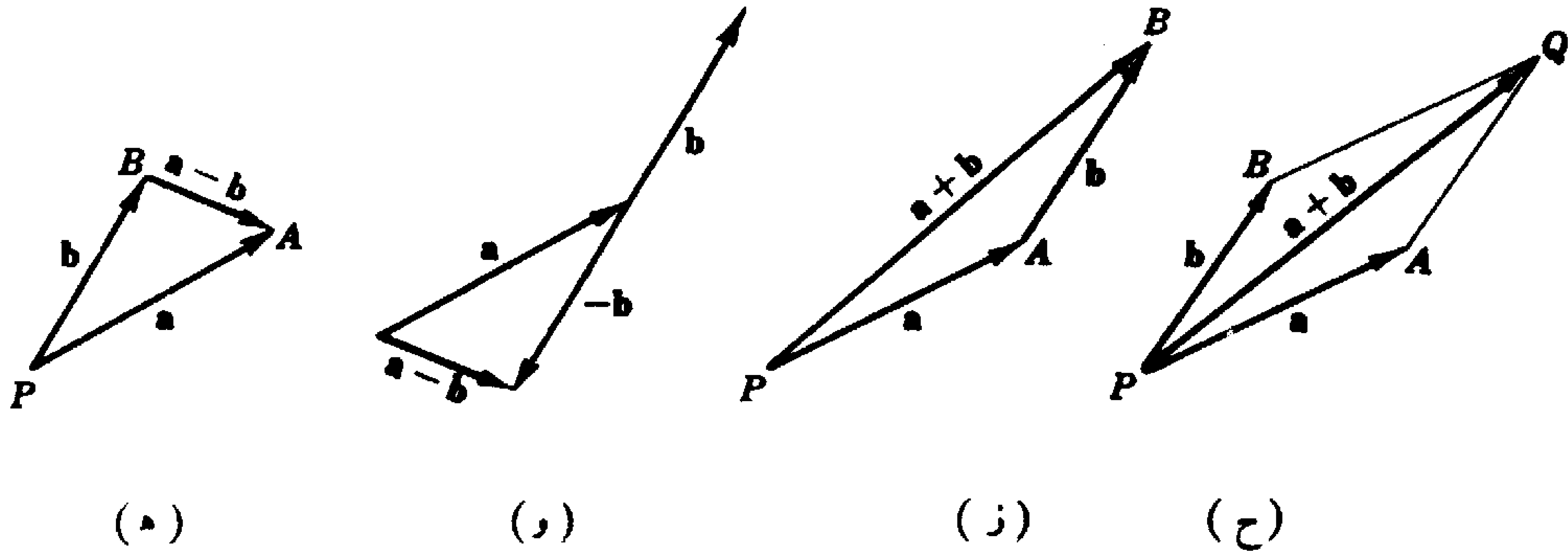
نقول عن متجهين **a** و **b** إنهما متساويان ، **a = b** إذا كان لهما نفس الطول ونفس الاتجاه . وأما المتجه الذى له قياس **a** ولكن اتجاهه عكس اتجاه **a** فإننا نسميه المتجه المعاكس لـ **a** ونرمز له بـ **a** — وبوجه عام : إذا كان **a** متجها و k مقدارا عدديا فإن k**a** متجه له اتجاه **a** ومقداره يساوى k مرة طول **a** إذا كان k موجبا ، ولكن اتجاهه يعاكس **a** وطوله يساوى | k | مرة طول **a** إذا كان k سالبا .

ليس لمتجه مفروض موضع ثابت فى المستوى ، ما لم يذكر عكس ذلك ، ولذلك يمكننا تحريك المتجه بإزاحات متوازية فى المستوى . وبشكل خاص إذا كان **a** و **b** متجهين [(انظر الشكل ١٨ - ١ (ب)] فإنه يمكن وضع هذين المتجهين بحيث يكون لهما بداية أو نقطة بدء مشتركة P [انظر الشكل ١٨ - ١ (جـ)] أو يمكن وضع نقطة بداية المتجه **b** على نقطة نهاية المتجه **a** [انظر الشكل ١٨ - ١ (د)] .

مجموع وفرق متجهين : إذا كان **a** و **b** متجهى الشكل ١٨ – ١ (ب) فإنه يمكن الحصول على مجموعهما أو محصلتهما **b** + **a** .

(i) بوضع المتجهين كما فى الشكل ١٨ – ١ (جـ) ثم إكمال متوازى الأضلاع *PAQB* كما فى الشكل ١٨ – ٢ (هـ) فيكون المتجه **PQ** هو المجموع المطلوب .

(ii) بوضع المتجهين كما فى الشكل ١٨ – ١ (د) وإكمال المثلث *PAB* كما فى الشكل ١٨ – ٢ (و) وهنا يكون المتجه **PB** هو المجموع المطلوب .



(هـ) (و) (ز) (ح)

شكل ١٨ — ٢

ينتج من الشكل ١٨ – ٢ (و) أنه يمكن إزاحة متجهات ثلاثة لتشكل مثلثا ، شريطة أن يكون أحدها هو مجموع المتجهين الآخرين أو معاكسا لهذا المجموع .

إذا كان **a** و **b** متجهى الشكل ١٨ – ١١ (ب) فإنه يمكن إيجاد الفرق بينهما **b** — **a** :

(iii) من العلاقة (**b**—) + **a** = **b** — **a** كما فى الشكل ١٨ – ٢ (ز) .

(iv) بوضع المتجهين كما فى الشكل ١٨ – ١ (جـ) وإكمال المثلث . فى الشكل ١٨ – ٢ (ح) نجد أن **BA** = **a** — **b**

وإذا كانت **a, b, c** ثلاثة متجهات و *k* مقدارا عدديا فإن

١ – $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (قانون الإبدال)

٢ – $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (قانون الدمج)

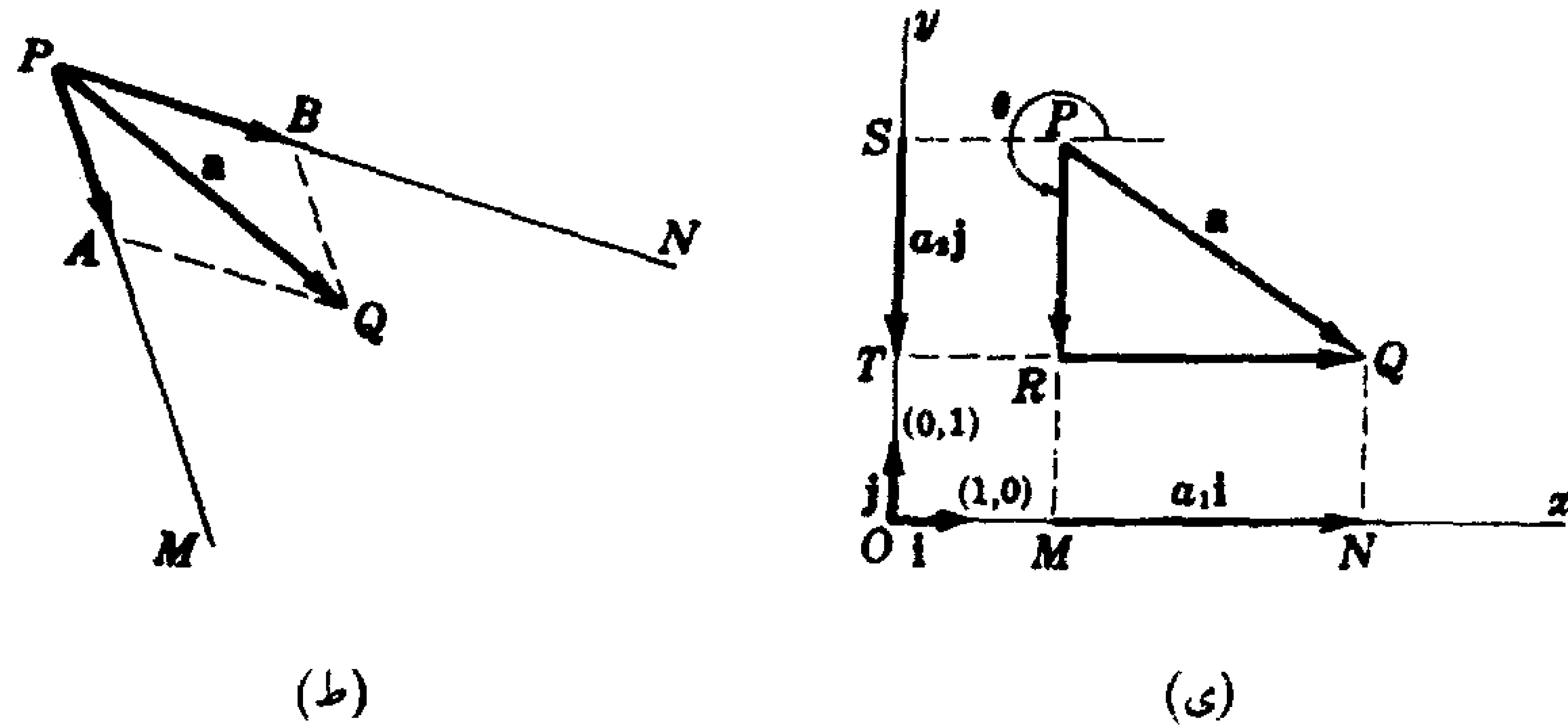
٣ – $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ (قانون التوزيع)

انظر المسائل ١ – ٤

مركبات متجهة : ليكن **a** = **PQ** فى الشكل ١٨ – ٣ (ط) متجها مفروضا وليكن *PM* و *PN* مستقيمين (اتجاهين) آخرين مارين بـ *P* ولننشئ متوازى الأضلاع *PAQB.* فيكون

$$\mathbf{a} = \mathbf{PA} + \mathbf{PB}$$

ويقال عن **a** إنه حلل فى الاتجاهين *PM* و *PN* وندعو **PA** و **PB** المركبتين المتجهتين لـ **a** فى الاتجاهين *PM* و *PN* .



(ط) (ى)

شكل ١٨ — ٣

اعتبر بعد ذلك المتجه **a** فى مجموعة الإحداثيات المتعامدة [شكل١٨ —٣(ى)] وله وحدات قياس متساوية على المحورين . لنرمز بـ **i** للمتجه من (0,0) إلى (1,0) وبـ **j** للمتجه من (0,0) إلى (0,1) . ويكون اتجاه **i** هو الاتجاه الموجب للمحور x واتجاه **j** هو الاتجاه الموجب للمحور y ، وكلا المتجهين متجها وحدة ، أى أن مقدار كل منهما يساوى وحدة الأطوال .

من نقطتى البداية P والنهاية Q للمتجه **a** إسقط عمودين على المحور x يلاقيانه فى M و N على الترتيب ونسقط كذلك عمودين آخرين على المحور y يلاقيانه فى S و T على الترتيب . والآن نجد أن $\mathbf{MN} = a_1\,\mathbf{i}$ حيث a_1 موجبا . وأن $\mathbf{ST} = a_2\,\mathbf{j}$ حيث a_2 سالبا .

إذن $\mathbf{MN} = \mathbf{RQ} = a_1\mathbf{i},\ \ \mathbf{ST} = \mathbf{PR} = a_2\mathbf{j},$ وبالتالى :

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \qquad (1)$$

سندعو $a_1\mathbf{i}$ و $a_2\mathbf{j}$ المركبتين المتجهتين لـ **a** (ليس من الضرورى هنا ذكر الاتجاهين) وندعو a_1 و a_2 المركبتين العدديتين أو المركبتين على **x** و y أو بشكل أكثر بساطة ، ندعوهما مركبتى **a** .

لنفرض أن اتجاه **a** معطى بالزاوية $\theta,\ 0 \le \theta < 2\pi,$ ، المقاسة فى الاتجاه المخالف لحركة عقارب الساعة من الاتجاه الموجب لـ **x** إلى المتجه عندئذ :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad (2)$$

$$\tan\theta = a_2/a_1 \qquad (3)$$

ويتعين الربع الذى تقع فيه θ بـ :

$$a_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta,\ \ a_2 = |\mathbf{a}|\sin\theta$$

وإذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ ، $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j},$ فعندئذ :

٤ — $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ إذا (وإذا فقط) كان $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$

٥ — $k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j}$

٦ — $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$

٧ — $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$

انظر المسألة ٥

حاصل الضرب العددى أو القياسى : يعرف حاصل الضرب العددى أو القياسى لمتجهين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بـ

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta \qquad (٤)$$

حيث θ أصغر زاوية بين المتجهين عندما يرسمان من نقطة بداية مشتركة (انظر الشكل ١٨ ــ ٤) .

شكل ١٨ ــ ٤

ومن المعادلة (٤) ينتج أن :

٨ ــ $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$ (قانون الإبدال)

٩ ــ $\mathbf{a}.\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$ أو $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}.\mathbf{a}}$

١٠ ــ $\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0$ (i) إذا كان $\mathbf{a} = 0$, أو (ii) $\mathbf{b} = 0$, أو (iii) $\mathbf{a}$ عموديا على $\mathbf{b}$

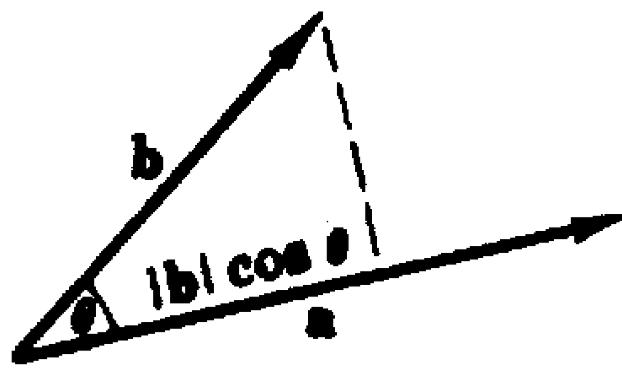
١١ ــ $\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = 1; \mathbf{i}.\mathbf{j} = 0$

١٢ ــ $\mathbf{a}.\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}).(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2$

١٣ ــ $\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}$ (قانون التوزيع)

١٤ ــ $(\mathbf{a}+\mathbf{b}).(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{d} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{d}$

المساقط العددية والمتجهة : يمكن تسمية a_1 فى المعادلة (١) المسقط العددى لـ $\mathbf{a}$ على أى متجه يتفق فى الاتجاه مع المحور x الموجب ، بينما يمكن تسمية المتجهة $a_1\mathbf{i}$ المسقط المتجه لـ $\mathbf{a}$ على أى متجه يتفق فى الاتجاه مع المحور x الموجب .



شكل ١٨ ــ ٥

ونجد فى المسألة ٧ المسقط العددى $\mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ والمسقط المتجه $\left(\mathbf{a}\cdot\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ للمتجه $\mathbf{a}$ على متجه آخر $\mathbf{b}$ (لاحظ أنه عندما يكون لـ $\mathbf{b}$ الإتجاه الموجب للمحور x فإن $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{i}$.)

ينتج من ذلك أن :

١٥ ــ $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ يساوى حاصل ضرب طول $\mathbf{a}$ فى المسقط العددى لـ $\mathbf{b}$ على $\mathbf{a}$ أو يساوى حاصل ضرب طول $\mathbf{b}$ فى المسقط العددى لـ $\mathbf{a}$ على $\mathbf{b}$. (أنظر الشكل ١٨ ــ ٥) .

أنظر المسألتين ٨ ــ ٩

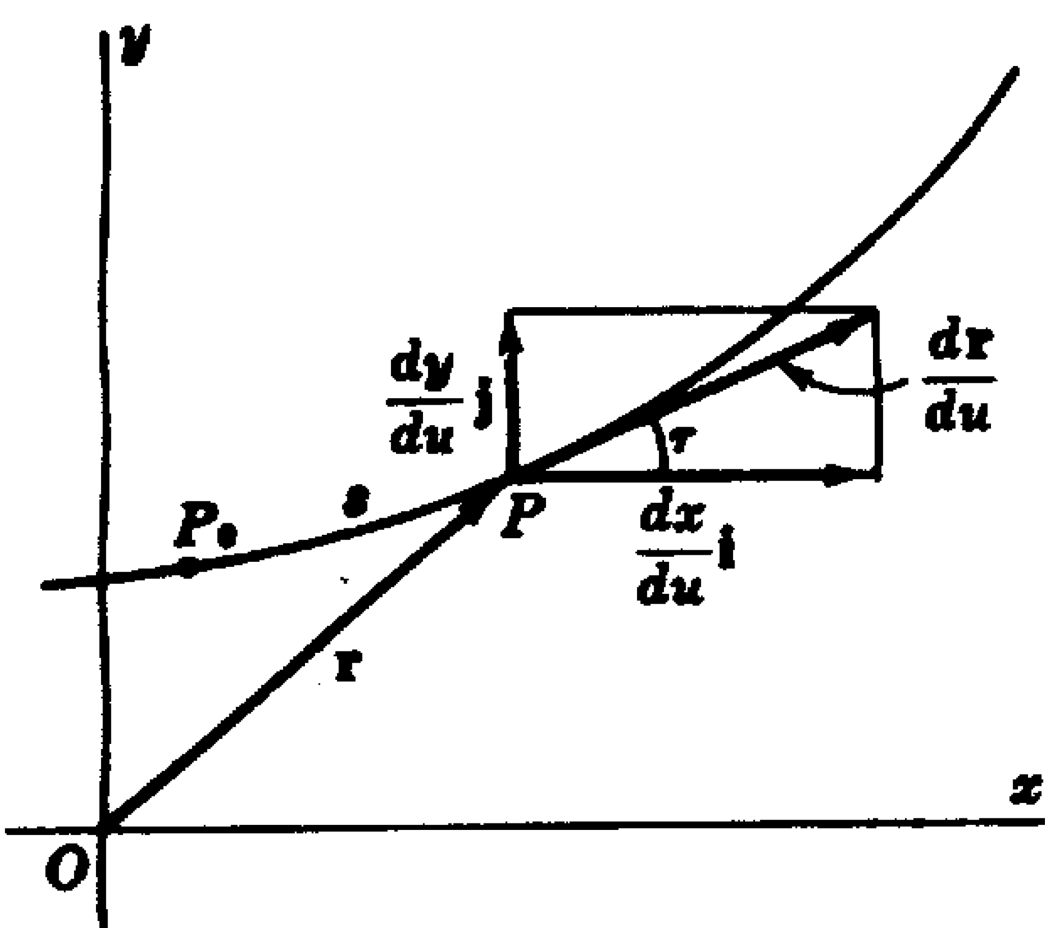
اشتقاق المتجهات : لنفترض أن المنحنى فى الشكل ١٨ ــ ٦ يعطى بالمعادلتين البارامتريتين .

$$x = f(u), \quad y = g(u)$$

يسمى المتجه

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{i}f(u) + \mathbf{j}g(u)$$

الذى يصل نقطة الأصل بالنقطة $P(x,y)$ على المنحنى بمتجه الموضع أو نصف القطر المتجه لـ P (سنستعمل من الآن الحرف $\mathbf{r}$ كرمز لمتجهات الموضع) .



شكل ١٨ ــ ٦

وهكذا فإن $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ هو متجه طليق فى حين أن المتجه $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ هو متجه يصل نقطة الأصل بالنقطة $P(3, 4)$.

وتعطى مشتقة $\mathbf{r}$ بالنسبة لـ u بالمعادلة .

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} \qquad (٥)$$

لنرمز بـ s لطول القوس المقاس من نقطة ثابتة P_0 على المنحنى بحيث تزداد s مع تزايد u . فإذا كانت τ الزاوية التى يصنعها $d\mathbf{r}/du$ مع الإتجاه الموجب للمحور x فإن ميل المنحنى عند P يساوى $\tan = \dfrac{dy/du}{dx/du} = \dfrac{dy}{dx} =$

إذن $d\mathbf{r}/du$ متجه مقداره :

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = \frac{ds}{du}$$

واتجاهه هو اتجاه مماس المنحنى عند P . ولقد جرت العادة أن نعتبر النقطة P نقطة بداية لهذا المتجه .

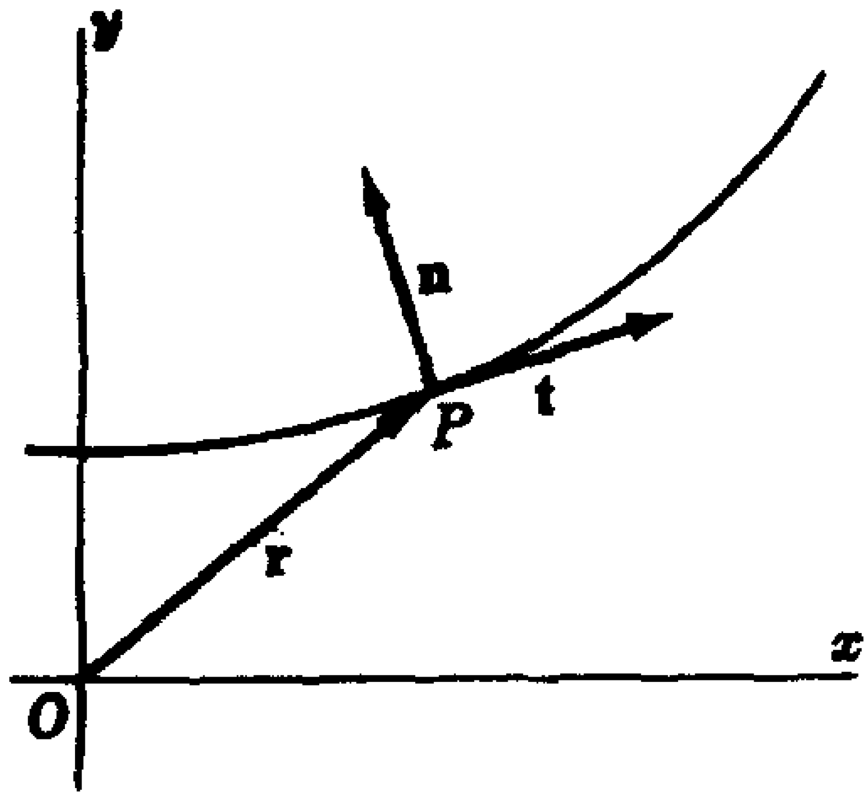
وإذا كان المتغير العددى u هو طول القوس s فإن المعادلة (٥) تصبح :

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \qquad (٦)$$

واتجاه $\mathbf{t}$ هنا هو اتجاه τ كما سبق بينما مقداره $\sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2} = 1.$

وبالتالى فإن $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ هو متجه وحدة المماس للمنحنى عند P .

وبما أن $\mathbf{t}$ متجه وحدة فإن $\mathbf{t}$ و $d\mathbf{t}/ds$ متعامدان (أنظر المسألة ١١) .
لنرمز بـ $\mathbf{n}$ لمتجه الوحدة عند P الذى اتجاهه هو اتجاه $d\mathbf{t}/ds$.



شكل ١٨ — ٧

فعندما تتحرك P على المنحنى المبين بالشكل ١٨ — ٧ فإن مقدار $\mathbf{t}$ يبقى ثابتاً ، ولذلك فإن $d\mathbf{t}/ds$ تعطى قياس معدل التغير لإتجاه $\mathbf{t}$. وبالتالى فإن مقدار $d\mathbf{t}/ds$ عند النقطة P هو القيمة العددية للانحناء عند P ، أى أن $|K| = |d\mathbf{t}/ds|$.

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\,\mathbf{n}$$

أنظر المسائل (١٠ - ١٣)

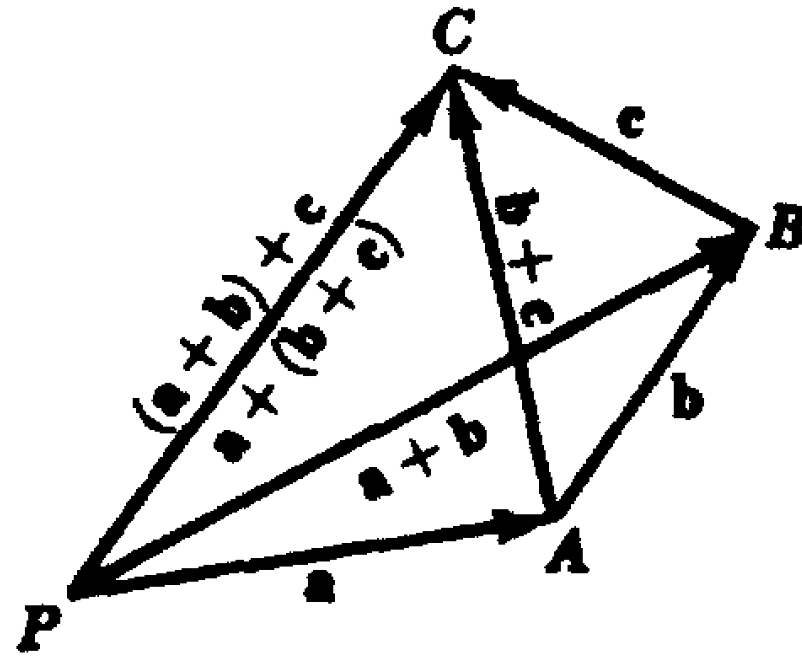
مســـــائل محلولة

١ - برهن أن $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

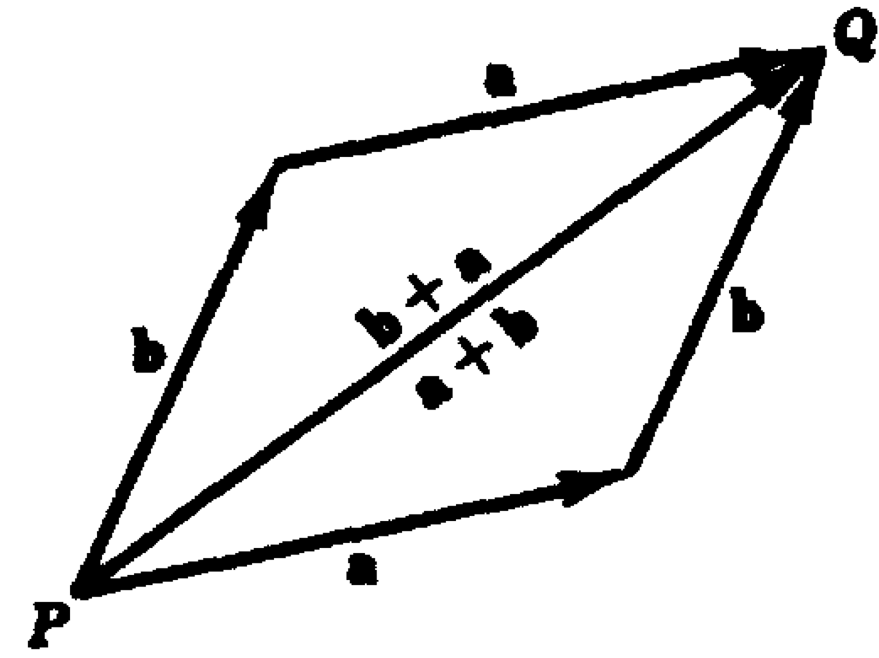
يتضح من الشكل ١٨ — ٨ أن $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

٢ – برهن أن $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

يتضح من الشكل ١٨ – ٩ أن $\mathbf{PC} = \mathbf{PB}+\mathbf{BC} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$ وكذلك $\mathbf{PC} = \mathbf{PA}+\mathbf{AC} = \mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$



شكل ١٨ — ٩



شكل ١٨ — ٨

٣ – لتكن a,b,c ثلاثة متجهات منبعثة من نقطة P بحيث تقع نهاياتها A, B, C على مستقيم واحد كما فى الشكل (١٨–١٠) فإذا قسمت C الجزء BA بنسبة $x : y$ حيث $x+y=1$ فإنه يكون :

$$\mathbf{c} = \mathbf{PB}+\mathbf{BC} = \mathbf{b}+x(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = x\mathbf{a}+(1-x)\mathbf{b} = x\mathbf{a}+y\mathbf{b}$$

وعلى سبيل المثال ، إذا نصفت C الجزء $BA,$ فيكون $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ و $\mathbf{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b}).$

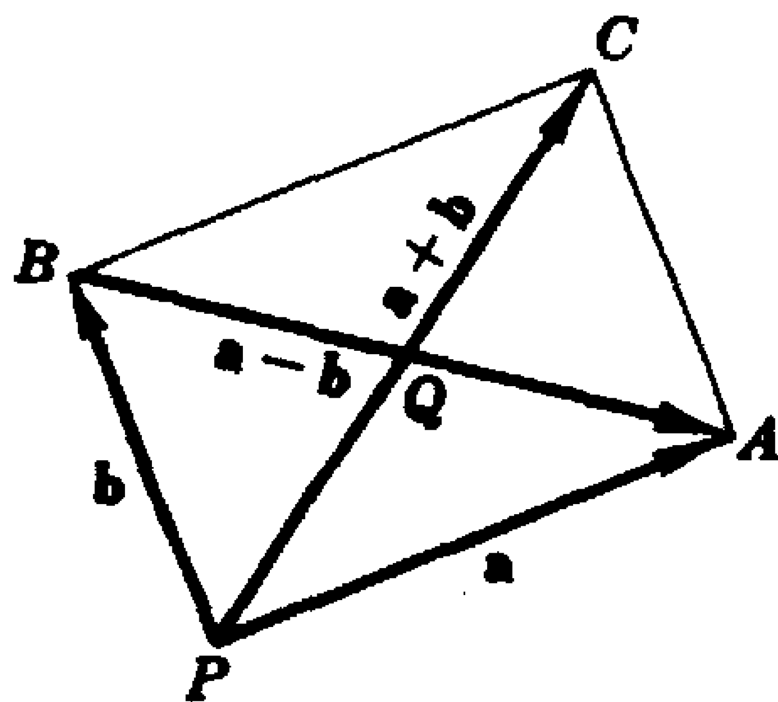
٤ – برهن أن قطرى متوازى الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

لنفرض أن القطرين يتقاطعان عند $Q,$ كما هو مبين فى الشكل (١٨ – ١١) .

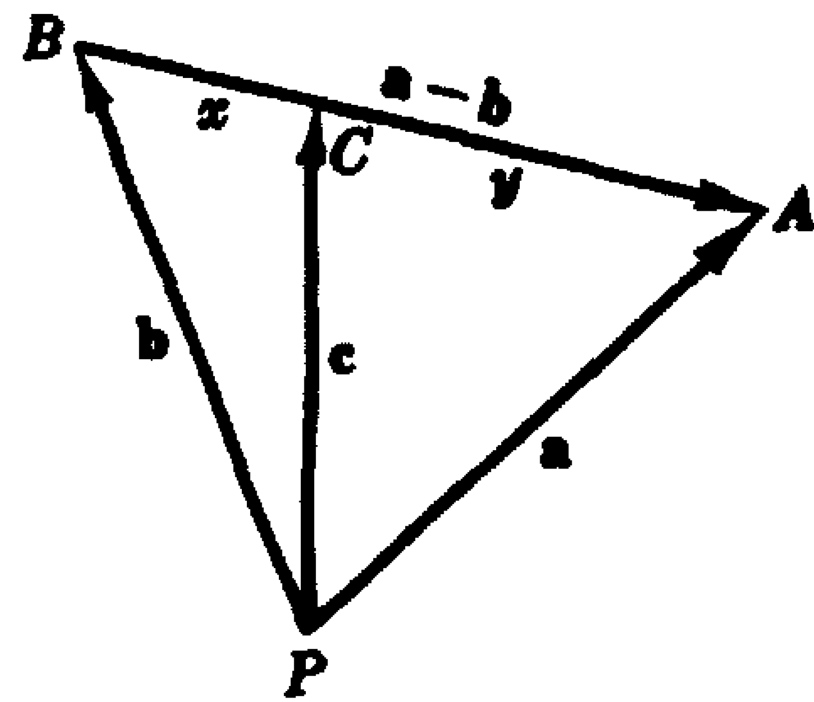
بما أن

$\mathbf{PB} = \mathbf{PQ}+\mathbf{QB} = \mathbf{PQ}-\mathbf{BQ}$ أو $\mathbf{b} = x(\mathbf{a}+\mathbf{b})-y(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = (x-y)\mathbf{a}+(x+y)\mathbf{b}$

فإن $x+y=1$ و $x-y=0$ وبالتالى $x=y=\frac{1}{2}$ والنقطة Q هى منتصف كل من القطرين .



شكل ١٨ — ١١



شكل ١٨ — ١٠

٥ – المتجهين $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j},$ أوجد مقدار اتجاه كل من (أ) $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$
(ب) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ (جـ) $\mathbf{b}-\mathbf{a}$

(أ) بما أن $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$: إذن $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5;$ $\tan\theta = a_2/a_1 = 4/3,$ $a_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta,$ $\cos\theta = 3/5$ والزاوية θ واقعة فى الربع الأول وتساوى $53°8'.$

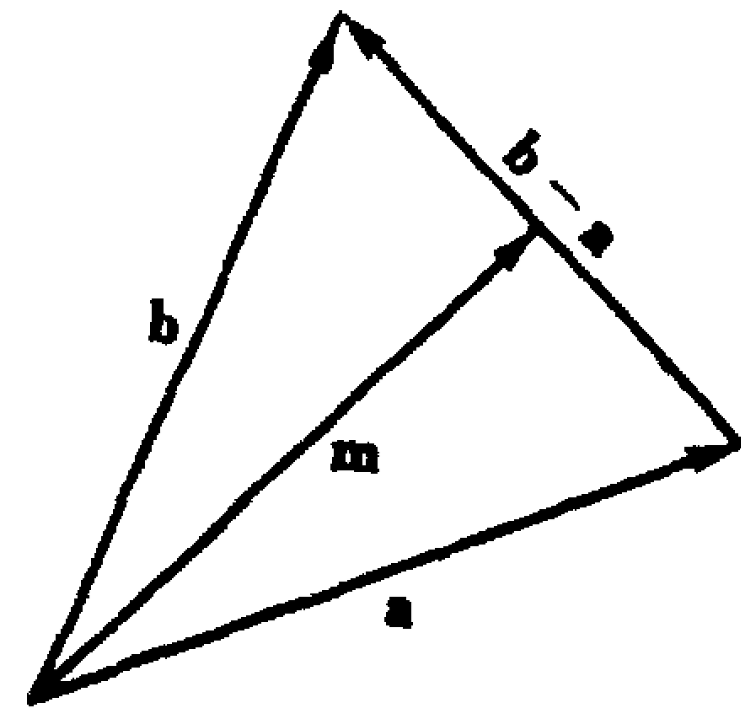
بما أن $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}$ إذن $|\mathbf{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5};$ $\tan\theta = -1/2,$ $\cos\theta = 2/\sqrt{5};$ $\theta = 360° - 26°34' = 333°26'.$

(ب)
$$\mathbf{a}+\mathbf{b} = (3\mathbf{i}+4\mathbf{j})+(2\mathbf{i}-\mathbf{j}) = 5\mathbf{i}+3\mathbf{j}.$$
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{34};\ \tan\theta = 3/5,\ \cos\theta = 5/\sqrt{34};\ \theta = 30°58'.$$

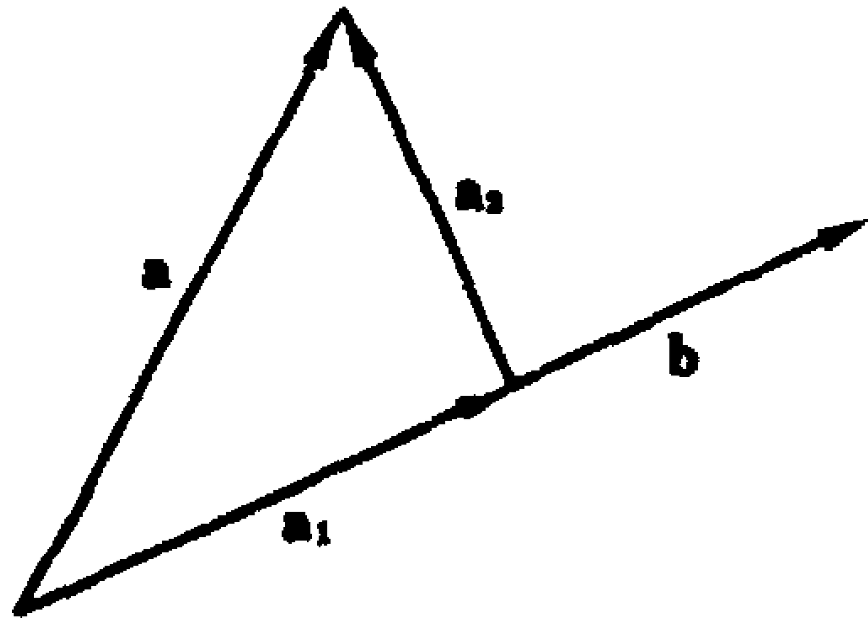
(جـ)
$$\mathbf{b}-\mathbf{a} = (2\mathbf{i}-\mathbf{j})-(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}) = -\mathbf{i}-5\mathbf{j}.$$
$$|\mathbf{b}-\mathbf{a}| = \sqrt{26};\ \tan\theta = 5,\ \cos\theta = -1/\sqrt{26};\ \theta = 258°41'.$$

٦ — برهن أن المستقيم المنصف لقاعدة المثلث المتساوى الساقين عمودى على القاعدة [فى الشكل ١٨ — ١٢ $(|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.)$] .

بما أن $\mathbf{m}$ منصف القاعدة فإنه يكون حسب المسألة ٣ .
$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$
ومنه
$$\mathbf{m}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = 0$$
وهذا ما نريد برهانه .



شكل ١٨ — ١٢



شكل ١٨ — ١٣

٧ — حلل $\mathbf{a}$ إلى مركبتين $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ الأولى موازية لمتجه مفروض $\mathbf{b}$ والثانية عمودية عليه .

من الشكل ١٨ — ١٣ أعلاه نجـد $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b}$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ و $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b} = 0$, إذن :
$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}-\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}-c\mathbf{b},\qquad \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a}-c\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-c|\mathbf{b}|^2 = 0$$
ومنـه $c = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$. إذن $\mathbf{a}_1 = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$ و $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}-c\mathbf{b} = \mathbf{a}-\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}.$

والعـدد $\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ هو المسقط العددى لـ $\mathbf{a}$ على $\mathbf{b}$ ؛ وأن المتجه $\left(\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ هو المسقط المتجه لـ $\mathbf{a}$ على $\mathbf{b}$.

٨ — حلل $\mathbf{a} = 4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ إلى مركبتين $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ الأولى موازية لـ $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}+\mathbf{j}$ والثانية عمودية عليه .

حسب المسألة ٧ يكون . $c = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \dfrac{12+3}{10} = \dfrac{3}{2}.$

وبالتالى $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b} = \tfrac{9}{2}\mathbf{i}+\tfrac{3}{2}\mathbf{j}$ و $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}-\mathbf{a}_1 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{3}{2}\mathbf{j}.$

٩ — أوجد الشغل اللازم بذله لتحريك جسم على طول المتجه $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ إذا كانت القوة المؤثرة تعطى بالعلاقة $\mathbf{b} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$.

الشغل المبذول = المركبة العددية لـ $\mathbf{b}$ على $\mathbf{a}$ (المسافة المقطوعة)
$$= (|\mathbf{b}|\cos\theta)\,|\mathbf{a}| = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = (2\mathbf{i}+\mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}) = 10$$

١٠ — إذا كان $\mathbf{a} = \mathbf{i}f_1(u)+\mathbf{j}f_2(u)$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i}g_1(u)+\mathbf{j}g_2(u),$ برهن أن $\dfrac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{b}}{du}.$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i}f_1+\mathbf{j}f_2)\cdot(\mathbf{i}g_1+\mathbf{j}g_2) = f_1g_1 + f_2g_2,$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = f_1'g_1 + f_1g_1' + f_2'g_2 + f_2g_2' \qquad \left(f_1' = \frac{df_1(u)}{du}\right)$$

$$= (f_1'g_1 + f_2'g_2) + (f_1g_1' + f_2g_2')$$

$$= (\mathbf{i}f_1' + \mathbf{j}f_2')\cdot(\mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2) + (\mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2)\cdot(\mathbf{i}g_1' + \mathbf{j}g_2') = \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{du}$$

١١ – إذا كانت $\mathbf{a} = \mathbf{i}\,f_1(u) + \mathbf{j}\,f_2(u)$ ذا مقدار ثابت فبرهن أن $\mathbf{a}$ و $d\mathbf{a}/du$ متعامدان .

استنادا إلى المسألة ١٠ فإننا نحصل من $\mathbf{a.a}$ = ثابت $\neq 0$ على $\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{du} = 2\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{du} = 0.$

وبالتالي فإن $\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{du} = 0$ ومنه يكون المتجهان $\mathbf{a}$ و $\frac{d\mathbf{a}}{du}$ متعامدان . وعلى هذا فإن مماس الدائرة عند إحدى نقاطها P عمودي على نصف القطر المار بـ P .

١٢ – إذا كان $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos^2\theta + \mathbf{j}\sin^2\theta,$ فأوجد $\mathbf{t}$.

$$d\mathbf{r}/d\theta = -\mathbf{i}\sin 2\theta + \mathbf{j}\sin 2\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}} = \sqrt{2}\sin 2\theta \quad , \quad = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

١٣ – إذا كان $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta,$ فأوجد $\mathbf{t}$ و $\mathbf{n}$ عندما $\theta = \frac{1}{4}\pi.$

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos^3\theta + a\mathbf{j}\sin^3\theta$$

$$d\mathbf{r}/d\theta = -3a\mathbf{i}\cos^2\theta\sin\theta + 3a\mathbf{j}\sin^2\theta\cos\theta$$

$$ds/d\theta = |d\mathbf{r}/d\theta| = 3a\sin\theta\cos\theta$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{3a\cos\theta}\mathbf{i} + \frac{1}{3a\sin\theta}\mathbf{j}$$

فإذا كان $\theta = \frac{1}{4}\pi$: فإنه يكون :

$$\mathbf{t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},\ \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{j},\ |K| = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{2}{3a},\ \mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

١٤ – بين أن المتجه $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ عمودي على المستقيم $ax + by + c = 0$.

لتكن $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ نقطتين مختلفتين على المستقيم فعندئذ يكون $ax_1 + by_1 + c = 0,$ $ax_2 + by_2 + c = 0.$ وإذا طرحنا الأولى من الثانية نجد :

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

ومنه

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j})\cdot[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}]$$

$$= \mathbf{a}\cdot\mathbf{P_1P_2} = 0$$

والمتجه $\mathbf{a}$ عمودي على المستقيم .

١٥ – استخدم طرق المتجهات لتحصل على :

(ا) معادلة المستقيم المار بالنقطة $P_1(2,3)$ والعمودي على المستقيم $x + 2y + 5 = 0$.

(ب) معادلة المستقيم المار بالنقطتين $P_1(2, 3)$ و $P_2(5, -1)$.

خذ $P(x, y)$ نقطة ما أخرى على المستقيم المطلوب .

(ا) إن المتجه $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ وفق المسألة ١٤ عمودى على $x + 2y + 5 = 0.$ وبالتالى فإن المتجه $\mathbf{P_1P} = (x-2)\mathbf{i} + (y-$ مواز لـ $\mathbf{a}$ أى أن :

$$(x-2)\mathbf{i} + (y-3)\mathbf{j} = k(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

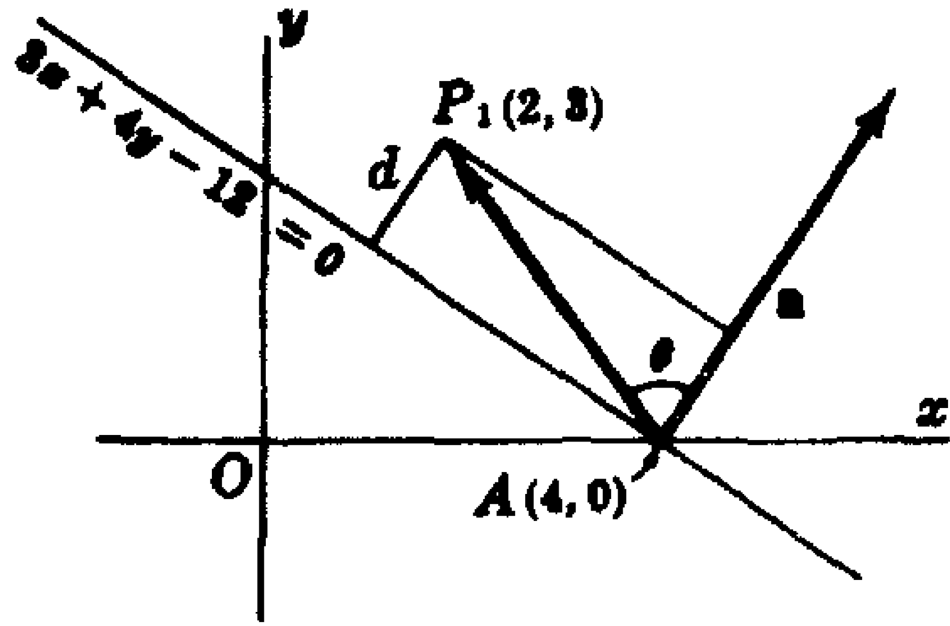
حيث k متغير عددى . وبمساواة المركبات نجد أن $x - 2 = k, \; y - 3 = 2k.$ وبحذف k نجد المعادلة المطلوبة $y - 3 = 2(x - 2)$ أو $2x - y - 1 = 0.$

(ب) لدينا $\mathbf{P_1P} = (x-2)\mathbf{i} + (y-3)\mathbf{j}$ و $\mathbf{P_1P_2} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

وحيث أن $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ عمودى على $\mathbf{P_1P_2}$ وبالتالى على $\mathbf{P_1P}$ فإن المعادلة المطلوبة هى

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{P_1P} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot [(x-2)\mathbf{i} + (y-3)\mathbf{j}] = 0 \quad \text{أو} \quad 4x + 3y - 17 = 0$$

١٦ ــ استخدم طرق المتجهات لتحصل على بعد النقطة $P_1(2,3)$ عن المستقيم $3x + 4y - 12 = 0$.



لننشئ من أية نقطة ملائمة على المستقيم ، ولتكن $A(4, 0)$ متجها $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ عموديا على المستقيم . فيكون البعد المطلوب هو :

$$d = |\mathbf{AP_1}| \cos \theta$$

وحيث أن

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{AP_1} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{AP_1}| \cos \theta = |\mathbf{a}|\, d;$$

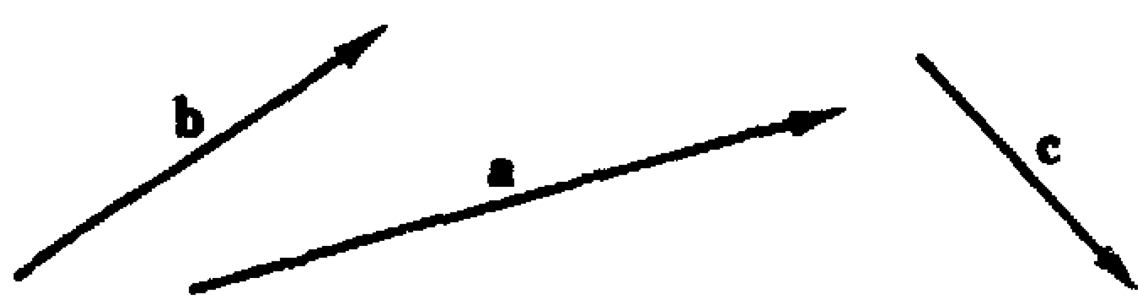
فإنه

$$d = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{AP_1}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}{5} = \frac{-6 + 12}{5} = \frac{6}{5}$$

شكل ١٨ ــ ١٤

مســـــائل اضــــــافية

١٧ ــ إذا كانت لدينا المتجهات $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$، (أنظر الشكل ١٨ــ١٥) فأنشئ :



شكل ١٨ ــ ١٥

(ا) $2\mathbf{a}$ (د) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$

(ب) $-3\mathbf{b}$ (هـ) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$

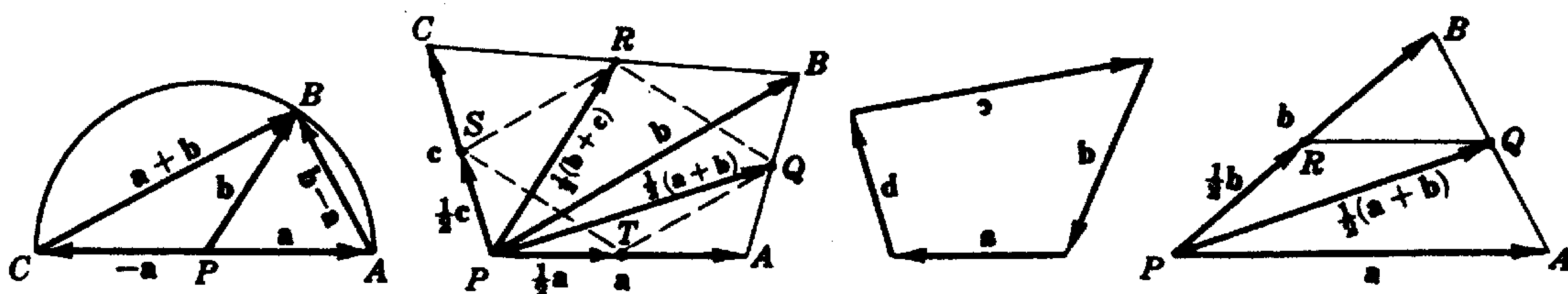
(جـ) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

١٨ ــ برهن أن الخط المستقيم الذى يصل بين منتصفى ضلعين فى مثلث يوازى الضلع الثالث ويساوى نصفه . أنظر الشكل ١٨ ــ ١٦ .

١٩ ــ إذا كانت $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ الأضلاع المتتالية لشكل رباعى فبرهن أن $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$. أنظر الشكل ١٨ ــ ١٧ .

إرشـــاد : ليكن P و Q رأسين غير متتالين . احسب $\mathbf{PQ}$ بطريقتين مختلفتين .

٢٠ ــ برهن أنه إذا وصلنا منتصفات الأضلاع المتتالية لشكل رباعى فإن الشكل الرباعى الناتج هو متوازى أضلاع . أنظر الشكل ١٨ ــ ١٨ .



شكل ١٨ ــ ١٩ شكل ١٨ ــ ١٨ شكل ١٨ ــ ١٧ شكل ١٨ ــ ١٦

٢١ ــ برهن باستخدام الشكل الذى فيه $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ هو نصف قطر دائرة ، أن الزاوية المحيطية المقابلة لنصف دائرة هى زاوية قائمة . أنظر الشكل ١٨ ــ ١٩ .

٢٢ ــ أوجد طول كل من المتجهات التالية والزاوية التى يصنعها مع المحور x الموجب :

(ا) $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, (ب) $-\mathbf{i}+\mathbf{j}$, (جـ) $\mathbf{i}+\sqrt{3}\,\mathbf{j}$, (د) $\mathbf{i}-\sqrt{3}\,\mathbf{j}$.

ج : (ا) $\sqrt{2}; \theta = \frac{1}{4}\pi$, (ب) $\sqrt{2}; \theta = 3\pi/4$, (جـ) $2; \theta = \pi/3$, (د) $2; \theta = 5\pi/3$

٢٣ ــ بين أنه إذا كان $\mathbf{u}$ هو المتجه الناتج عن دوران متجه الوحدة $\mathbf{i}$ فى اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة بزاوية مقدارها θ فإن $\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$.

٢٤ ــ استخدم قانون جيوب التمام فى المثلثات لتحصل على $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}\{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2\}$.

٢٥ ــ اكتب كلا من المتجهات التالية على الشكل $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$:

(ا) المتجه الذى يصل نقطة الأصل بالنقطة $P(2,-3)$; (ب) المتجه الذى يصل بين النقطتين $P_1(2.3)$ و $P_2(4,2)$ (جـ) المتجه الذى يصل النقطة $P_2(4,2)$ بالنقطة $P_1(2,3)$ (د) متجه الوحدة فى الاتجاه $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ (هـ) المتجه الذى مقداره 6 واتجاهه 120° .

ج : (ا) $2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$. (ب) $2\mathbf{i}-\mathbf{j}$. (جـ) $-2\mathbf{i}+\mathbf{j}$. (د) $\frac{3}{5}\mathbf{i}+\frac{4}{5}\mathbf{j}$, (هـ) $-3\mathbf{i}+3\sqrt{3}\,\mathbf{j}$

٢٦ ــ استخدم طرق المتجهات لتحصل على معادلة المسافة بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$.

٢٧ ــ إذا كانت $B(1,5)$ $O(0,0), A(3,1)$ ثلاثة رؤوس من متوازى الأضلاع $OAPB$, فما هى إحداثيا P .

٢٨ ــ (ا) أوجد k بحيث يكون $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}-2\mathbf{j}$ عموديا على $\mathbf{b} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$.

(ب) أوجد متجها عموديا على $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

٢٩ ــ برهن الخواص ٨ ــ ١٠ للضرب القياسى .

٣٠ ــ أوجد المسقط المتجه والمسقط العددى لـ $\mathbf{b}$ على $\mathbf{a}$ إذا علمت :

(ا) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i}+\mathbf{j}$; ، $\mathbf{a} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}$, (ب) $\mathbf{b} = 10\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, .

ج : (ا) $-\mathbf{i}+2\mathbf{j}, -\sqrt{5}$ (ب) $4\mathbf{i}+6\mathbf{j}, 2\sqrt{13}$

٣١ ـ بين أن ثلاثة متجهات $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ تشكل مثلثا بعد إزاحات متوازية بشرط

(ا) أن يكون أحد المتجهات هو مجموع المتجهين الآخرين أو (ب) أن يكون $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$.

٣٢ ـ بين أن $\mathbf{a} = 3\mathbf{i}-6\mathbf{j},\ \mathbf{b}=4\mathbf{i}+2\mathbf{j},\ \mathbf{c}=-7\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ هي أضلاع مثلث قائم. تحقق من أن منتصف الوتر متساوى الأبعاد عن رؤوس المثلث .

٣٣ ـ أوجد متجه وحدة المماس $\mathbf{t}=d\mathbf{r}/ds$ بفرض أن :

(ا) $\mathbf{r}=4\mathbf{i}\cos\theta+4\mathbf{j}\sin\theta$; (ب) $\mathbf{r}=e^{\theta}\mathbf{i}+e^{-\theta}\mathbf{j}$; (جـ) $\mathbf{r}=\theta\mathbf{i}+\theta^2\mathbf{j}$.

ج : (ا) $-\mathbf{i}\sin\theta+\mathbf{j}\cos\theta$, (ب) $\dfrac{e^{\theta}\mathbf{i}-e^{-\theta}\mathbf{j}}{\sqrt{e^{2\theta}+e^{-2\theta}}}$, (جـ) $\dfrac{\mathbf{i}+2\theta\mathbf{j}}{\sqrt{1+4\theta^2}}$

٣٤ ـ (ا) أوجد $\mathbf{n}$ لمنحنى المسألة ٣٣ (ا) . (ب) أوجد $\mathbf{n}$ لمنحنى المسألة ٣٣ (جـ) .

(جـ) أوجد $\mathbf{t}$ و $\mathbf{n}$ بفرض أن $x=\cos\theta+\theta\sin\theta,\ y=\sin\theta-\theta\cos\theta$.

ج : (ا) $\mathbf{i}\cos\theta-\mathbf{j}\sin\theta$, (ب) $\dfrac{-2\theta}{\sqrt{1+4\theta^2}}\mathbf{i}+\dfrac{1}{\sqrt{1+4\theta^2}}\mathbf{j}$, (جـ) $\mathbf{t}=\mathbf{i}\cos\theta+\mathbf{j}\sin\theta,\ \mathbf{n}=-\mathbf{i}\sin\theta+\mathbf{j}\cos\theta$

الفصل التاسع عشر

الحركة الخطية الانحنائية

السرعة فى الحركة الخطية الانحنائية :

لتكن $P(x, y)$ نقطة تتحرك على منحنى معادلته $x = f(t),\ y = g(t)$.

حيث t الزمن . باشتقاق متجه الموضع :

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y \qquad (١)$$

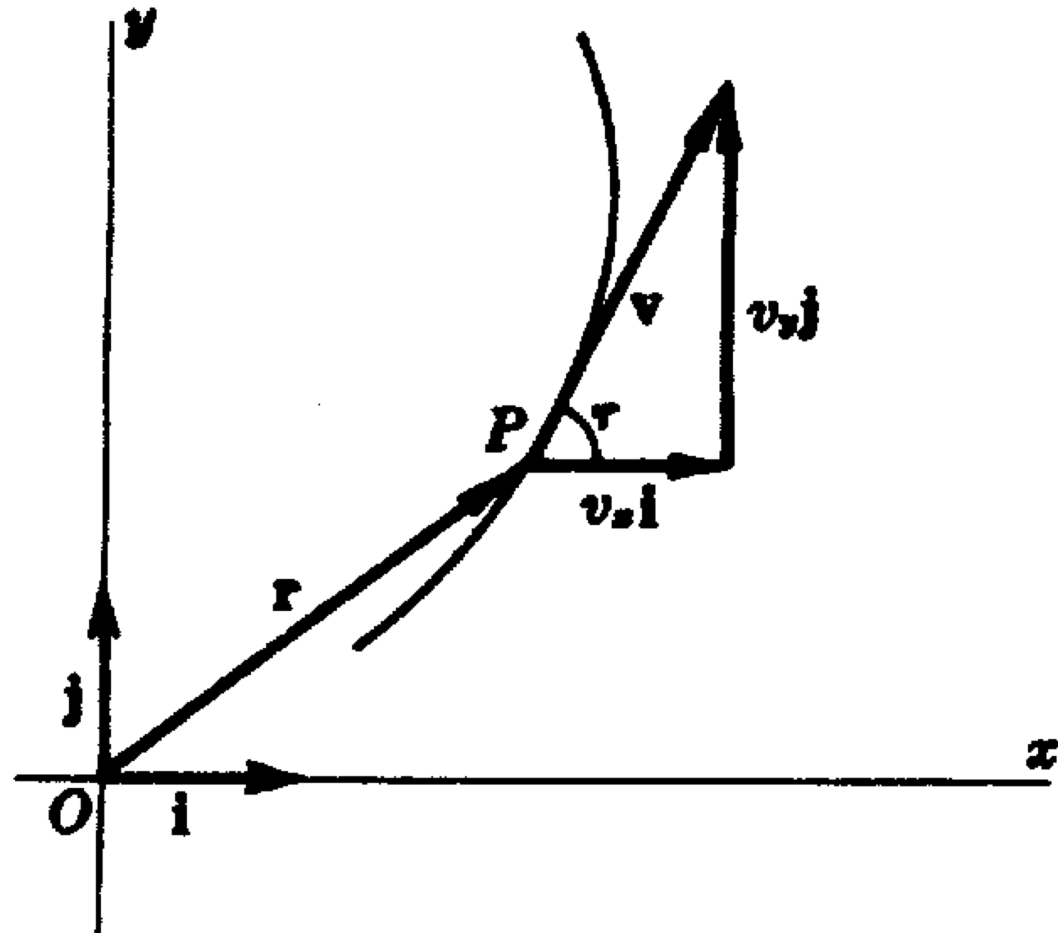
بالنسبة لـ t, نحصل على متجه السرعة .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y \qquad (٢)$$

حيث $v_x = dx/dt$ و $v_y = dy/dt.$

ويعطى مقدار $\mathbf{v}$ بـ

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{ds}{dt}$$



شكل ١٩ — ١

وأما اتجاه $\mathbf{v}$ عند P فهو المماس للمسار عند P كما هو موضح فى الشكل ١٩ — ١ . وإذا رمزنا بـ τ لاتجاه $\mathbf{v}$ (الزاوية بين $\mathbf{v}$ والمحور x الموجب) فإن $\tan\tau = v_y/v_x,$ حيث يتعين الربع الذى تقع فيه بالعلاقتين $v_x = |\mathbf{v}|\cos\tau$ و $v_y = |\mathbf{v}|\sin\tau.$

التسارع (العجلة) فى الحركة الخطية الانحنائية :

باشتقاق المعادلة (٢) بالنسبة لـ t نحصل على متجه التسارع :

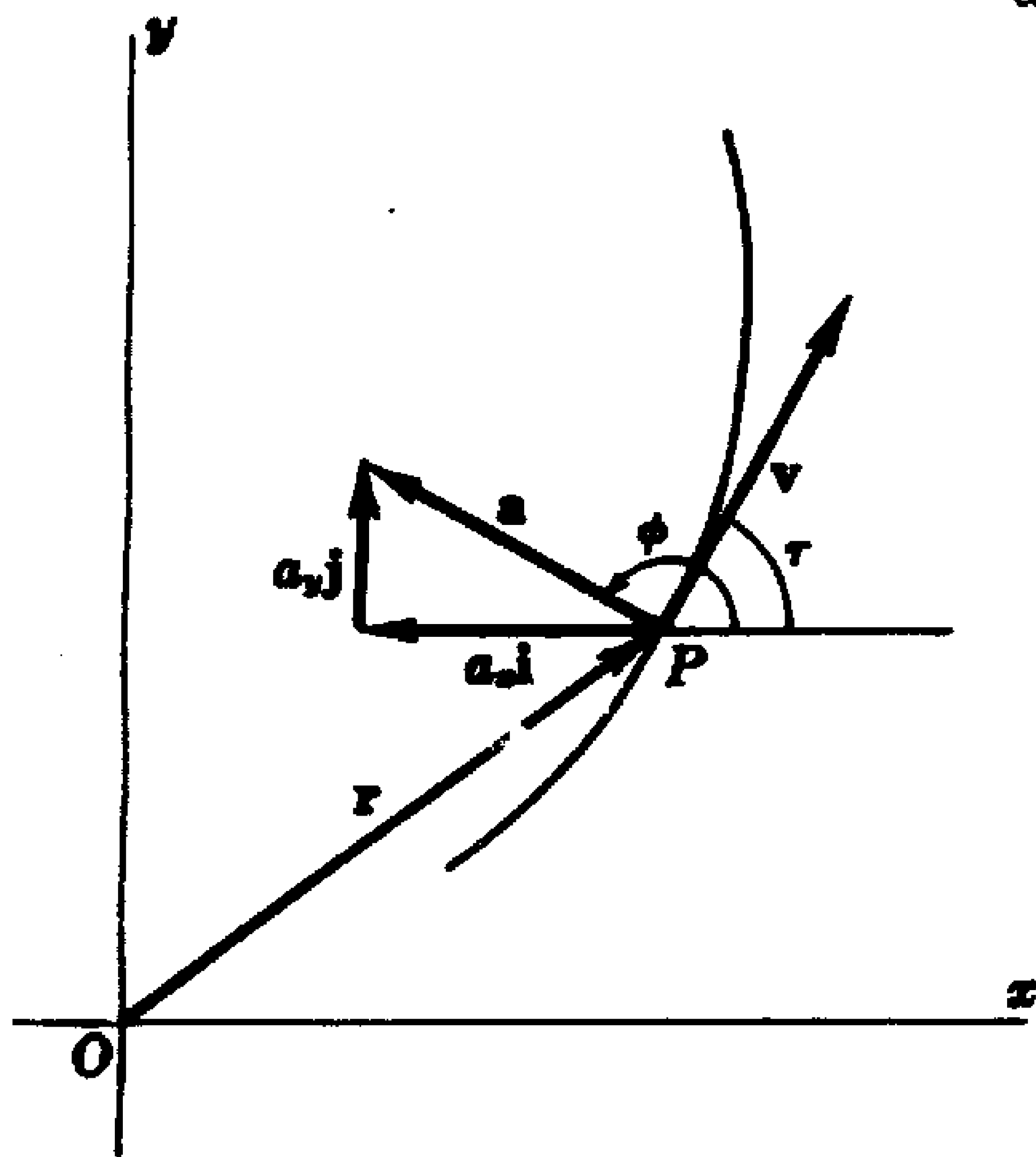
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y \qquad (٣)$$

حيث $a_x = d^2x/dt^2$ و $a_y = d^2y/dt^2.$

ويعطى مقدار $\mathbf{a}$ بـ

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

وأما الاتجاه ϕ لـ $\mathbf{a}$ فيعطى بـ $\tan\phi = a_y/a_x$ حيث يتعين الربع الذى تقع فيه بالمعادلتان $a_x = |\mathbf{a}|\cos\phi$ و $a_y = |\mathbf{a}|\sin\phi.$ أنظر الشكل ١٩ — ٢ .



شكل ١٩ — ٢

سنعطى فى المسائل ١ — ٣ حلين يستعمل أحدهما متجه الموضع (١) ومتجه السرعة (٢) ومتجه التسارع (٣)

وهذا الحل يتطلب تمثيلا بارامتريا للمسار . فى حين يستخدم الحل الآخر ، الأكثر شيوعا ، المركبات x و y لهذه المتجهات دون اللجوء إلى التمثيل البارامترى للمنحنى . والحلان ، بالطبع ، لا يختلفان عن بعضهما من حيث الأساس .

أنظر المسائل ١ – ٣

المركبتان المماسية والعمودية للتسارع : من المعادلة (٦) فى الفصل الثامن عشر نجــد أن :

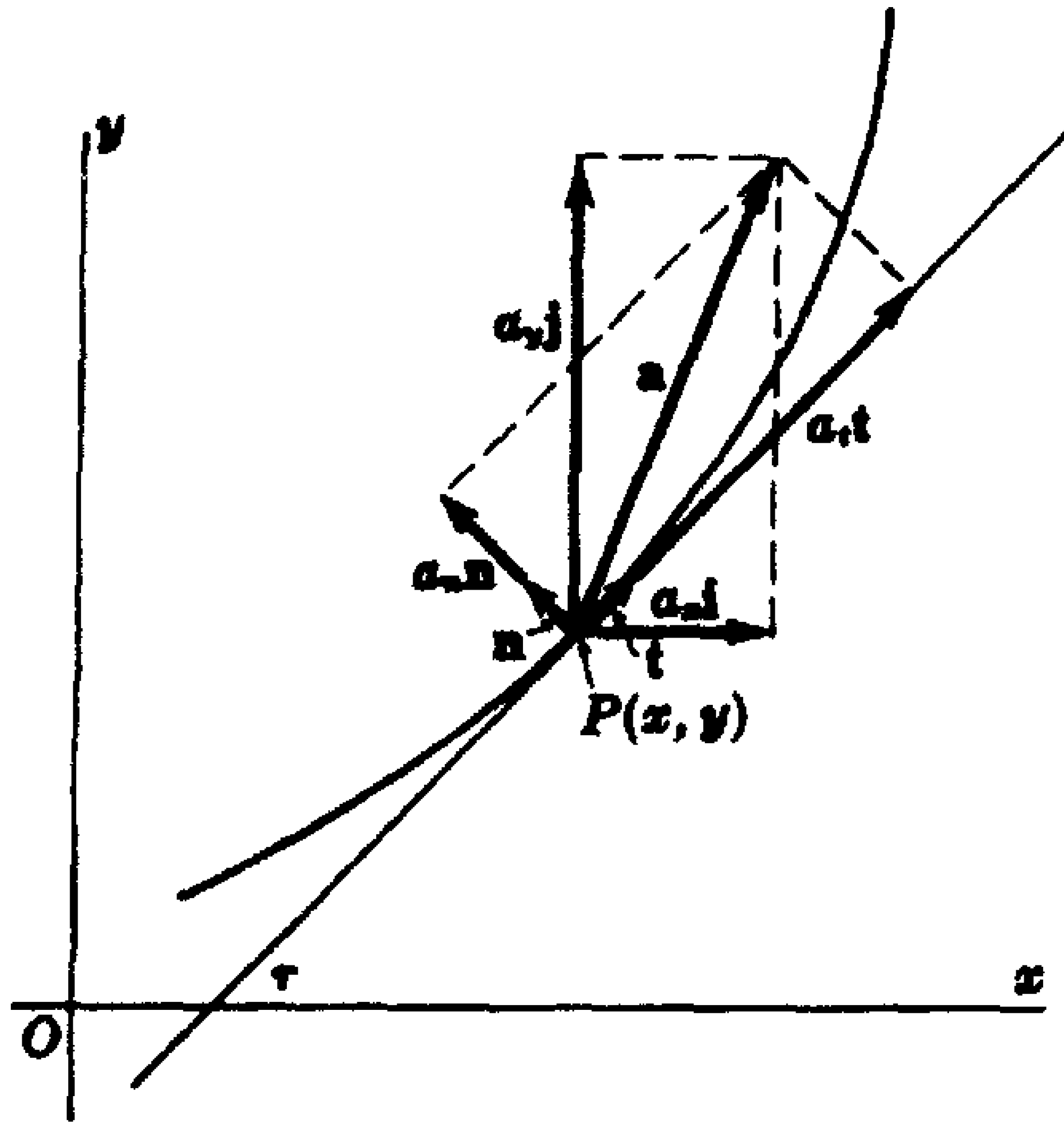
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}\frac{ds}{dt} \quad (٤)$$

ومنــه

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{ds}{dt} \quad (٥)$$

$$= \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + |K|\mathbf{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

وذلك استنادا إلى المعادلة (٧) من الفصل الثامن عشر .



شكل ١٩ — ٣

تعطينا المعادلة (٥) تحليل متجه التسارع عند النقطة P إلى مركبتين إحداهما فى اتجاه المماس والأخرى فى الاتجاه العمودى عند هذه النقطة ، فإذا أشرنا إلى هاتين المركبتين بـ a_t و a_n على الترتيب فإن مقدارها يعطى بالمعادلتين

$$|a_n| = \frac{(ds/dt)^2}{R} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R} \quad , \quad |a_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right|$$

حيث R نصف قطر انحناء المسار عند P . انظر الشكل ١٩ – ٣

وبما أن $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2,$ إذن :

$$a_n^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_t^2$$

وهذه العلاقة تدلنا على طريقة أخرى لتعيين $|a_n|$.

أنظر المسائل ٤ – ٨

مسـائل محـلولة

– ناقش الحركة المعطاة بالمعادلتين $x = \cos 2\pi t,\ y = 3\sin 2\pi t.$ أوجد مقدار واتجاه كل من متجهى السرعة والتسارع عندما (ا) $t = 1/6$ و (ب) $t = 2/3$.

أن الحركة على القطع الناقص $9x^2 + y^2 = 9.$ فإذا بدأنا من $t = 0$ عند $(1, 0)$ فإن النقطة المتحركة تتحرك على المنحنى فى اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة .

الحل الأول :

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = \mathbf{i}\cos 2\pi t + 3\mathbf{j}\sin 2\pi t$$
$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y = -2\pi\mathbf{i}\sin 2\pi t + 6\pi\mathbf{j}\cos 2\pi t$$
$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y = -4\pi^2\mathbf{i}\cos 2\pi t - 12\pi^2\mathbf{j}\sin 2\pi t$$

(ا) وعندما $t=1/6$ يكون :

$$\mathbf{a} = -2\pi^2\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\,\pi^2\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = -\sqrt{3}\pi\mathbf{i} + 3\pi\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{(-\sqrt{3}\pi)^2 + (3\pi)^2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\tau = 120° \quad \text{و} \quad \tan\tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{(-2\pi^2)^2 + (-6\sqrt{3}\,\pi^2)^2} = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$

$$\phi = 259°6' \quad \text{و} \quad \tan\phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7},$$

(ب) وعندما $t=2/3$ يكون :

$$\mathbf{a} = 2\pi^2\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\,\pi^2\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \mathbf{v} = \sqrt{3}\,\pi\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j}$$

$$\tau = 5\pi/3 \quad \text{و} \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\,\pi; \quad \tan\tau = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = 1/2,$$

$$\phi = 79°6' \quad \text{و} \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\,\pi^2; \quad \tan\phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = 1/2\sqrt{7},$$

الحل الثاني :

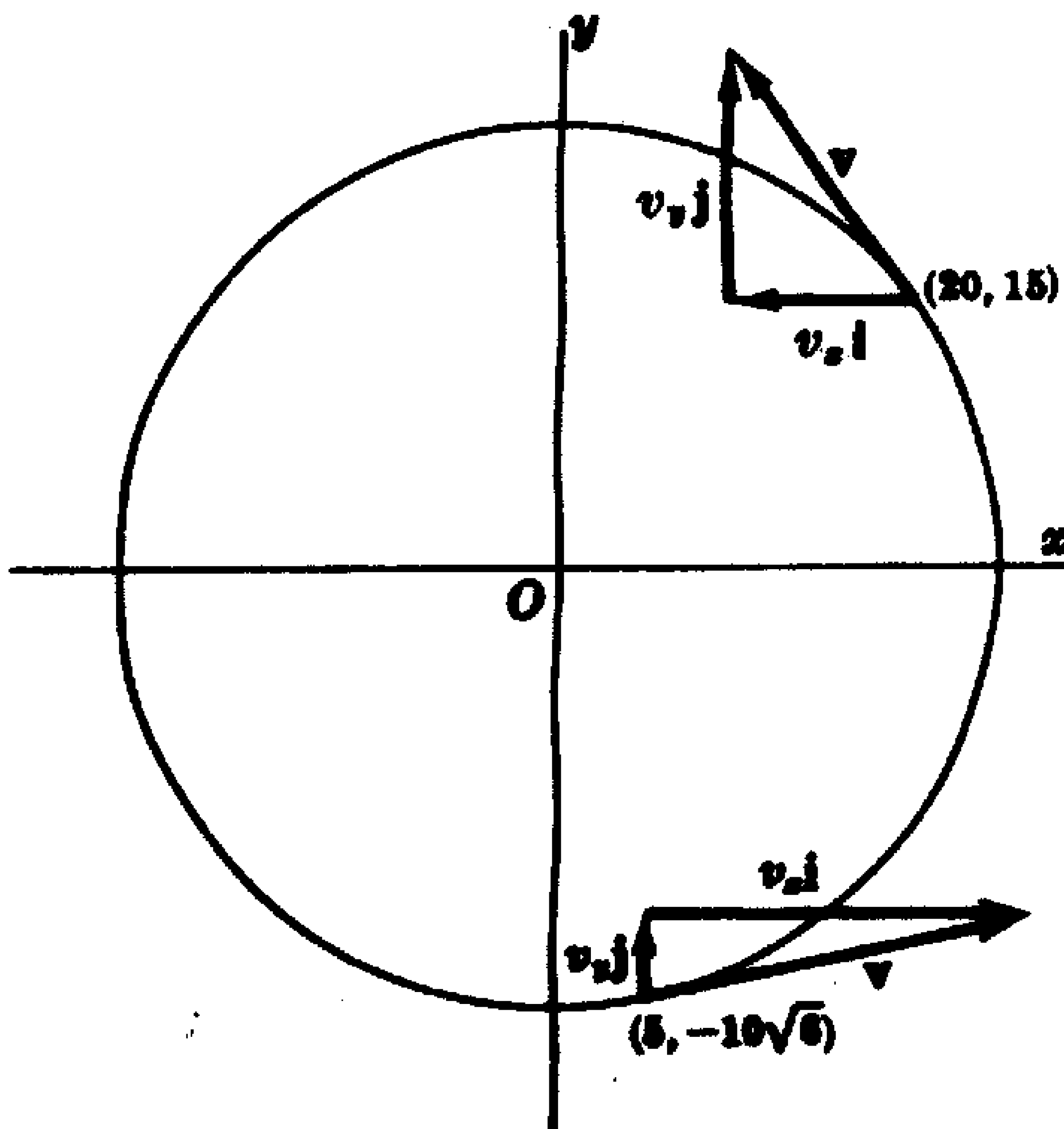
$$x = \cos 2\pi t, \quad v_x = dx/dt = -2\pi\sin 2\pi t, \quad a_x = d^2x/dt^2 = -4\pi^2\cos 2\pi t$$
$$y = 3\sin 2\pi t, \quad v_y = dy/dt = 6\pi\cos 2\pi t, \quad a_y = d^2y/dt^2 = -12\pi^2\sin 2\pi t$$

(ا) عندما $t = 1/6$ يكون :

$$v_x = -\sqrt{3}\,\pi, \quad v_y = 3\pi, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{3}\,\pi$$
$$\tan\tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2, \quad \text{و} \quad \tau = 120°$$
$$a_x = -2\pi^2, \quad a_y = -6\sqrt{3}\,\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$
$$\tan\phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7}, \quad \text{و} \quad \phi = 259°6'$$

(ب) وعندما $t = 2/3$ يكون :

$$v_x = \sqrt{3}\,\pi, \quad v_y = -3\pi, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\,\pi$$
$$\tan\tau = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = \tfrac{1}{2}, \quad \text{و} \quad \tau = 5\pi/3$$
$$a_x = 2\pi^2, \quad a_y = 6\sqrt{3}\,\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$
$$\tan\phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = 1/2\sqrt{7}, \quad \text{و} \quad \phi = 79°6'$$



شكل ١٩ ــ ٤

٢ ــ تتحرك نقطة على الدائرة: $x^2 + y^2 = 625$ في اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة بمعدل $|\mathbf{v}| = 15$. أوجد τ، $|\mathbf{a}|$، و ϕ عند (ا) النقطة $(20, 15)$ وعند (ب) النقطة $(5, -10\sqrt{6})$

ارجع إلى الشكل ١٩ ــ ٤ .

الحل الأول : لدينا .

$$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = 225 \qquad (\text{i})$$

وبالاشتقاق بالنسبة لـ t نحصل على.

$$v_x a_x + v_y a_y = 0. \qquad (\text{ii})$$

ومن المعادلة $x^2 + y^2 = 625,$ باشتقاقين متتالين نحصل على :

$$x v_x + y v_y = 0 \qquad (\text{iii})$$

وعلى

$$x a_x + v_x^2 + y a_y + v_y^2 = 0$$

أو

$$xa_x + ya_y = -225 \qquad \text{(iv)}$$

وبحل (i) و (iii) معا نجد أن :

$$v_x = \pm \tfrac{3}{4} y \qquad \text{(v)}$$

وبحل (i) و (iv) معا نجـد أن :

$$a_x = \frac{225 v_y}{y v_x - x v_y} \qquad \text{(vi)}$$

(ا) من الشكل ١٩ – ٤ نلاحظ أن $v_x < 0$ عند (20, 15). ومن (v) نجد $v_x = -9$; ومن (iii) $v_y = 12$. ومنه $\cos\tau = -3/5$, $\tan\tau = -4/3$, وبالتالى $\tau = 126°52'$. ونجـد من (vi) أن $a_x = -36/5$; ومن (iv) نجد أن $a_y = -27/5$; إذن $|\mathbf{a}| = 9$. ومنه $\cos\phi = -4/5$, $\tan\phi = 3/4$, وبالتالى $\phi = 216°52'$.

(ب) من الشكل نلاحظ أن $v_x > 0$, عند $(5, -10\sqrt{6})$. ومن (v) نجـد $v_x = 6\sqrt{6}$; ومن (iii) نجد $v_y = 3$. , . إذن $\sin\tau = 1/5$, $\tan\tau = \sqrt{6}/12$, وبالتالى $\tau = 11°32'$. من (vi) نجد $a_x = -9/5$; ومن (iv) نجد $a_y = 18\sqrt{6}/5$; و $|\mathbf{a}| = 9$. إذن $\cos\phi = -1/5$, $\tan\phi = -2\sqrt{6}$, وبالتالى $\phi = 101°32'$.

الحل الثانى :

باستخدام المعادلات البارامترية $x = 25\cos\theta$, $y = 25\sin\theta$, نجد عند $P(x, y)$

$$\mathbf{r} = 25\mathbf{i}\cos\theta + 25\mathbf{j}\sin\phi$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-25\mathbf{i}\sin\theta + 25\mathbf{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = -15\mathbf{i}\sin\theta + 15\mathbf{j}\cos\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-15\mathbf{i}\cos\theta - 15\mathbf{j}\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = -9\mathbf{i}\cos\theta - 9\mathbf{j}\sin\theta$$

حيث أن $|\mathbf{v}| = 15$ مكافئ لسرعة زاوية ثابتة هى $d\theta/dt = 3/5$.

(ا) عند النقطة (20, 15) يكون $\sin\theta = 3/5$ و $\cos\theta = 4/5$.

$$\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 12\mathbf{j};\ \tan\tau = -4/3,\ \cos\tau = -3/5, \quad \text{و} \quad \tau = 126°52'$$

$$\mathbf{a} = -\tfrac{36}{5}\mathbf{i} - \tfrac{27}{5}\mathbf{j};\ |\mathbf{a}| = 9;\ \tan\phi = \tfrac{3}{4},\ \cos\phi = -\tfrac{4}{5}, \quad \text{و} \quad \phi = 216°52'.$$

(ب) وعند النقطة $(5, -10\sqrt{6})$, يكون $\sin\theta = -\tfrac{2}{5}\sqrt{6}$ و $\cos\theta = 1/5$.

$$\mathbf{v} = 6\sqrt{6}\mathbf{i} + 3\mathbf{j};\ \tan\tau = \sqrt{6}/12,\ \cos\tau = \tfrac{2}{5}\sqrt{6}, \quad \text{و} \quad \tau = 11°32'$$

$$\mathbf{a} = -\tfrac{9}{5}\mathbf{i} + \tfrac{18}{5}\sqrt{6}\mathbf{j};\ |\mathbf{a}| = 9;\ \tan\phi = -2\sqrt{6},\ \cos\phi = -1/5, \quad \text{و} \quad \phi = 101°32'$$

٣ – يتحرك جسيم على قوس القطع المكافئ $x^2 = 8y$ الواقع فى الربع الأول بحيث يكون $v_y = 2$, . أوجد $|\mathbf{v}|$, τ, $|\mathbf{a}|$, و ϕ عند النقطة (4, 2) .

الحل الأول :

باشتقاق $x^2 = 8y$ مرتين بالنسبة لـ t وباستخدام $v_y = 2$. نحصل على

$$2xv_x = 8v_y = 16 \quad \text{أو} \quad xv_x = 8, \quad \text{و} \quad xa_x + v_x^2 = 0$$

وعند (4,2) : يكون $v_x = 8/x = 2;\ |\mathbf{v}| = 2\sqrt{2};\ \tan\tau = 1,\ \cos\tau = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, (4,2): و $\tau = \frac{1}{4}\pi$.

$a_x = -1;\ a_y = 0;\ |\mathbf{a}| = 1;\ \tan\phi = 0,\ \cos\phi = -1$, و $\phi = \pi$.

الحل الثانى :

باستخدام المعادلتين البارامتريتين $x = 4\theta,\ y = 2\theta^2$, نحصل على :

$$\mathbf{r} = 4\mathbf{i}\theta + 2\mathbf{j}\theta^2$$

$\mathbf{v} = 4\mathbf{i}\frac{d\theta}{dt} + 4\mathbf{j}\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{\theta}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, حيث $v_x = 4\theta\frac{d\theta}{dt} = 2$ و $\mathbf{a} = -\frac{1}{\theta^3}\mathbf{i}$. $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\theta}$.

وعند النقطة ,(4, 2) يكون $\theta = 1$. وبالتالى :

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j};\ |\mathbf{v}| = 2\sqrt{2};\ \tan\tau = 1,\ \cos\tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \text{و} \quad \tau = \tfrac{1}{4}\pi.$$

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i};\ |\mathbf{a}| = 1;\ \tan\phi = 0,\ \cos\phi = -1, \quad \text{و} \quad \phi = \pi.$$

٤ – أوجد مقدار كل من المركبتين المماسية والعمودية لتسارع الحركة $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$ عند أى زمن t :

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = \mathbf{i}e^t\cos t + \mathbf{j}e^t\sin t$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{i}e^t(\cos t - \sin t) + \mathbf{j}e^t(\sin t + \cos t)$$
$$\mathbf{a} = -2\mathbf{i}e^t\sin t + 2\mathbf{j}e^t\cos t$$

وبالتالى فإن $ds/dt = |\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,e^t$ $|\mathbf{a}| = 2e^t;$ و $|a_n| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{2}\,e^t$. $|a_t| = |d^2s/dt^2| = \sqrt{2}\,e^t;$

٥ – يتحرك جسيم على القطع المكافئ $y = x^2$ من اليسار إلى اليمين بسرعة قياسية ثابتة 5 . أوجد مقدار كل من المركبتين المماسية والعمودية للتسارع عند النقطة (1, 1) .

بما أن السرعة القياسية ثابتة فإن $|a_t| = |d^2s/dt^2| = 0$. عند النقطة (1, 1) يكون $y' = 2x = 2$ و $y'' = 2$.

وبما أن نصف قطر الانحناء عند (1, 1) هو $R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ فإن $|a_n| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R} = 2\sqrt{5}$.

٦ – تعطى القوة الطاردة المركزية F N التى يخضع لها جسم كتلته W kg عند نقطة على مساره بالعلاقة $F = W|a_n|$. أوجد القوة الطاردة المركزية التى يخضع لها جسم كتلته 2.5 kg عند طرف المحور الكبير وطرف المحور الصغير للقطع الناقص $x = 20\cos t,\ y = 15\sin t$, الذى يتحرك عليه الجسم ، علما بأن وحدات القياس هى المتر والثانية .

$$\mathbf{r} = 20\mathbf{i}\cos t + 15\mathbf{j}\sin t$$
$$\mathbf{v} = -20\mathbf{i}\sin t + 15\mathbf{j}\cos t$$
$$\mathbf{a} = -20\mathbf{i}\cos t - 15\mathbf{j}\sin t$$

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{400\sin^2 t + 225\cos^2 t}, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{175\sin t\cos t}{\sqrt{400\sin^2 t + 225\cos^2 t}}$$

وعند طرف المحور الكبير حيث $t = 0$) أو $t = \pi$): نجد

$$|\mathbf{a}| = 20,\ |a_t| = |d^2s/dt^2| = 0,\ |a_n| = 20, \quad \text{و} \quad F = (2.5)(20) = 50\text{N}$$

وعند طرف المحور الصغير حيث $t = \pi/2$) أو $t = 3\pi/2$): نجد :

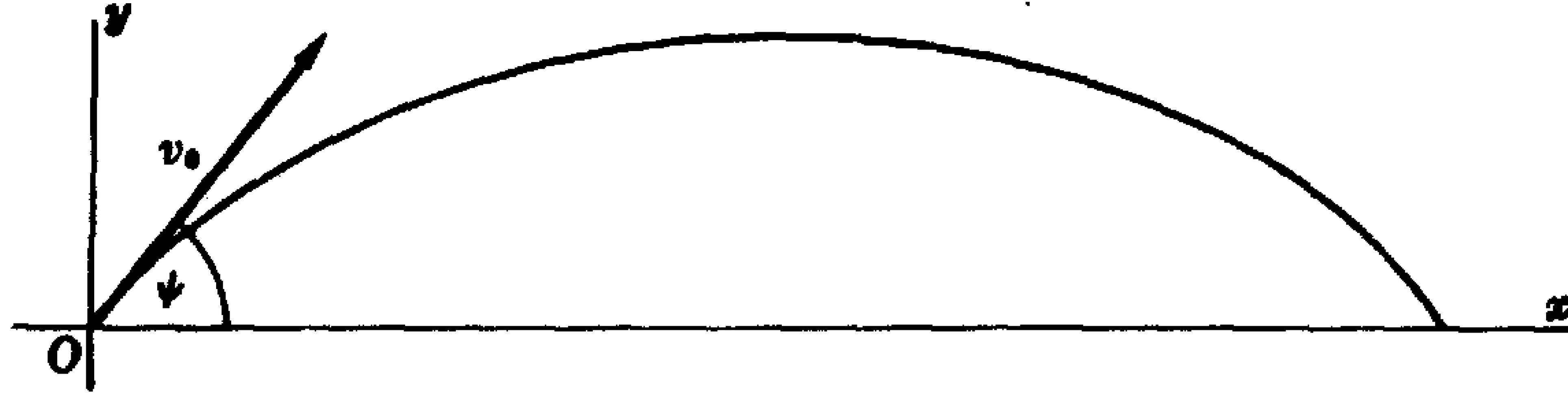
$$|\mathbf{a}| = 15,\ |a_t| = 0,\ |a_n| = 15, \quad \text{و} \quad F = (2.5)(15) = 37.5\text{N}$$

٧ – بفرض أن معادلات الحركة لقذيفة هي $x = v_0 t\cos\psi,\ y = v_0 t\sin\psi - \frac{1}{2}gt^2,$ حيث السرعة الابتدائية v_0 و ψ زاوية القذف وأن $g = 9{\cdot}8\ \mathrm{ms^{-2}}$ وأن x و y يقاسان بالأمتار و t بالثواني أوجـد :

(١) معادلة الحركة في الإحداثيات القائمة .

(ب) المـدى (ﺟ) زاوية القذف التي تعطي أكبر مدى ممكن .

(د) السرعة القياسية واتجاه القذيفة بعد 5 sec من الانطلاق إذا كان $v_0 = 150\ \mathrm{ms^{-1}}$ و $\psi = 45°$.



شكل ١٩ — ٥

(١) بحل المعادلة الأولى نجـد $t = \dfrac{x}{v_0\cos\psi}$ وبالتعويض في الثانية نحصل على :

$$y = v_0\left(\frac{x}{v_0\cos\psi}\right)\sin\psi - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\psi}\right)^2 = x\tan\psi - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\psi}$$

(ب) عندما $y = v_0 t\sin\psi - \frac{1}{2}gt^2 = 0,$ يكون $t = 0$ و $t = (2v_0\sin\psi)/g.$

وعندما $t = \dfrac{2v_0\sin\psi}{g},$ يكون المدى مساويا $x = v_0\cos\psi\left(\dfrac{2v_0\sin\psi}{g}\right) = \dfrac{v_0^2\sin 2\psi}{g}.$

(ﺟ) عندما تكون x نهاية عظمى ينبغي أن يكون $\dfrac{dx}{d\psi} = \dfrac{2v_0^2\cos 2\psi}{g} = 0,\ \cos 2\psi = 0,$ ومنـه $\psi = \frac{1}{4}\pi.$

(د) عندما $v_0 = 150$ و $\psi = \frac{1}{4}\pi,$ نجـد $x = 75\sqrt{2}\,t$ و $y = 75\sqrt{2}\,t - 4{\cdot}9t^2.$ وبالتالي فإن :

$$v_x = 75\sqrt{2} \quad \text{و} \quad v_y = 75\sqrt{2} - 9{\cdot}8\,t$$

وعندما $t = 5$: نجـد $v_x = 75\sqrt{2}$ و $v_y = 75\sqrt{2} - 49$ وبالتالي فإن

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 120\ \mathrm{ms^{-1}} \quad \text{و} \quad \tan\tau = v_y/v_x = 0{\cdot}538,\ \tau = 28°17'$$

٨ – تتحرك نقطة P على دائرة $x = r\cos\beta,\ y = r\sin\beta$ بسرعة قياسية ثابتة v . بين أنه إذا كان نصف القطر المتجه إلى P يتحرك بسرعة زاوية ω وتسارع زاوي $\alpha,$ فإن (١) $v = r\omega$ و (ب) $a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}.$

(١) $v_x = -r\sin\beta\cdot\dfrac{d\beta}{dt} = -r\sin\beta\cdot\omega$ و $v_y = r\cos\beta\cdot\dfrac{d\beta}{dt} = r\cos\beta\cdot\omega.$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r^2\sin^2\beta + r^2\cos^2\beta)\omega^2} = r\omega$$

(ب)
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -r\omega\cos\beta\cdot\frac{d\beta}{dt} - r\sin\beta\cdot\frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2\cos\beta - r\alpha\sin\beta.$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -r\omega\sin\beta\cdot\frac{d\beta}{dt} + r\cos\beta\cdot\frac{d\omega}{dt} = -r\omega^2\sin\beta + r\alpha\cos\beta.$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = r^2(\omega^4 + \alpha^2) \quad \text{و} \quad a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

مسـائل اضـافية

٩ – أوجـد مقدار واتجاه كل من السرعة والتسارع لما يلي :

(أ) $x = e^t,\ y = e^{2t} - 4e^t + 3$ عندما $t = 0$

(ب) $x = 2 - t,\ y = 2t^2 - t$ عندما $t = 1$

(جـ) $x = \cos 3t,\ y = \sin t$ عندما $t = \frac{1}{4}\pi$

(د) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t$ عندما $t = 0$

ج : (أ) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5},\ \tau = 296°34';\ |\mathbf{a}| = 1,\ \phi = 0$

(ب) $|\mathbf{v}| = \sqrt{26},\ \tau = 101°19';\ |\mathbf{a}| = 12,\ \phi = \frac{1}{2}\pi$

(جـ) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5},\ \tau = 161°34';\ |\mathbf{a}| = \sqrt{41},\ \phi = 353°40'$

(د) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2},\ \tau = \frac{1}{4}\pi;\ |\mathbf{a}| = 2,\ \phi = \frac{1}{2}\pi$

١٠ – يتحرك جسم على قوس القطع المكافئ $y^2 = 12x$ الواقع فى الربع الأول بحيث يكون $v_x = 15$. أوجد $v_y, |\mathbf{v}|, \tau;\ a_x, a_y, |\mathbf{a}|,$ و ϕ عند $(3, 6)$

ج : $v_y = 15,\ |\mathbf{v}| = 15\sqrt{2},\ \tau = \frac{1}{4}\pi;\ a_x = 0,\ a_y = -75/2,\ |\mathbf{a}| = 75/2,\ \phi = 3\pi/2.$

١١ – يتحرك جسم على المنحنى $y = x^3/3$ بحيث يكون $v_x = 2$ مهما كان الزمن .
أوجـد مقدار واتجاه كل من السرعة والتسارع عندما $x = 3$.

ج : $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{82},\ \tau = 83°40';\ |\mathbf{a}| = 24,\ \phi = \frac{1}{2}\pi$

١٢ – يدور جسم على دائرة نصف قطرها 6 m بسرعة قياسية ثابتة 4 m / sec . عين مقدار تسارعه فى أى موضع .

ج : $|a_t| = 0,\ |\mathbf{a}| = |a_n| = 8/3\ \text{ms}^{-2}$

١٣ – أوجد مقدار واتجاه السرعة والتسارع ومقدار مركبتى التسارع المماسية والعمودية لحركتين التاليتين :

(أ) $x = 3t,\ y = 9t - 3t^2,$ عندما $t = 2$

(ب) $x = \cos t + t \sin t,\ y = \sin t - t \cos t$ عندما $t = 1.$

ج : (أ) $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{2},\ \tau = 7\pi/4;\ |\mathbf{a}| = 6,\ \phi = 3\pi/2;\ |a_t| = |a_n| = 3\sqrt{2}$

(ب) $|\mathbf{v}| = 1,\ \tau = 1;\ |\mathbf{a}| = \sqrt{2},\ \phi = 102°18';\ |a_t| = |a_n| = 1$

١٤ – يتحرك جسم على المنحنى $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ بحيث يكون $x = \frac{1}{2}t^2,\ t > 0.$ أوجد $v_x, v_y, |\mathbf{v}|, \tau;\ a_x, a_y, |\mathbf{a}|, \phi;\ |a_t|$ و $|a_n|$ عندما $t = 1$.

ج : $v_x = 1,\ v_y = 0,\ |\mathbf{v}| = 1,\ \tau = 0;\ a_x = 1,\ a_y = 2,\ |\mathbf{a}| = \sqrt{5},\ \phi = 63°26';|a_t| = 1,\ |a_n| = 2.$

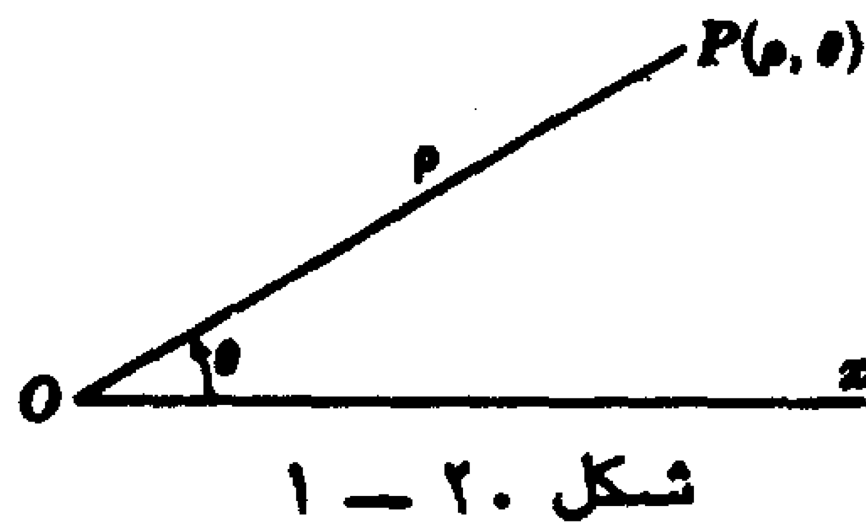
١٥ – يتحرك جسم على المسار $y = 2x - x^2$ بحيث يكون $v_x = 4$ دائما . أوجـد مقدار مركبتى التسارع المماسية والعمودية عند الموضع (أ) $(1, 1)$ و (ب) $(2, 0)$.

ج : (أ) $|a_t| = 0,\ |a_n| = 32;$ (ب) $|a_t| = 64/\sqrt{5},\ |a_n| = 32/\sqrt{5}$

الفصل العشرون

الاحـــداثيات القطبيـــة

يمكن تعيين موضع نقطة P فى مستوى مفروض بالنسبة إلى نقطة ثابتة O من هذا المستوى ، بمسقطى المتجه OP على محورين متعامدين فى المستوى ومارين بـ O . وهذه بجوهرها ، هى مجموعة الإحداثيات القائمة . ويمكن تعيين موضع النقطة بطريقة أخرى وذلك بواســطة المسافة الموجهة $\rho = OP$ والزاوية θ التى يصنعها OP مع نصف المستقيم الثابت OX المار بـ O . وهذه هى مجموعة الإحداثيات القطبية .



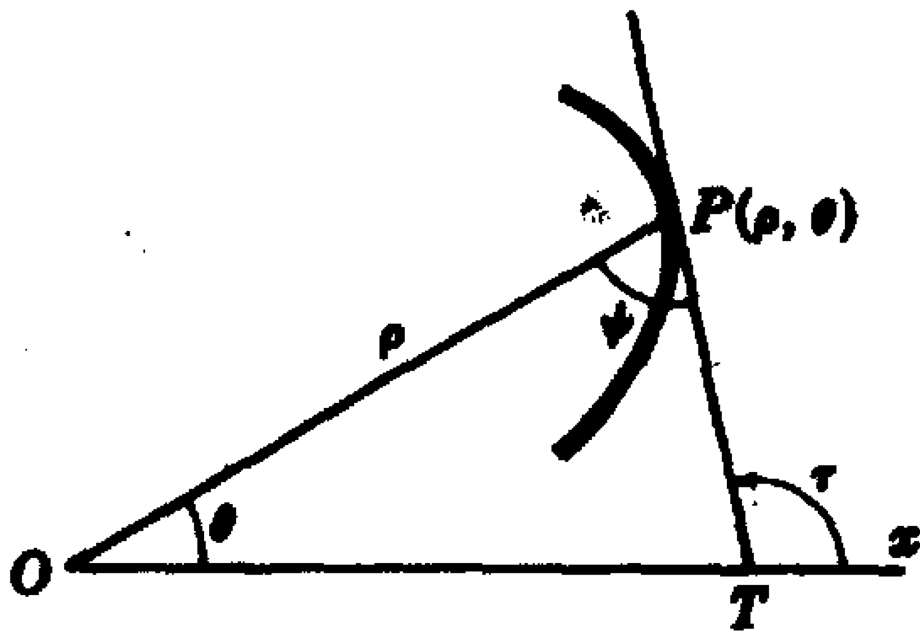
شكل ٢٠ ــ ١

ويقابل كل زوج عددى (ρ,θ) نقطة ونقطة واحدة فقط . لكن العكس ليس صحيحا : فمثلا النقطة P فى الشكل يمكن أن تتعين بـ $(\rho,\theta \pm 2n\pi)$ و $[-\rho,\theta \pm (2n+1)\pi]$ ، حيث n أى عدد صحيح موجب بما فى ذلك الصفر . ويمكن بوجه خاص أن تعطى الإحداثيات القطبية للقطب بـ $(0,\theta)$ حيث θ اختيارية تماما .

ويتكون المنحنى الذى معادلته فى الإحداثيات القطبية هى $\rho = f(\theta)$ أو $F(\rho,\theta) = 0$ من جميع النقط المختلفة (ρ,θ) التى تحقق هذه المعادلة .

وتعطى الزاوية ψ المحصورة بين نصف القطر المتجه OP والمماس للمنحنى PT عند النقطة $P(\rho,\theta)$ بالعلاقة

$$\tan\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \text{حيث} \quad \rho' = \frac{d\rho}{d\theta}$$



شكل ٢٠ ــ ٢

ويلعب ظل الزاوية ψ فى الإحداثيات القطبية دورا مشابها نوعا ما لدور ميل المماس فى الإحداثيات القائمة .

أنظر المسائل ١ – ٣

تعطى زاوية الميل τ لمماس المنحنى عند نقطة $P(\rho,\theta)$ منه بالعلاقة

$$\tan\tau = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta}{-\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta}$$

أنظر المسائل ٤ – ١٠

ونقطة التقاطع لمنحنيين معادلتهما هما :

$$\rho = f_1(\theta) \quad \text{و} \quad \rho = f_2(\theta)$$

يمكن إيجادها بحل المعادلة :

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \qquad (١)$$

مثـــــال ١ :

أوجد نقط تقاطع $\rho = 1 + \sin\theta$ و $\rho = 5 - 3\sin\theta$.
نضع $1 + \sin\theta = 5 - 3\sin\theta,$ فنحصل على $\sin\theta = 1$.
وبالتالى $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ومنه تكون النقطة $(2, \frac{1}{2}\pi)$ هى نقطة التقاطع الوحيدة .

عندما يكون القطب أحد نقط التقاطع ، فمن الممكن أن لا يظهر بين حلول المعادلة (١) ويكون القطب أحد نقط التقاطع إذا استطعنا أن نجد قيما لـ θ مثل θ_1 و θ_2 بحيث يكون $f_1(\theta_1) = 0$ و $f_2(\theta_2) = 0$.

مثـــــال ٢ :

أوجد نقط تقاطع $\rho = \sin\theta$ و $\rho = \cos\theta$.

من المعادلة : (١) $\qquad \sin\theta = \cos\theta$

نحصل على نقطة التقاطع $(\frac{1}{2}\sqrt{2}$ و $\frac{1}{4}\pi)$. ولكن المنحنيين هما دائرتان مارتان بالقطب وهو نقطة تقاطع ، ولكن لا يمكن الحصول عليه من (١) لأن له على المنحنى $\rho = \sin\theta$ الاحداثيان $(0,0)$ وعلى المنحنى $\rho = \cos\theta$ الاحداثيان $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

مثـــــال ٣ :

أوجـــد نقط تقاطع $\rho = \cos 2\theta$ و $\rho = \cos\theta$.

ضع $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta,$ فنجـــد أن $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0.$

ومنه نجـــد $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3;$ وبالتالى فإن نقط التقاطع هى $(1,0), (-\frac{1}{2}, 2\pi/3), (-\frac{1}{2}, 4\pi/3).$

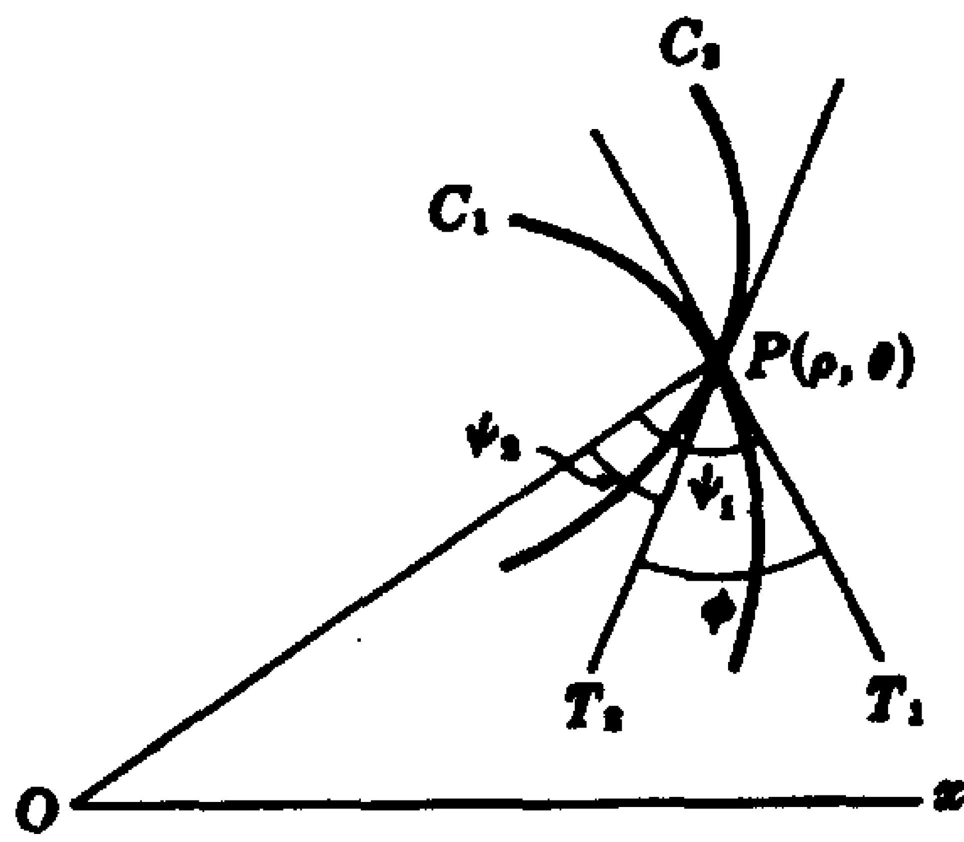
والقطب هو نقطة تقاطع أيضا .

تعطى زاوية التقاطع : ϕ لمنحنيين عند نقطة مشتركة $P(\rho,\theta)$ ، ليست القطب ، بالمعادلة :

$$\tan\phi = \frac{\tan\psi_1 - \tan\psi_2}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2}$$

حيث ψ_1 و ψ_2 هما زاويتا نصف القطر المتجه OP مع المماسين الخاصين بهما على المنحنيين عند النقطة P .

والطريقة هنا مماثلة لتلك التى وردت فى حالة المنحنيات المعطاة بالإحداثيات القائمة ، وتستخدم خلال الزوايا بين نصف القطر المتجه والمماس بدلا من ميل المماسات وذلك للسهولة فى الحسابات .



شكل ٢٠ — ٣

مثـــــال ٤ :

أوجد زاوية التقاطع (الحادة) بين $\rho = \cos\theta$ و $\rho = \cos 2\theta$.

لقد وجدنا نقط التقاطع فى المثال ٣ .

عند القطب : يعطى القطب على المنحنى $\rho = \cos\theta$ بـ $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ويعطى على المنحنى $\rho = \cos 2\theta$ بـ $\theta = \pi/4$ و $\theta = 3\pi/4$ ، إذن يوجد عند القطب نقطتا تقاطع والزاوية الحادة لكل منهما تساوى $\frac{1}{4}\pi$.

والمنحنى $\rho = \cos\theta$ وأما المنحنى $\rho = \cos 2\theta$
نجـد $\tan\psi_1 = -\cot\theta$ نجـد $\tan\psi_2 = -\frac{1}{2}\cot 2\theta$

وعند النقطة $(1,0)$ يكون $\tan\psi_1 = -\cot 0 = \infty$ و $\tan\psi_2 = \infty$. وبالتالى فإن $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}\pi$ و $\phi = 0$.

وعند النقطة $(-\frac{1}{2}$ و $2\pi/3)$ يكون $\tan\psi_1 = \sqrt{3}/3$ و $\tan\psi_2 = -\sqrt{3}/6$.

إذن $\tan\phi = \dfrac{\sqrt{3}/3 + \sqrt{3}/6}{1 - 1/6} = 3\sqrt{3}/5$ وزاوية التقاطع الحادة هى $\phi = 46^{0}\,6'$.

وهذه بسبب التناظر ، هى أيضا زاوية التقاطع الحادة عند النقطة $(-\frac{1}{2}$ ، $4\pi/3)$.

أنظر المسائل ١١ – ١٣

يعطى اشتقاق طول القوس : بـ $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}$، حيث $\rho' = \dfrac{d\rho}{d\theta}$ مع اعتبار أن s تزداد بزيادة θ .

أنظر المسائل ١٤ – ١٦

ويعطى انحناء منحنى بـ :

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}.$$

أنظر المسائل ١٧ – ١٩

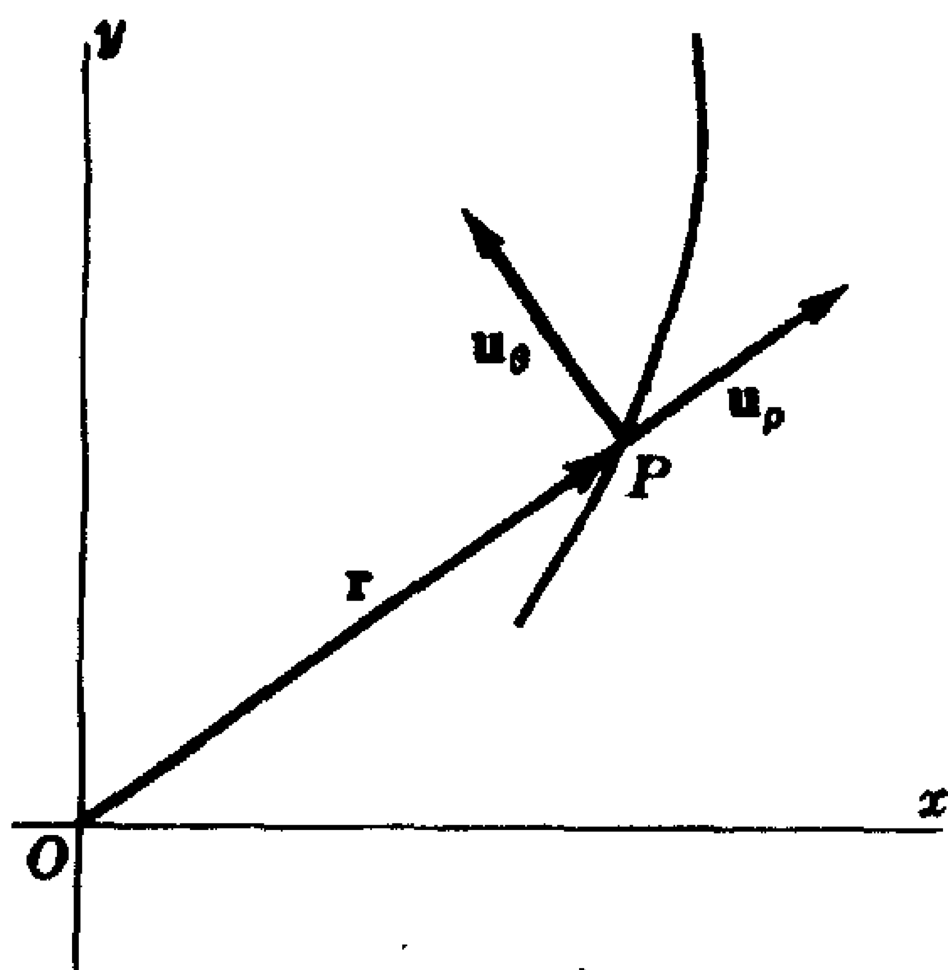
الحركة الخطية الانحنائية : لنفرض أن جسيم P يتحرك على منحنى معادلته بالاحداثيات القطبية هى $\rho = f(\theta)$ فإذا استعنا بالتمثيل البارامترى للمنحنى :

$$x = \rho\cos\theta = g(\theta), \qquad y = \rho\sin\theta = h(\theta)$$

نجـد أن متجه الموضع للنقطة P هو :

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \rho\mathbf{i}\cos\theta + \rho\mathbf{j}\sin\theta = \rho(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta)$$

وعندئذ يمكن دراسة الحركة كما فى الفصل ١٩ .



شكل ٢٠ — ٤

وهناك طريقة بديلة وهى أن نعبر عن $\mathbf{r}$ وبالتالى عن $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ بدلالة متجهات وحدة على المستقيم العمودى على نصف القطر المتجه للنقطة P .
ولهذا الغرض فإننا نعرف متجه الوحدة :

$$\mathbf{u}_\rho = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$$

على المتجه $\mathbf{r}$ وفى اتجاه تزايد ρ ونعرف متجه الوحدة :

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

العمودى على $\mathbf{r}$ وفى اتجاه تزايد θ . ويمكن بحسابات بسيطة الحصول على

$$\frac{d\mathbf{u}_\rho}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_\rho\frac{d\theta}{dt}$$

ومن $\mathbf{r} = \rho\,\mathbf{u}_\rho$

ونحصل من المسألة ٢٠ على .

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} = v_\rho\mathbf{u}_\rho + v_\theta\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= a_\rho\mathbf{u}_\rho + a_\theta\mathbf{u}_\theta$$

ونجد هنا أن $v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$ ، $v_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt}$ هما مركبتا v في اتجاه نصف القطر المتجه والعمودي عليه على الترتيب

$a_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ و $a_\theta = \rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}$ ، هما مركبتا a المقابلتان .

أنظر المسألة ٢١

مســــــائل محلولــــة

١ – برهن أن $\tan\psi = \rho\,\frac{d\theta}{d\rho}$ حيث ψ هي الزاوية المقاسة من نصف القطر المتجه OP للنقطة $P(\rho, \theta)$ على المنحنى الذي معادلته $\rho = f(\theta)$ إلى المماس PT .

في الشكل ٢٠ – ٥ النقطة $Q(\rho + \Delta\rho, \theta + \Delta\theta)$ هي نقطة على المنحنى وقريبة من P ونجد من المثلث القائم PSQ أن

$$\tan\lambda = \frac{SP}{SQ} = \frac{SP}{OQ - OS} = \frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho + \Delta\rho - \rho\cos\Delta\theta}$$

$$= \frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho(1-\cos\Delta\theta) + \Delta\rho} = \frac{\rho\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\rho\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} + \frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}$$

وإذا آلت النقطة Q إلى P على المنحنى فإن

$$\Delta\theta \to 0,\ OQ \to OP,\ PQ \to PT,\ \angle\lambda \to \angle\psi$$

وعندما $\Delta\theta \to 0$ فإن $\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 0$ ، $\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1$ (أنظـر الفصل ١٢)

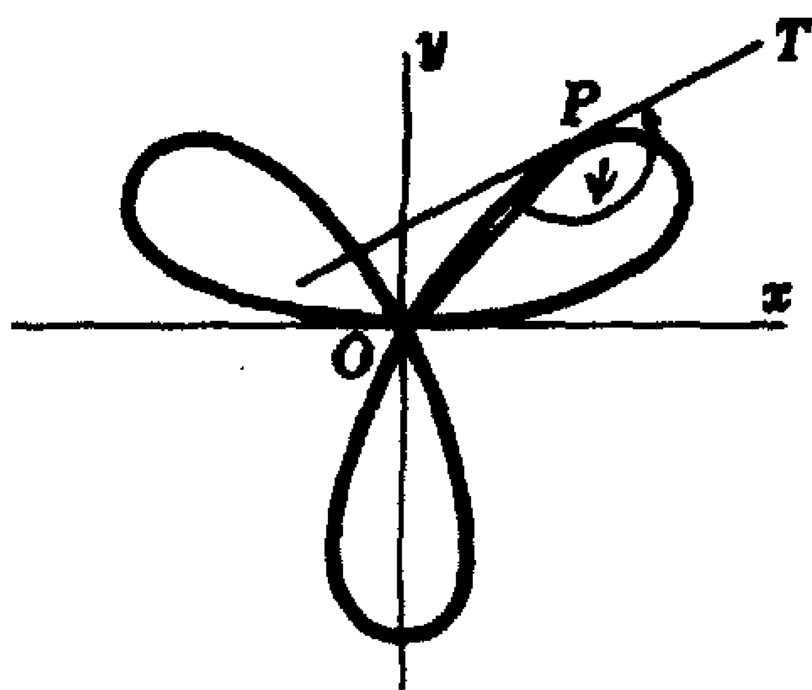
شكل ٢٠ – ٥

وبالتالي فإن $\tan\psi = \lim_{\Delta\theta\to 0}\tan\lambda = \frac{\rho}{d\rho/d\theta} = \rho\frac{d\theta}{d\rho}$.

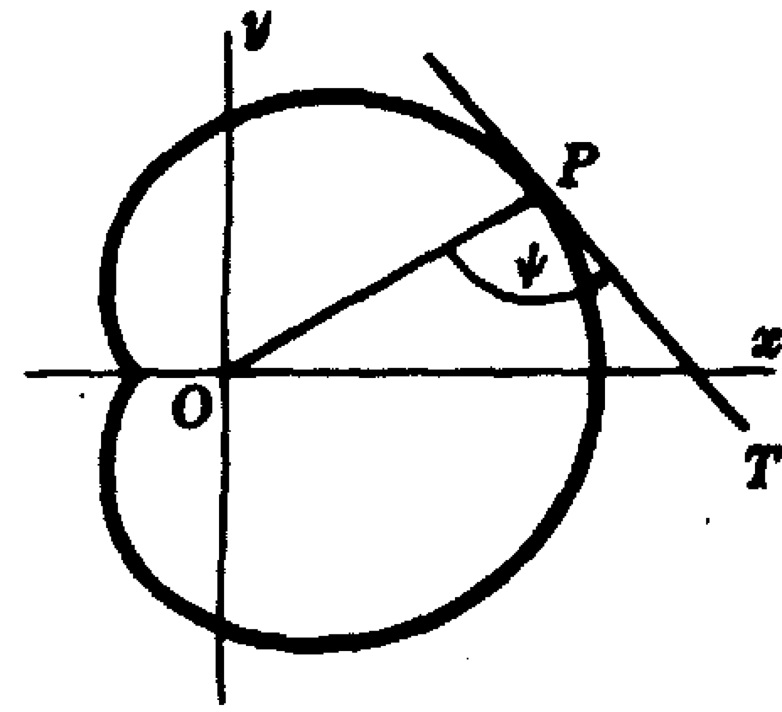
أوجد في المسألتين ٢ – ٣ ، $\tan\psi$ للمنحنيات المذكورة وعند النقطة المذكورة .

٢ – $\rho = 2 + \cos\theta;\ \theta = \pi/3.$ (أنظر الشكل ٢٠ – ٦)

عند $\theta = \pi/3$ يكون $\rho = 2 + \frac{1}{2} = 5/2,\ \rho' = -\sin\theta = -\sqrt{3}/2,$ و $\tan\psi = \rho/\rho' = -5/\sqrt{3}.$



شكل ٢٠ – ٧



شكل ٢٠ – ٦

٣ – $\rho = 2\sin 3\theta;\ \theta = \pi/4.$ أنظر الشكل ٢٠ – ٧

وعند $\theta = \pi/4$ يكون

$\rho = 2(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2},\quad \rho' = 6\cos 3\theta = 6(-1/\sqrt{2}) = -3\sqrt{2},$ و $\tan\psi = \rho/\rho' = -1/3.$

٤ – برهن أن $\tan\tau = \dfrac{\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta}{-\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta}$.

نلاحظ من شكل المسألة ١ أن $\tau = \psi + \theta$ ومنه :

$$\tan\tau = \tan(\psi+\theta) = \frac{\tan\psi + \tan\theta}{1 - \tan\psi\tan\theta} = \frac{\rho\dfrac{d\theta}{d\rho} + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 - \rho\dfrac{d\theta}{d\rho}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\rho\cos\theta + \dfrac{d\rho}{d\theta}\sin\theta}{\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta} = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta}{-\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta}$$

٥ – بين أنه إذا مر المنحنى $\rho = f(\theta)$ بالقطب وكانت θ_1 تحقق العلاقة $f(\theta_1) = 0$ فإن اتجاه المماس للمنحنى عند القطب $(0, \theta_1)$ هو θ_1 .

عند $(0, \theta_1)$ يكون $\rho = 0$ و $\rho' = f'(\theta_1)$.

فإذا كان $\rho' \neq 0$ نجد أن

$$\tan\tau = \frac{\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta}{-\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta} = \frac{0 + \sin\theta_1\cdot f'(\theta_1)}{0 + \cos\theta_1\cdot f'(\theta_1)} = \tan\theta_1$$

وإذا كان $\rho' = 0$ نجد أن $\tan\tau = \lim\limits_{\theta\to\theta_1}\dfrac{\sin\theta\cdot f'(\theta)}{\cos\theta\cdot f'(\theta)} = \tan\theta_1$

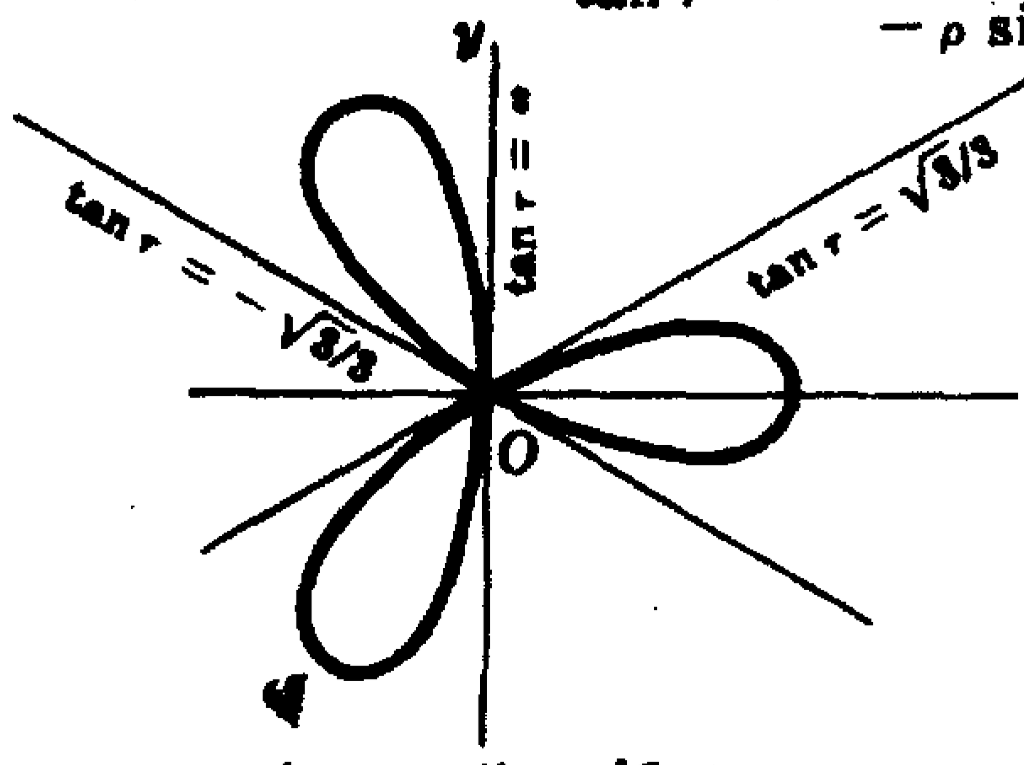
شكل ٢٠ — ٨

فى المسائل ٦ – ٨ أوجد ميل المنحنى المفروض عند النقطة المفروضة .

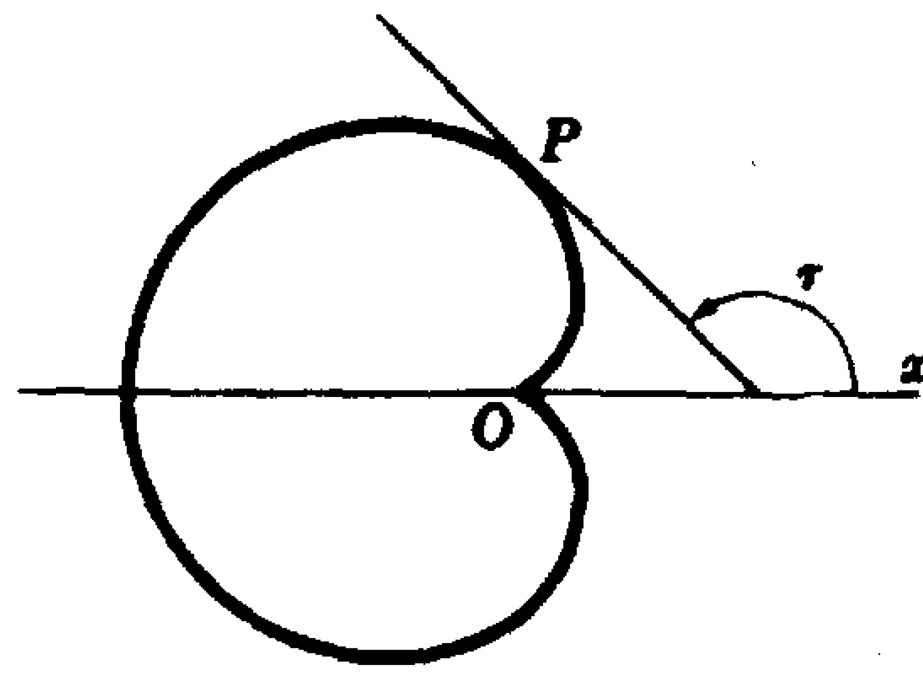
٦ – $\rho = 1 - \cos\theta$ عند $\theta = {}^1/_2\pi$. أنظر الشكل ٢٠ – ٩

عند $\theta = {}^1/_2\pi$ يكون $\sin\theta = 1,\ \cos\theta = 0,\ \rho = 1,\ \rho' = \sin\theta = 1,$

وبالتالى $\tan\tau = \dfrac{\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta}{-\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta} = \dfrac{1\cdot 0 + 1\cdot 1}{-1\cdot 1 + 1\cdot 0} = -1$



شكل ٢٠ — ١٠



شكل ٢٠ — ٩

٧ – $\rho = \cos 3\theta$ عند القطب . أنظر الشكل ٢٠ – ١٠

عندما $\rho = 0$ فإن $\cos 3\theta = 0$. وبالتالى $3\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ ومنه $\theta = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$.

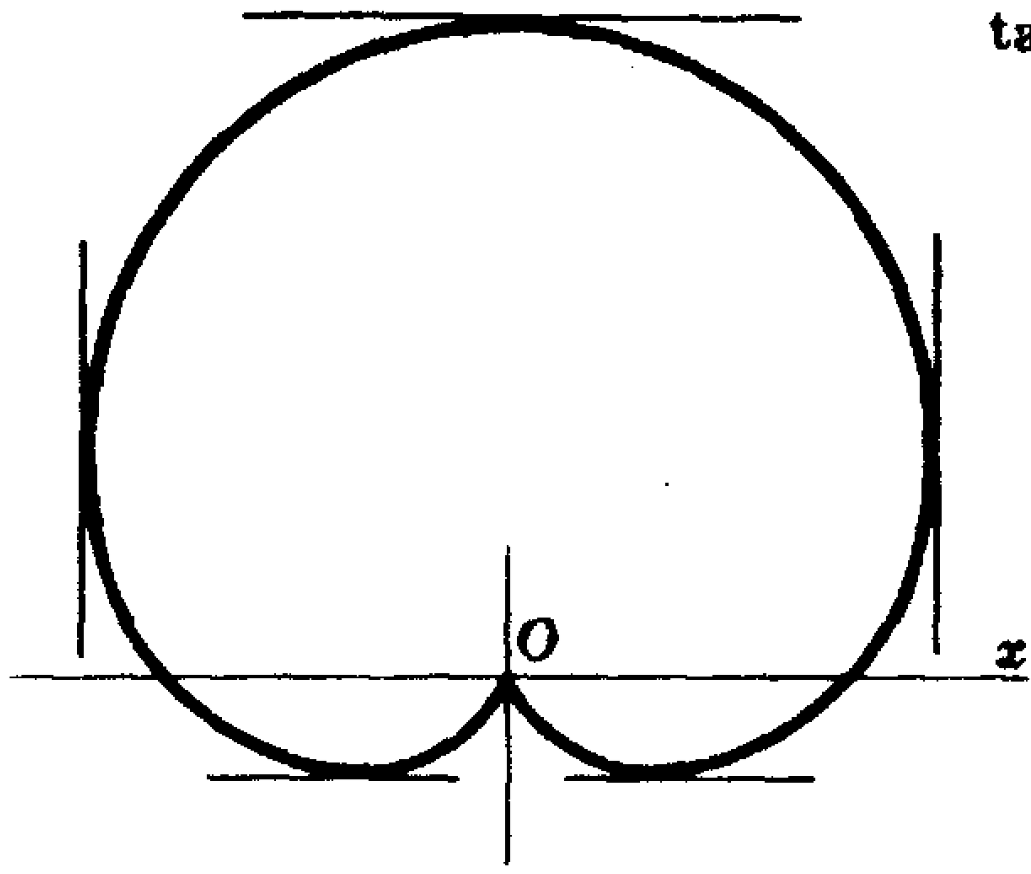
وحسب المسألة ٥ يكون : $\tan\tau = 1/\sqrt{3},\ \infty,\ -1/\sqrt{3}$.

٨ – $\rho\theta = a$ عند $\theta = \pi/3$.

عند $\theta = \pi/3$ يكون $\sin\theta = \sqrt{3}/2,\ \cos\theta = \frac{1}{2},\ \rho = 3a/\pi,$ و $\rho' = -a/\theta^2 = -9a/\pi^2.$

إذن $\tan\tau = \dfrac{\rho\cos\theta + \rho'\sin\theta}{-\rho\sin\theta + \rho'\cos\theta} = -\dfrac{\pi - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi + 3}$

٩ – ابحث فى المماسات الأفقية والرأسية للمنحنى $\rho = 1 + \sin\theta$.


شكل ٢٠ – ١١

عند $P(\rho,\theta)$ يكون :
$$\tan\tau = \frac{(1+\sin\theta)\cos\theta + \cos\theta\sin\theta}{-(1+\sin\theta)\sin\theta + \cos^2\theta} = -\frac{\cos\theta\,(1+2\sin\theta)}{(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)}$$

(ا) بوضع $\cos\theta\,(1+2\sin\theta) = 0$ نجد أن :
$\theta = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 7\pi/6,\ \text{and}\ 11\pi/6.$

وبوضع $(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1) = 0$ نجد أن :
$\theta = 3\pi/2,\ \pi/6,$ و $5\pi/6.$

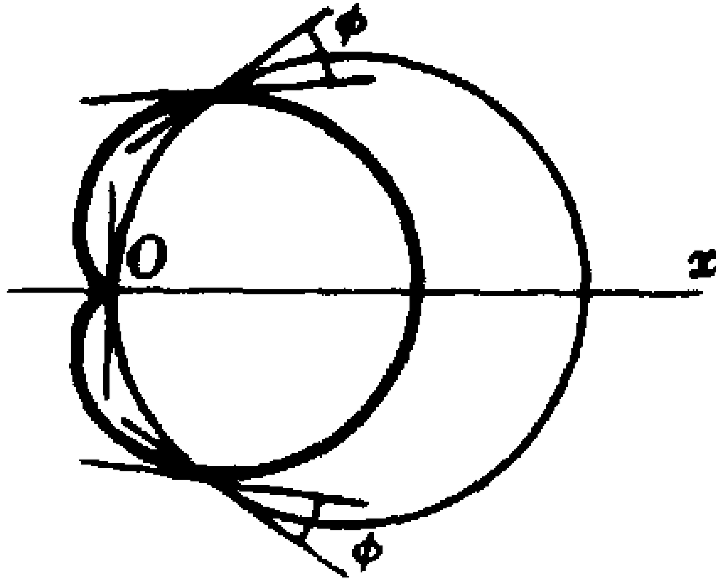
(ب) عندما $\theta = \pi/2$ يوجد مماس أفقى عند $(2, \pi/2)$
وعندما $\theta = 7\pi/6$ و $\theta = 11\pi/6$ يوجد مماسان أفقيان
عند $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$ و $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$.
وعندما $\theta = \pi/6$ و $\theta = 5\pi/6$ يوجد مماسان رأسيان عند $(3/2, \pi/6)$ و $(3/2, 5\pi/6)$.
وعندما $\theta = 3\pi/2$ يوجد استناداً إلى المسألة ٥ مماس رأسى عند القطب .

١٠ – بين أن الزاوية التى يصنعها نصف القطر المتجه لأية نقطة على منحنى القلب (الكارديوئيد) $\rho = a(1-\cos\theta)$ مع المنحنى تساوى نصف الزاوية التى يصنعها نصف القطر المتجه مع المحور القطبى .

عند أية نقطة $P(\rho, \theta)$ من المنحنى لدينا :
$$\rho' = a\sin\theta, \qquad \tan\psi = \rho/\rho' = (1-\cos\theta)/\sin\theta = \tan\tfrac{1}{2}\theta \quad \text{or} \quad \psi = \tfrac{1}{2}\theta$$

فى المسائل ١١ – ١٣ أوجد زوايا التقاطع لكل زوج من المنحنيات :

١١ – $\rho = 3\cos\theta,\ \rho = 1+\cos\theta.$



شكل ٢٠ – ١٢

(ا) بحل $3\cos\theta = 1+\cos\theta$ م نحصل على نقطتى التقاطع $(3/2, \pi/3)$ و $(3/2, 5\pi/3)$ والمنحنيان يتقاطعان أيضاً عند القطب .
(ب) المنحنى $\rho = 3\cos\theta$ يكون $\rho' = -3\sin\theta$ و $\tan\psi_1 = -\cot\theta$
والمنحنى $\rho = 1+\cos\theta$ يكون $\rho' = -\sin\theta$
و $\tan\psi_2 = -\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$
(جـ) عندما $\theta = \pi/3$ فإن $\tan\psi_1 = -1/\sqrt{3},\ \tan\psi_2 = -\sqrt{3},$
وبالتالى $\tan\phi = 1/\sqrt{3}.$

وزاوية التقاطع الحادة عند $(3/2, \pi/3)$ وعند $(3/2, 5\pi/3)$ بالتماثل هى $\pi/6$.
نجد من الشكل أو بالإستفادة من نتيجة المسألة ٥ ، أن المنحنيين متعامدان عند القطب .

١٢ – $\rho = \sec^2\tfrac{1}{2}\theta,\ \rho = 3\csc^2\tfrac{1}{2}\theta.$

(ا) بحل $\rho = \sec^2\frac{1}{2}\theta = 3\csc^2\frac{1}{2}\theta$ نحصل على نقطتى التقاطع $(4, 2\pi/3)$ و $(4, 4\pi/3)$.
(ب) المنحنى $\rho = \sec^2\frac{1}{2}\theta$: يكون $\rho' = \sec^2\frac{1}{2}\theta\tan\frac{1}{2}\theta$ و $\tan\psi_1 = \cot\frac{1}{2}\theta.$
والمنحنى $\rho = 3\csc^2\frac{1}{2}\theta$: يكون $\rho' = -3\csc^2\frac{1}{2}\theta\cot\frac{1}{2}\theta$ و $\tan\psi_2 = -\tan\frac{1}{2}\theta.$
(جـ) عند $\theta = 2\pi/3$ يكون $\tan\psi_1 = 1/\sqrt{3},\ \tan\psi_2 = -\sqrt{3},$ ومنه $\phi = \frac{1}{2}\pi$ والمنحنيان متعامدان .

١٣ ــ $\rho = \sin 2\theta,\ \rho = \cos\theta.$

(أ) المنحنيان يتقاطعان عند $(\sqrt{3}/2, \pi/6),\ (-\sqrt{3}/2, 5\pi/6),$ وعند القطب .

(ب) المنحنى $\rho = \sin 2\theta$: يكون $\rho' = 2\cos 2\theta$ و $\tan\psi_1 = \frac{1}{2}\tan 2\theta.$

والمنحنى $\rho = \cos\theta$: يكون $\rho' = -\sin\theta$ و $\tan\psi_2 = -\cot\theta.$

(جـ) عند $\theta = \pi/6$ يكون $\tan\psi_1 = \sqrt{3}/2,\ \tan\psi_2 = -\sqrt{3},$ ومنه $\tan\phi = -3\sqrt{3}.$ ، وبالتالى فإن زاوية التقاطع الحادة عند $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$ وعند $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$ هى $\phi = \arctan 3\sqrt{3} = 79°6'.$

وزوايا التقاطع عند القطب هى $0°$ و $\frac{1}{2}\pi$.

فى المسائل ١٤ ــ ١٦ أوجد $ds/d\theta$ عند النقطة $P(\rho, \theta)$.

١٤ ــ $\rho = \cos 2\theta.$

$\rho' = -2\sin 2\theta$ و $ds/d\theta = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + 4\sin^2 2\theta} = \sqrt{1 + 3\sin^2 2\theta}.$

١٥ ــ $\rho(1 + \cos\theta) = 4.$

$-\rho\sin\theta + \rho'(1 + \cos\theta) = 0.$ ومنه $\rho' = \dfrac{\rho\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \dfrac{4\sin\theta}{(1 + \cos\theta)^2}$

وبالتالى $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{(1 + \cos\theta)^{3/2}}$

١٦ ــ $\rho = \sin^3 \frac{1}{3}\theta.$. احسب قيمة $ds/d\theta$ عند $\theta = 1/2\pi$.

$\rho' = \sin^2 \frac{1}{3}\theta \cos\frac{1}{3}\theta$ و $ds/d\theta = \sqrt{\sin^6 \frac{1}{3}\theta + \sin^4\frac{1}{3}\theta\cos^2\frac{1}{3}\theta} = \sin^2\frac{1}{3}\theta.$

وعند $\theta = 1/2\pi$ يكون $ds/d\theta = \sin^2\frac{1}{6}\pi = 1/4.$

١٧ ــ برهن أن $K = \dfrac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}.$

من التعريف $K = d\tau/ds$ وحيث أن $\tau = \theta + \psi$ فإن :

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right),$$ حيث $\psi = \arctan\dfrac{\rho}{\rho'}$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{[(\rho')^2 - \rho\rho'']/(\rho')^2}{1 + (\rho/\rho')^2} = \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2}$$ و $$1 + \frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2}$$

وبالتالى $$K = \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{1 + d\psi/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{1 + d\psi/d\theta}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}.$$

١٨ ــ أوجد انحناء المنحنى $\rho = 2 + \sin\theta.$ عند النقطة $P(\rho, \theta)$

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}} = \frac{(2 + \sin\theta)^2 + 2\cos^2\theta + (\sin\theta)(2 + \sin\theta)}{\{(2 + \sin\theta)^2 + \cos^2\theta\}^{3/2}} = \frac{6(1 + \sin\theta)}{(5 + 4\sin\theta)^{3/2}}.$$

١٩ ــ أوجد انحناء المنحنى $\rho(1 - \cos\theta) = 1.$ عند $\theta = \pi/2$ وعند $\theta = 4\pi/3$

$\rho' = \dfrac{-\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2},\quad \rho'' = \dfrac{-\cos\theta}{(1 - \cos\theta)^2} + \dfrac{2\sin^2\theta}{(1 - \cos\theta)^3},$ ومنه $K = \sin^3\frac{1}{2}\theta.$

عند $\theta = \pi/2$ فإن $K = (1/\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}/4$ ؛ وعند $\theta = 4\pi/3$ فإن $K = (\sqrt{3}/2)^3 = 3\sqrt{3}/8.$

٢٠ ــ استنتج من العلاقة $\mathbf{r} = \rho\mathbf{u}_\rho$ صيغة لكل من $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ بدلالة $\mathbf{u}_\rho$ و $\mathbf{u}_\theta$.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d\mathbf{u}_\rho}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d^2\rho}{dt^2} + \mathbf{u}_\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathbf{u}_\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \rho\mathbf{u}_\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \mathbf{u}_\rho\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

٢١ ــ يتحرك جسيم على المنحنى $\rho = 4\sin 2\theta$ وفى اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبحيث يكون $\frac{d\theta}{dt} = 1/2 \text{ rad s}^{-1}$

(ا) عبر عن $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ بدلالة $\mathbf{u}_\rho$ و $\mathbf{u}_\theta$ (ب) أوجد $|\mathbf{v}|$ و $|\mathbf{a}|$ عندما $\theta = \pi/6$.

$$\mathbf{r} = 4\sin 2\theta\,\mathbf{u}_\rho, \quad d\rho/dt = 8\cos 2\theta\, d\theta/dt = 4\cos 2\theta, \quad d^2\rho/dt^2 = -4\sin 2\theta$$

(ا)
$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} = 4\mathbf{u}_\rho\cos 2\theta + 2\mathbf{u}_\theta\sin 2\theta$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_\rho\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= -5\mathbf{u}_\rho\sin 2\theta + 4\mathbf{u}_\theta\cos 2\theta$$

(ب) عند $\theta = \pi/6$ فإن

$$\mathbf{u}_\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_\theta = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}. \quad \mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}; \quad \mathbf{a} = -\frac{19}{4}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{j}.$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{7}, \quad |\mathbf{a}| = \tfrac{1}{2}\sqrt{91}.$$

مسائل اضافية

فى المسائل ٢٢ ــ ٢٥ ، أوجد $\tan\psi$ عند النقطة المفروضة .

٢٢ ــ $\rho = 3 - \sin\theta$ عند $\theta = 0, \theta = 3\pi/4$ ج : $-3,\ 3\sqrt{2} - 1$

٢٣ ــ $\rho = a(1 - \cos\theta)$ عند $\theta = \pi/4, \theta = 3\pi/2$ ج : $\sqrt{2} - 1,\ -1$

٢٤ ــ $\rho(1 - \cos\theta) = a$ عند $\theta = \pi/3, \theta = 5\pi/4$ ج : $-\sqrt{3}/3,\ 1 + \sqrt{2}$

٢٥ ــ $\rho^2 = 4\sin 2\theta$ عند $\theta = 5\pi/12, \theta = 2\pi/3$ ج : $-1/\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

أوجد $\tan\tau$ فى المسائل ٢٦ ــ ٢٩ :

٢٦ ــ $\rho = 2 + \sin\theta$ عند $\theta = \pi/6$ ج : $3\sqrt{3}$

٢٧ ــ $\rho^2 = 9\cos 2\theta$ عند $\theta = \pi/6$ ج : 0

٢٨ ــ $\rho = \sin^3\theta/3$ عند $\theta = \pi/2$ ج : $-\sqrt{3}$

٢٩ ــ $2\rho(1 - \sin\theta) = 3$ عند $\theta = \pi/4$ ج : $1 + \sqrt{2}$

٣٠ ــ أوجد المماسات الأفقية و الرأسية للمنحنى $\rho = \sin 2\theta$.

ج : مماسات أفقية عند $\theta = 0, \pi, 54°44', 125°16', 234°44', 305°16'$

مماسات رأسيه عند $\theta = \pi/2, 3\pi/2, 35°16', 144°44', 215°16', 324°44'$

فى المسائل ٣١ ــ ٣٣ أوجد زوايا التقاطع الحادة لكل زوج من المنحنيات .

٣١ ــ $\rho = \sin\theta, \rho = \sin 2\theta$ ج : $\phi = 79°\,6'$ عند $\theta = \pi/3$ و $\theta = 5\pi/3$ و $\phi = 0$ عند القطب .

٣٢ ــ $\rho = \sqrt{2}\sin\theta, \rho^2 = \cos 2\theta$ ج : $\phi = \pi/3$ عند $\theta = \pi/6$ و $\theta = 5\pi/6$ و $\phi = \pi/4$ عند القطب .

٣٣ ــ $\rho^2 = 16\sin 2\theta, \rho^2 = 4\csc 2\theta$ ج : $\phi = \pi/3$ عند كل نقطة تقاطع .

٣٤ – بين أن كل زوج من المنحنيات التالية يتقاطعان بشكل عمودى عند جميع نقط التقاطع .

(ا) $\rho = 4\cos\theta,\ \rho = 4\sin\theta$ (جـ) (c) $\rho^2\cos 2\theta = 4,\ \rho^2\sin 2\theta = 9$

(ب) $\rho = e^{\theta},\ \rho = e^{-\theta}$ (د) (d) $\rho = 1+\cos\theta,\ \rho = 1-\cos\theta$

٣٥ – أوجد زاوية تقاطع المماس للمنحنى $\rho = 2 - 4\sin\theta$ عند القطب . ج : $2\pi/3$.

٣٦ – أوجد انحناء كل منحنى عند النقطة $P(\rho, \theta)$

(ا) $\rho =$ (ب) $\rho = \sin\theta$ (جـ) $\rho^2 = 4\cos 2\theta$ (د) $\rho = 3\sin\theta + 4\cos\theta$

ج : (ا) $1/(\sqrt{2}$ (ب) 2 (جـ) $3/2\sqrt{\cos 2\theta}$ (د) $2/5$

٣٧ – إذا كانت $\rho = f(\theta)$ هى المعادلة القطبية لمنحنى وكان s طول القوس على هذا المنحنى .

فباستخدام $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho = \sin\theta$ وحيث أن $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$,

أوجد $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \rho^2 + (\rho')^2$.

٣٨ – أوجد $ds/d\theta$ لكل منحنى مما يلى ، بفرض أى s تزداد مع تزايد θ :

(ا) $\rho = a\cos\theta$ (ب) $\rho = a(1+\cos\theta)$, (جـ) $\rho = \cos 2\theta$.

ج : (ا) a (ب) $a\sqrt{2+2\cos\theta}$, (جـ) $\sqrt{1+3\sin^2 2\theta}$

٣٩ – لنفرض أن جسيما يتحرك على المنحنى $\rho = f(\theta)$ بحيث يتعين موضعه عند أى لحظة t بالمعادلة $\rho = g(t),\ \theta = h(t)$.

(ا) بضرب العلاقة التى حصلت عليها فى المسألة ٣٧ فى $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ أوجد $v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \rho^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2$.

(ب) من $\tan\psi = \rho\frac{d\theta}{d\rho} = \rho\frac{d\theta/dt}{d\rho/dt}$, أوجد $\sin\psi = \frac{\rho}{v}\ \frac{d\theta}{dt}$ ، $\cos\psi = \frac{1}{v}\ \frac{d\rho}{dt}$

٤٠ – برهن أن $\frac{d\mathbf{u}_\rho}{dt} = \mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$ و $\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_\rho\frac{d\theta}{dt}$.

٤١ – يتحرك جسيم على منحنى القلب $\rho = 4(1+\cos\theta)$ فى اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبحيث يكون $d\theta/dt = \pi/6$ rad/sec

عبر عن $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ بدلالة $\mathbf{u}_\rho$ و $\mathbf{u}_\theta$.

ج : $\mathbf{v} = -\frac{2\pi}{3}\mathbf{u}_\rho\sin\theta + \frac{2\pi}{3}\mathbf{u}_\theta(1+\cos\theta),\quad \mathbf{a} = -\frac{\pi^2}{9}\mathbf{u}_\rho(1+2\cos\theta) - \frac{2\pi^2}{9}\mathbf{u}_\theta\sin\theta$

٤٢ – يتحرك جسيم على المنحنى $\rho = 8\cos\theta$ فى اتجاه مخالف لحركة عقارب الساعة وبسرعة قياسية ثابتة مقدارها 4 وحدات/ثانية ، عبر عن $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ بدلالة $\mathbf{u}_\theta$ و $\mathbf{u}_\rho$.

ج : $\mathbf{v} = -4\mathbf{u}_\rho\sin\theta + 4\mathbf{u}_\theta\cos\theta,\quad \mathbf{a} = -4\mathbf{u}_\rho\cos\theta - 4\mathbf{u}_\theta\sin\theta$

٤٣ – عندما يتحرك جسيم كتلته m فى مسار تحت تأثير قوة $\mathbf{F}$ متجهة باستمرار نحو نقطة الأصل فإن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ أو $\mathbf{a} = 1/m\,\mathbf{F}$ ويكون $a_\theta = 0$ بين أنه عندما يكون $a_\theta = 0$ فإن $\rho^2\frac{d\theta}{dt} = k$ حيث k ثابت وأن نصف القطر المتجه يمسح السطح بمعدل ثابت .

٤٤ – يتحرك جسيم على المنحنى $\rho = \frac{2}{1-\cos\theta}$ بحيث يكون $a_\theta = 0$ بين أن $a_\rho = -\frac{K^2}{2}\ \frac{1}{\rho^2}$ حيث k معرفة فى المسألة ٤٣ .

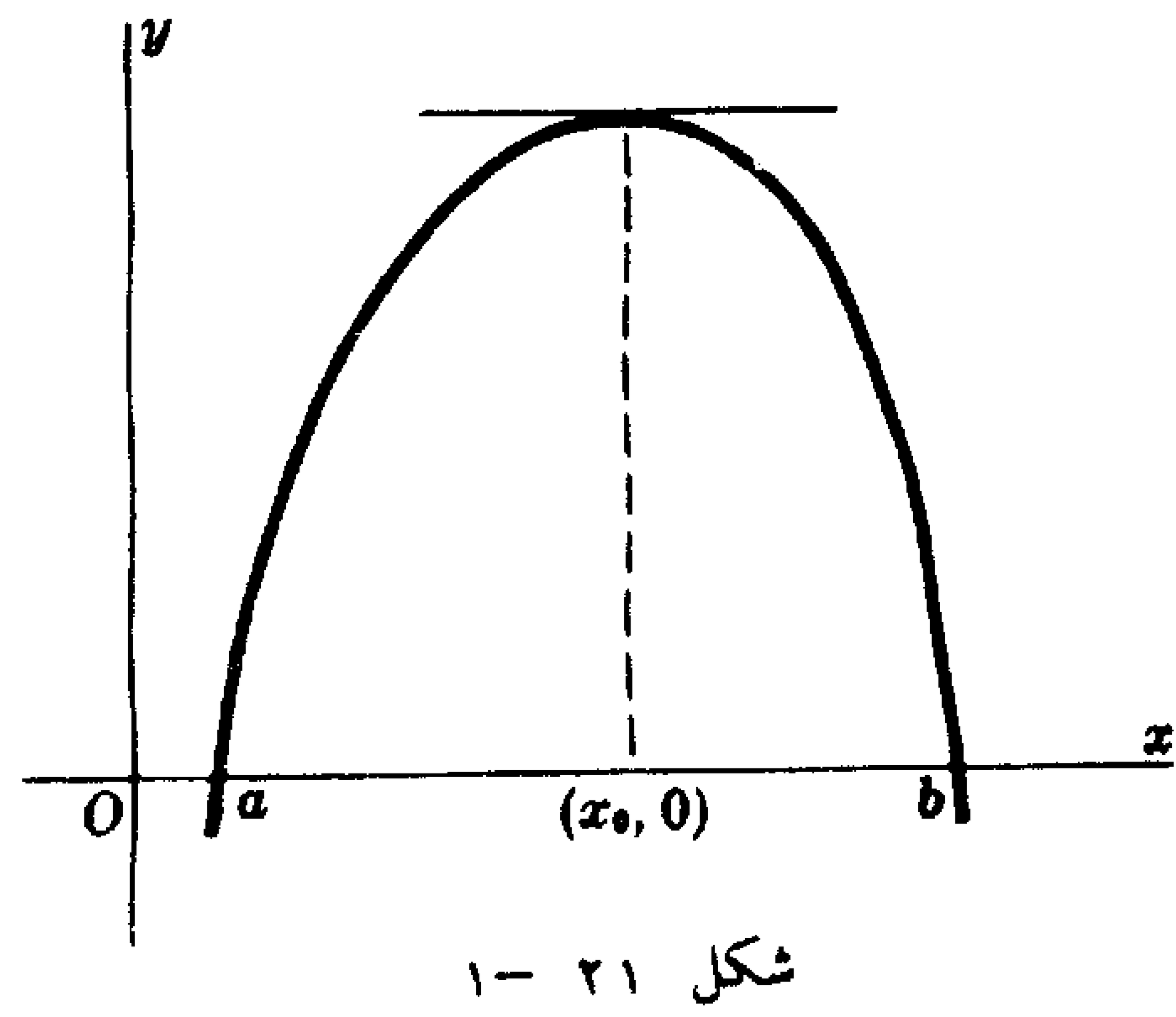
الفصل الحادى والعشرون

قانون القيمة المتوسطة

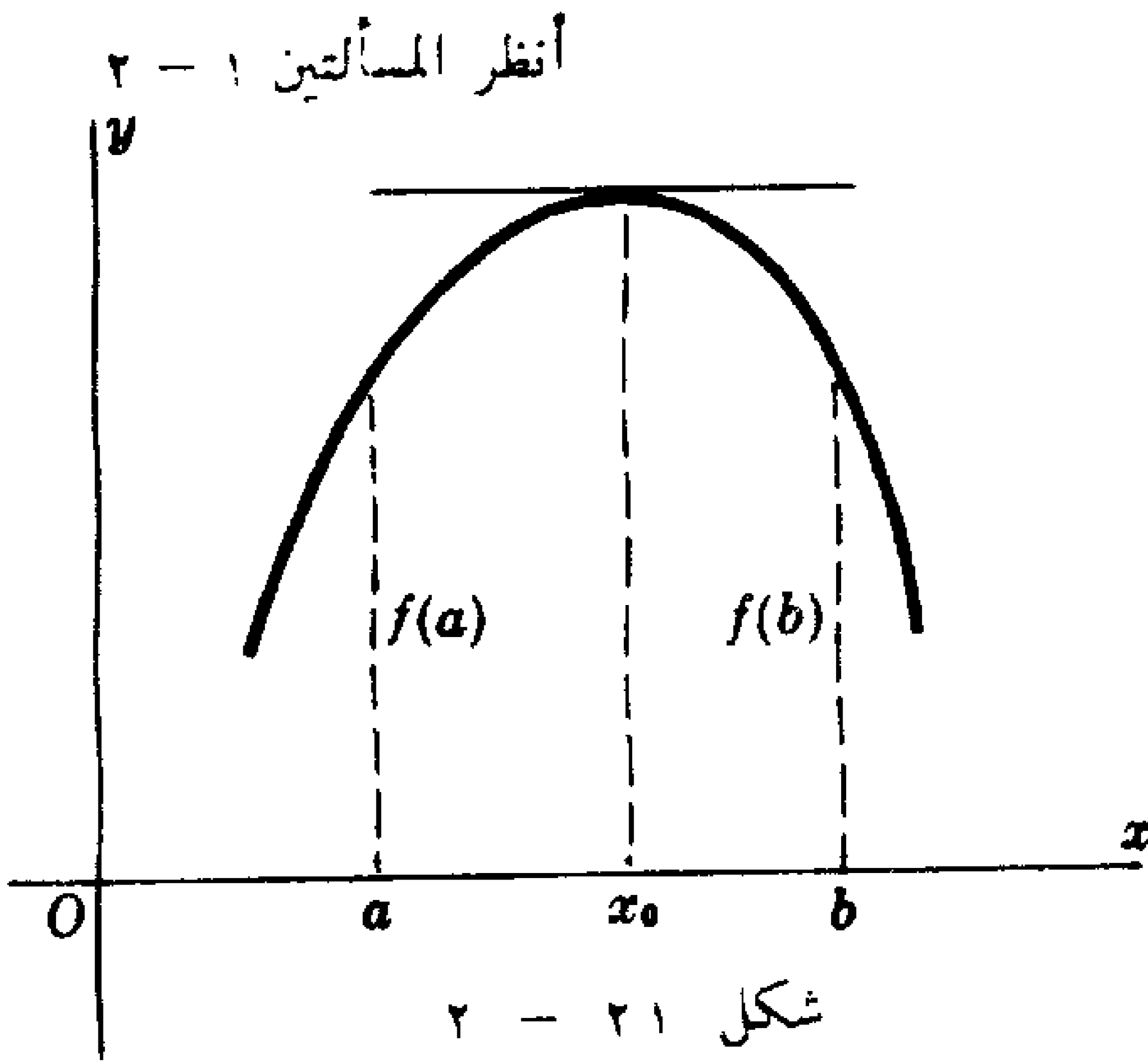
نظرية رول : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وكان $f(a) = f(b) = 0$ وإذا كان $f'(x)$ موجودة عند كل موضع فى الفترة باستثناء نقطتى نهايات الفترة على الأكثر ، فإن $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الأقل لـ x ، مثل $x = x_0$ ، واقعة بين a و b .

وهذا يعنى من الناحية الهندسية أنه إذا قطع منحنى متصل المحور x عند $x = a$ و $x = b$ وكان له مماس عند كل نقطة من نقطة التى تقع بين a و b فإنه يوجد على الأقل نقطة واحدة $x = x_0$ بين a و b يكون المماس عندها موازياً للمحور . أنظر الشكل ٢١ – ١ . البرهان أنظر المسألة ١١ .

نتيجة : إذا حققت الدالة $f(x)$ شروط نظرية رول، خلاف أن $f(a) = f(b) \not= 0$ فعندئذ $f'(x) = 0$ لقيمة واحدة على الأقل لـ x مثل $x = x_0$ ، واقعة بين a و b . أنظر الشكل ٢١ – ٢



شكل ٢١ –١



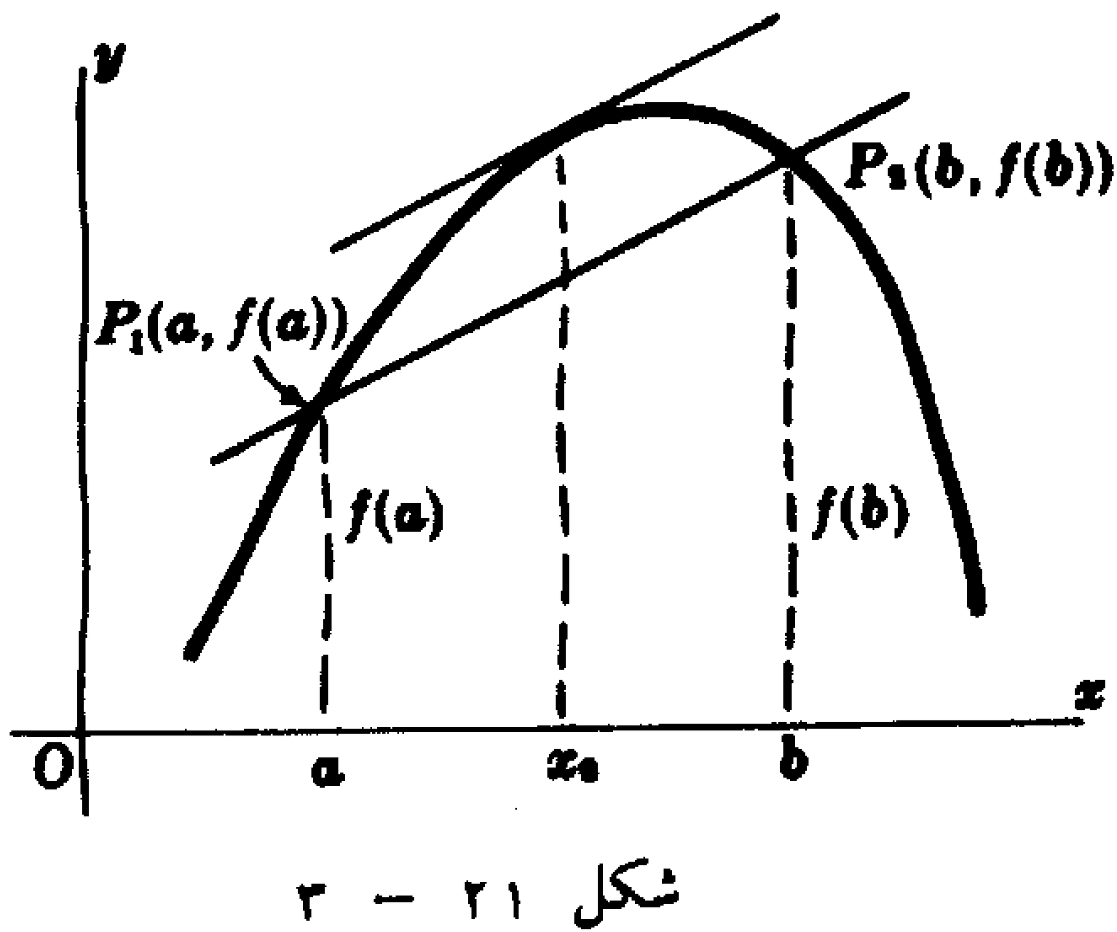
شكل ٢١ – ٢

قانون القيمة المتوسطة : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وكانت $f'(x)$ موجودة عند كل موضع فى هذه الفترة باستثناء نقطتى نهايات الفترة على الأكثر ، فعندئذ يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ x بين a و b مثل $x = x_0$ بحيث :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

وهذا يعنى من الناحية الهندسية أنه إذا كانت P_1 و P_2 نقطتين على منحنى متصل ، له مماس عند كل نقطة بينهما ، فعندئذ يوجد على الأقل نقطة واحدة على المنحنى بين P_1 و P_2 يكون ميل المنحنى عندها مساوياً ميل $P_1 P_2$. أنظر الشكل ٢١ – ٣ .

للبرهان أنظر المسألة ١٢



شكل ٢١ – ٣

يمكن صياغة قانون القيمة المتوسطة بأشكال مفيدة متعددة .

(I) $f(b) = f(a) + (b-a)\cdot f'(x_0),$ حيث x_0 واقعة بين a و b

وبتغيير بسيط فى الرموز تأخذ هذه الصيغة الشكل .

(II) $f(x) = f(a) + (x-a)\cdot f'(x_0),$ حيث x_0 واقعة بين a و x

ويتضح من الشكل ٢١ – ٤ أن $x_0 = a + \theta(b - a)$

حيث $1 > \theta > 0$. وبإجراء هذا التبديل تأخذ الصيغة (I) الشكل :

شكل ٢١ – ٤

$$f(b) = f(a) + (b-a)\cdot f'[a+\theta(b-a)], \quad 0<\theta<1 \qquad \text{(III)}$$

وإذا كتبنا $h = (b - a)$ فإن (III) تصبح :

$$f(a+h) = f(a) + h\cdot f'(a+\theta h), \quad 0<\theta<1 \qquad \text{(IV)}$$

وأخيراً إذا وضعنا $a = x$ و $h = \Delta x$ فإن (IV) تصبح :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x\cdot f'(x+\theta\cdot\Delta x), \quad 0<\theta<1 \qquad \text{(V)}$$

أنظر المسائل ٣ – ٩

القانون العام للقيمة المتوسطة : إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ متصلتين فى الفترة $a \le x \le b$ ، وإذا وجد $f'(x)$ و $g'(x)$ وكان $g'(x) \neq 0$ عند كل موضع من هذه الفترة باستثناء نقطتى نهايتيها على الأكثر . فعندئذ توجد بين a و b قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x = x_0$ بحيث يكون :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

وعندما $g(x) = x$ تصبح هذه المعادلة قانون القيمة المتوسطة .

للبرهان أنظر المسألة ١٣

قانون القيمة المتوسطة الموسع : إذا كان كلا من $f(x)$ وجميع مشتقاتها حتى $(n-1)$ متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وإذا كانت $f^{(n)}(x)$ موجودة عند كل موضع فى الفترة باستثناء نقطتى نهايتها على الأكثر ، فعندئذ توجد قيمة واحدة على الأقل لـ x ، مثل $x = x_0$ ، واقعة بين a ، b بحيث :

$$\text{(VI)} \quad \begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n \end{aligned}$$

للبرهان أنظر المسألة ١٥

وإذا وضعنا x بدلا من b فإن (VI) تأخذ الشكل :

$$\text{(VII)} \quad \begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \end{aligned}$$

حيث x_0 واقع بين a و x

وإذا وضعنا 0 بدلا من a فى (VII) تصبح :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n \qquad \text{(VIII)}$$

حيث x_0 واقعة بين 0 و x .

مســـائل محـــلولة

١ – أوجد قيمة x_0 الواردة فى نظرية رول للدالة $f(x) = x^3 - 12x$ فى الفترة $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$ ·
إن $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ وعندما $x = \pm 2$ فإن $x_0 = 2$ هى القيمة المطلوبة .

٢ – هل يمكن تطبيق نظرية رول على الدالتين (١) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$ (ب) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x + 2}$ ؟

(١) أن $f(x) = 0$ عندما $x = 0,4$ و بما أن $f(x)$ دالة منقطعة عند $x = 2$ وهى نقطة من نقط الفترة $0 \leq x \leq 4$ فإن النظرية لا تطبق .

(ب) $f(x) = 0$ عندما $x = 0,4$ ولكن $f(x)$ هنا منقطعة عند $x = -2$ وهى نقطة ليست من نقط الفترة $0 \leq x \leq 4$ ثم إن $f'(x) = (x^2 + 4x - 8)/(x + 2)^2$ موجودة فى كل موضع باستثناء عند $x = -2$. لذلك فالنظرية قابلة للتطبيق حيث نجد $x_0 = 2(\sqrt{3} - 1)$ ، وهى الجذر الموجب لـ $x^2 + 4x - 8 = 0.$

٣ – أوجد قيمة x_0 الواردة فى قانون القيمة المتوسطة إذا كانت $f(x) = 3x^2 + 4x - 3,\ a = 1,\ b = 3.$
باستخدام الصيغة (I) حيث $f'(x_0) = 6x_0 + 4,\ f(b) = f(3) = 36,\ f(a) = f(1) = 4,$ و $b - a = 2,$
نجد أن $36 = 4 + 2(6x_0 + 4) = 12x_0 + 12$ ومنـــه $x_0 = 2$.

٤ – استخدم قانون القيمة المتوسطة لحساب القيمة التقريبية لـ $\sqrt[6]{65}$.

ضع $f(x) = \sqrt[6]{x},\ a = 64,\ b = 65,$ وباستخدام الصيغة (I)
عندئذ يكون $f(65) = f(64) + (65 - 64)/6x_0^{5/6},\quad 64 < x_0 < 65$ وبما أن x_0 غير معروفة فإننا نأخذ $x_0 = 64$ فنجد القيمة التقريبية $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64} + 1/(6\sqrt[6]{64^5}) = 2 + 1/192 = 2.005\,21.$

٥ – المطلوب توسيع حفرة دائرية فى قطعة معدنية ، قطرها 10 cm وعمقها 30 cm ، ليصبح قطرها 10.3 cm . احسب كمية المعدن الذى تزيله من القطعة .

يعطى الحجم بالسنتيمترات المكعبة ، لثقب دائرى نصف قطره $x\text{ cm}$ وعمقه 30 cm بـ $V = f(x) = 30\pi x^2.$
فعلينا إذن أن نقدر القيمة $f(5.15) - f(5)$. من قانون القيمة المتوسطة . لدينا .

$$f(5.15) - f(5) = 0.15\,f'(x_0) = 0.15(60\,\pi x_0), \qquad 5 < x_0 < 5.15$$

فإذا أخذنا $x_0 = 5$ فإننا نحصل على القيمة التقريبية $f(5.15) - f(5) = 0.15\,(60\pi \cdot 5) = 45\pi\text{ cm}^3$

٦ – طبق قانون القيمة المتوسطة على $y = f(x),\ a = x,\ b = x + \Delta x$ بفرض أن جميع الشروط محققة ، لتحصل على $\Delta y = f'(x)\,\Delta x$ بشكل تقريبى .

لدينـــا $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x + \Delta x - x] \cdot f'(x_0),\quad x < x_0 < x + \Delta x.$
فإذا أخذنا $x_0 = x$ فإننا نجد القيمة التقريبية لـ $\Delta y = f'(x).\,\Delta x$.

٧ – استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أن $\sin x < x$ عندما $x > 0$ بما أن $\sin x \leq 1$ فإن $\sin x < x$ وعندما $x > 1$ لنأخذ $f(x) = \sin x$ فى الفترة $0 \leq x \leq 1$ وباستخدام الصيغة (II) فنجد أن :

$$\sin x = \sin 0 + x\cos x_0 = x\cos x_0, \qquad 0 < x_0 < x$$

ولكن فى هذه الفترة $\cos x_0 < 1$ وبالتالى فإن $x\cos x_0 < x$ ومنـــه $\sin x < x$.

٨ – استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ عندما $-1 < x < 0$ وعندما $x > 0$.
باستخدام الصيغة (IV) حيث $f(x) = \ln x,\ a = 1$ و $h = x;$ فنجد :

$$\ln(1+x) = \ln 1 + x\frac{1}{1+\theta x} = \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0<\theta<1$$

وعندما $x>0$ فإن $1<1+\theta x<1+x$ و بالتالى $1>\frac{1}{1+\theta x}>\frac{1}{1+x}$ و $x>\frac{x}{1+\theta x}>\frac{x}{1+x}$.

وعندما $-1<x<0$ فإن $1>1+\theta x>1+x$; وبالتالى $1<\frac{1}{1+\theta x}<\frac{1}{1+x}$ و $x>\frac{x}{1+\theta x}>\frac{x}{1+x}$.

وفى كلا الحالتين $x>\frac{x}{1+\theta x}$ و $\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta x}<x$; وكذلك $\frac{x}{1+\theta x}>\frac{x}{1+x}$. و $\ln(1+x)=$ $\frac{x}{1+\theta x}>\frac{x}{1+x}$ و بالتالى فإن $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ عندما $-1<x<0$ و $x>0$.

٩ — استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبين أن $\sqrt{1+x}<1+{}^1/_2\,x$ عندما $-1<x<0$ وعندما $x>0$.

لنأخذ $f(x)=\sqrt{x}$ وباستخدام الصيغة (IV) حيث $a=1, h=x$ نجـد :

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}, \quad 0<\theta<1$$

وعندما $x>0$ نلاحظ أن $\sqrt{1+\theta x}<\sqrt{1+x}$ بـ $\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}>\frac{x}{2\sqrt{1+x}}$; و عندما $-1<x<0$ نلاحظ أن $\sqrt{1+\theta x}>\sqrt{1+x}$ و $\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}>\frac{x}{2\sqrt{1+x}}$.

وفى كلا الحالتين يكون $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}>1+\frac{x}{2\sqrt{1+x}}$ وبضرب طرفى المتباينة بـ $\sqrt{1+x}>0$ نجـد $1+x>\sqrt{1+x}+\frac{1}{2}x$ و $\sqrt{1+x}<1+\frac{1}{2}x$

١٠ — أوجد قيمة x_0 الواردة فى القانون العام للقيمة المتوسطة بفرض أن $f(x)=3x+2,\ g(x)=x^2+1,\ 1\le x\le 4$.

لإيجاد قيمة x_0 فإن :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{14-5}{17-2} = \frac{3}{5} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3}{2x_0}$$

إذن $2x_0=5$ ومنـه $x_0=5/2$.

١١ — برهن نظرية رول : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a\le x\le b$ وكانت $f(a)=f(b)=0$ وكانت $f'(x)$ موجودة عند كل موضع فى الفترة باستثناء نقطتى نهايتيها على الأكثر فإن $f'(x)=0$ لقيمة واحدة على الأقل لـ x مثل $x=x_0$ واقعة بين a و b.

إذا كانت $f(x)=0$ على طول الفترة فإن $f'(x)=0$ كذلك ويتم برهان النظرية . أما إذا كانت $f(x)$ موجبة (سالبة) فى موضع ما فى الفترة فعندئذ يكون لها قيمة عظمى(صغرى) نسبية عند موضع ما مثل $x=x_0$ فى الفترة $a<x_0<b$

(أنظر الخاصة II من الفصل الثالث) وبالتالى فإن $f'(x_0)=0$.

١٢ — برهن قانون القيمة المتوسطة : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a\le x\le b$ وإذا كانت $f'(x)$ موجودة عند كل موضع فى الفترة باستثناء نقطتى نهايتيها على الأكثر فعندئذ يوجد على الأقل قيمة واحدة لـ x بين a و b مثل $x=x_0$ بحيث

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

بالعودة إلى الشكل ٢١ — ٣ نلاحظ أن معادلة المستقيم القاطع P_1P_2 هى $y=f(b)+K(x-b)$ حيث $K=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. والمسافة الرأسية من المستقيم القاطع إلى المنحنى عند أى نقطة x فى الفترة $a<x<b$ هى $F(x)=f(x)-f(b)-K(x-b)$. إن $F(x)$ الآن تحقق شروط نظرية رول (تحقق من ذلك) وبالتالى فإن $F'(x)=f'(x)-K=0$ عند $x=x_0$ بين a و b وهكذا $K=f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

وهو المطلوب .

١٣ – برهن القانون العام للقيمة المتوسطة : إذا كانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ متصلتين فى الفترة $a \le x \le b$ وإذا وجد $f'(x)$ و $g'(x)$ وكانت $g'(x) \neq 0$ عند كل موضع فى الفترة باستثناء نقطتى نهايتيها على الأكثر ، فعندئذ توجد بين a و b قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x = x_0$ بحيث يكون :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

لنفرض $g(b) = g(a)$ فعندئذ يتضح من نتيجة نظرية رول أن $g'(x) = 0$ عند قيمة لـ x بين a و b وهذا يخالف الفرض ، إذن $g(b) \neq g(a)$. لنفرض الآن $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = K$ ، حيث K ثابت ، ونكتب الدالة .

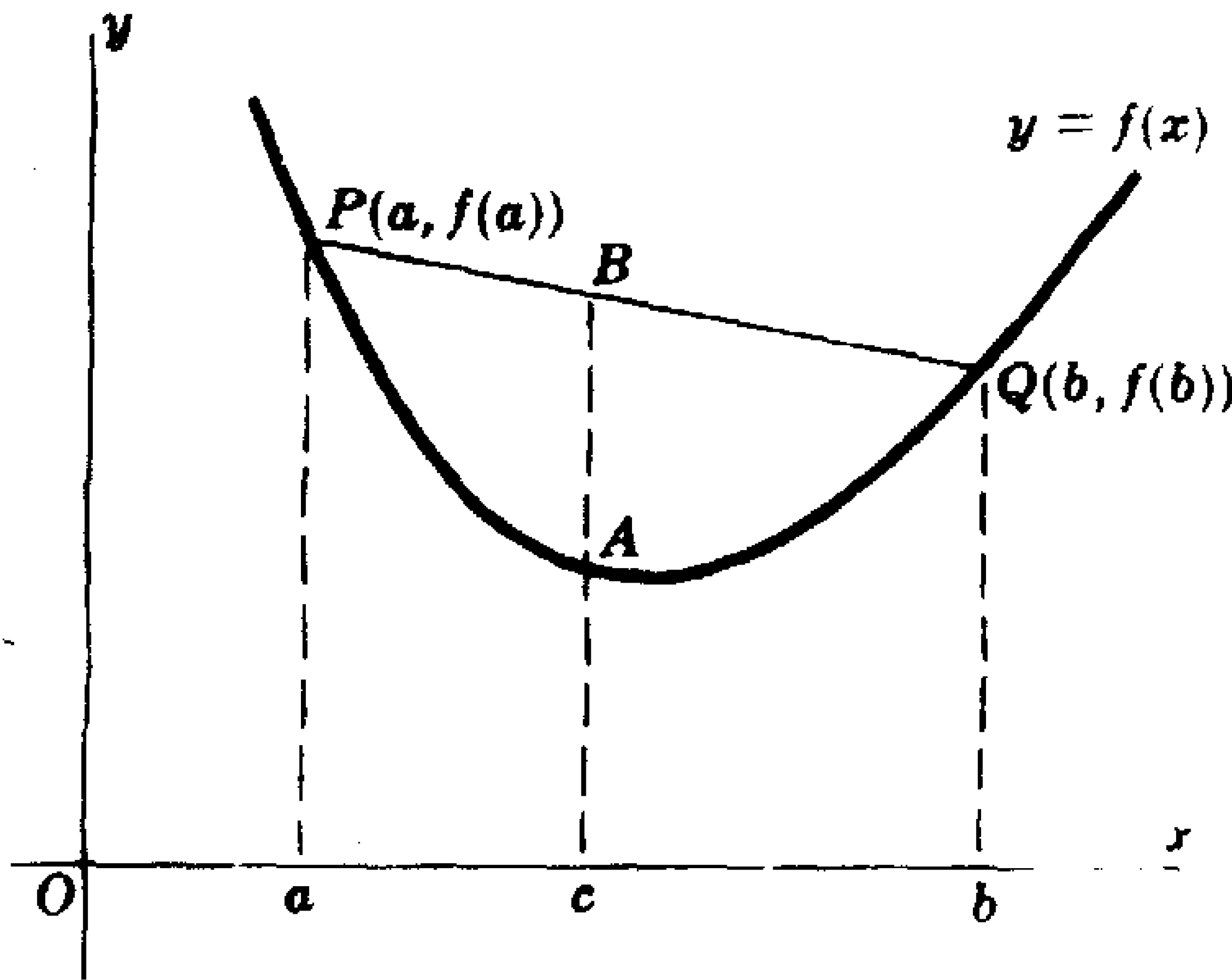
$$F(x) = f(x) - f(b) - K[g(x) - g(b)]$$

تحقق هذه الدالة شروط نظرية رول (تحقق من ذلك) وبالتالى $F'(x) = f'(x) - Kg'(x) = 0$ عند قيمة وحدة لـ x على الأقل ، لتكن $x = x_0$ بين a و b إذن :

$$K = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

وهو المطلوب .

١٤ – يكون القوس PQ لمنحنى $y = f(x)$ مقعراً لأعلى إذا وقع تحت الوتر ومقعراً لأسفل إذا وقع فوق هذا الوتر . برهن أنه إذا كانت $f(x)$ و $f'(x)$ متصلتين فى الفترة $a \le x \le b$ وإذا حافظت $f'(x)$ على إشارتها فى الفترة $a < x < b$ فعندئذ يكون :



شكل ٢١ — ٥

(i) $f(x)$ مقعرة لأعلى فى الفترة $a < x < b$ عندما $f''(x) > 0$

(ii) $f(x)$ مقعرة لأسفل فى الفترة $a < x < b$ عندما $f''(x) < 0$

إن معادلة الوتر PQ الذى يصل $[a, f(a)]$ و $Q[b, f(b)]$ هى $y = f(a) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ لتكن A و B نقطتين على القوس والوتر ، على الترتيب ، احداثيها السينى $x = c$ حيث $a < c < b$ ويعطى احداثيها الصادى بـ $f(c)$ و

$$f(a) + (c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b-c)\cdot f(a) + (c-a)\cdot f(b)}{b-a}$$

(i) علينا أن نبرهن أن :

$$f(c) < \frac{(b-c)\cdot f(a) + (c-a)\cdot f(b)}{b-a}$$

عندما $f''(x) > 0$. استناداً إلى قانون القيمة المتوسطة ، يكون $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(\xi)$ ، حيث ξ بين a و c ويكون $\frac{f(b)-f(c)}{b-c} = f'(\eta)$ ، حيث η بين c و b . وبما أن $f''(x) > 0$ فى الفترة $a < x < b$ فإن $f'(x)$ دالة متزايدة فى الفترة $f'(\xi) < f'(\eta)$. وبالتالى فإن $\frac{f(c)-f(a)}{c-a} < \frac{f(b)-f(c)}{b-c}$ ومنه ينتج أن :

$$f(c) < \frac{(b-c)\cdot f(a) + (c-a)\cdot f(b)}{b-a}$$

كما هو مطلوب .

وأما الجزء (ii) فنتركه للقارىء كتمرين .

١٥ – برهن أنه إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة مع مشتقاتها الـ $(n-1)$ الأولى فى الفترة $a \le x \le b$ وإذا وجد $f^{(n)}(x)$ فى كل موضع فى الفترة باستثناء نقطتى نهايتيها على الأكثر ، فعندئذ توجد بين a و b قيمة واحدة لـ x على الأقل مثل $x = x_0$ بحيث :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

إذا كانت $n = 1$ فإن الأمر يؤول إلى قانون القيمة المتوسطة . والبرهان التالى مماثل للبرهان فى المسألة ١٢ . لنعرف K بالعلاقة :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + K(b-a)^n \quad (i)$$

وباعتبار أن :

$$F(x) = f(x) - f(b) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + K(b-x)^n$$

من المعادلة (i) نلاحظ الآن أن $F(a) = 0$ وأن $F(b) = 0$. لذلك يوجد ، استناداً إلى نظرية رول ، قيمة لـ x ولتكن $x = x_0$ وبحيث تحقق العلاقة :

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= f'(x_0) + \{f''(x_0)\cdot(b-x_0) - f'(x_0)\} + \left\{\frac{f'''(x_0)}{2!}(b-x_0)^2 - f''(x_0)\cdot(b-x_0)\right\} \\ &\quad + \cdots + \left\{\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(b-x_0)^{n-2}\right\} - Kn(b-x_0)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b-x_0)^{n-1} - Kn(b-x_0)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

وبالتالى فإن $K = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ وتأخذ المعادلة (i) الشكل :

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b-a)^n$$

مسائل اضافية

١٦ – أوجد قيمة x_0 الواردة فى نظرية رول بفرض أن :

(ا) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ 1 \le x \le 3$ ج : $x_0 = 2$

(ب) $f(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ ج : $x_0 = \frac{1}{2}\pi$

(جـ) $f(x) = \cos x,\ \pi/2 < x < 3\pi/2$ ج : $x_0 = \pi$

١٧ – أوجد قيمة x_0 الواردة فى قانون القيمة المتوسطة بفرض أن :

(ا) $y = x^3,\ 0 \le x \le 6$ ج : $x_0 = 2\sqrt{3}$

(ب) $y = ax^2 + bx + c,\ x_1 \le x \le x_2$ ج : $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

(جـ) $y = \ln x,\ 1 \le x \le 2e$ ج : $x_0 = \dfrac{2e-1}{1+\ln 2}$

١٨ – استخدم قانون القيمة المتوسطة لتحسب قيمة تقريبية لـ (ا) $\sqrt{15}$

(ب) $(3.001)^3$ (جـ) $1/999$

ج : (ا) 3.875 (ب) 27.027 (جـ) 0.001 001

١٩ – استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أن :

(ا) $\tan x > x,\ 0 < x < \frac{1}{2}\pi$؛ (ب) $\frac{x}{1+x^2} < \text{Arc}\tan x < x,\ x > 0$؛ (ﺟ) $x < \text{Arc}\sin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ 0 < x < 1.$

٢٠ – بين أن $|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1|$ بحيث x_1 عدد ما ، وذلك بفرض أن :

(ا) $f(x) = \sin x,$ (ب) $f(x) = \cos x.$

٢١ – استخدم قانون القيمة المتوسطة لتبرهن أنه :

(ا) إذا كانت $f'(x) = 0$ فى كل موضع فى الفترة $0 \leq x \leq b$ فإن $f(x) = f(a) = c$ حيث c ثابت فى كل موضع فى نفس الفترة .

(ب) $f(x)$ تزداد مع x فى الفترة المعطاة $0 \leq x \leq b$ إذا كانت $f'(x) > 0$ على طول الفترة .

ارشاد : لتكن $x_1 < x_2$ نقطتين على الفترة ، عندئذ $f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_0),\ x_1 < x_0 < x_2.$

٢٢ – استخدم نظرية المسألة ٢١ (ا) لتبرهن أنه إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ مختلفتين ولكن $f'(x) = g'(x)$ فى فترة ما فإن $f(x) - g(x) = c \neq 0,$ حيث c ثابت ، فى نفس الفترة .

٢٣ – تعرف نقطة انحناء $f(x)$ بأنها نقطة حرجة عند $x = x_0$ بحيث تتغير عندها إشارة $f'(x)$ عندما تزداد x مارة بـ $x = x_0$ بفرض أن $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ هى نقط الانحناء المختلفة لـ $f(x)$. بين أن للمعادلة $f(x) = 0$ جذر حقيقى واحد على الأكثر فى كل من الفترات $x < x_1,\ x_1 < x < x_2,\ \ldots,\ x_{m-1} < x < x_m,\ x > x_m.$

٢٤ – برهن أنه إذا كان لـ $f(x) = 0$ من الدرجة n ، n جذراً حقيقياً بسيطاً فإن لـ $f'(x) = 0$ ، $(n - 1)$ جذراً حقيقياً بسيطاً بالضبط .

٢٥ – برهن أن للمعادلة $x^3 + px + q = 0$ (ا) جذراً حقيقياً واحداً إذا كان $P > 0$ (ب) ثلاثة جذور حقيقية بسيطة عندما $4p^3 + 27q^2 < 0$

٢٦ – أوجد قيمة x_0 الواردة فى القانون العام للقيمة المتوسطة بفرض أن :

(ا) $f(x) = x^2 + 2x - 3,\ g(x) = x^2 - 4x + 6;\ a = 0,\ b = 1.$ ج : $1/2$

(ب) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x;\ a = \pi/6,\ b = \pi/3.$ ج : $\frac{1}{4}\pi$

٢٧ – استخدم قانون القيمة المتوسطة الموسع (VIII) لتبرهن أنه :

(ا) يمكن تقريب $\sin x$ إلى x مع خطأ لايزيد عن 0.005 وذلك عندما تكون $x < 0.31$

ارشاد : عند $n = 3$ لدينا $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 \cos x_0.$ ضع $\frac{1}{6}|x^3 \cos x_0| \leq \frac{1}{6}|x^3| < 0.005.$

(ب) يمكن تقريب $\sin x$ إلى $x - x^3/6$ بخطأ لايزيد عن 0.000 05 عندما تكون $x < 0.359$.

الفصل الثانى والعشرون

الصيغ غير المحددة

عندإيجاد المشتقة : لدالة قابلة للاشتقاق فى الفصل الرابع قادنا الأمر إلى النظر فى :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(\Delta x)}{G(\Delta x)} \qquad (١)$$

و بما أن نهاية كل من البسط و المقام لهذا الكسر مساوية للصفر فلقد جرت العادة أن ندعو (١) صيغة غير محددة من النمط 0/0. وفى الفصل الثانى ، المسألة الخامسة ، وجدنا أمثلة أخرى من هذا النمط .

ولقد جرت العادة ، بشكل مماثل أن ندعو $\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$ (أنظر المسألة ٦ من الفصل الثانى) صيغة غير محددة من النمط ∞/∞ . ينبغى أن لانفهم هذين الرمزين 0/0 و ∞/∞ ورموزاً أخرى ($\infty - \infty$ ، $0^0, \infty^0, 1^\infty$ ، $0 . \infty$) سترد فيما بعد ، بأشكالها الحرفية إذ أنها مجرد مصطلحات للتمييز بين أنماط الصيغ المحددة .

النمط 0/0 :

قاعدة لوبيتال . إذا كان a عدداً ما وكانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للاشتقاق و $g(x) \neq 0$ لجميع قيم x فى الفترة: $0 < |x-a| < \delta$ وإذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)=0$ و $\lim_{x\to c} g(x)=0$ فعندئذ :

بشرط أن توجد النهاية $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ أو أن تكون غير منتهية .

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثـــال ١ : أن $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3}$ صيغة غير محددة من النمط 0/0 ، وبما أن :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{d}{dx}(x^4-81)}{\frac{d}{dx}(x-3)} = \lim_{x\to 3} 4x^3 = 108,$$

فإن $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{x-3} = 108$

(انظر المسائل ١ - ٧)

يلاحظ أن قاعدة لوبيتال تقتضى أن يكون $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)/g(x)$. ولكننا فى بعض المسائل (المسألة ٨ مثلا) سنعتبر الحالة التى يوجد فيها نهاية واحدة دون الأخرى من هاتين النهايتين .

النمط ∞/∞ :

لاتتغير نتائج قاعدة لوبيتال إذا أجرينا التغييرين التاليين أو كليهما فى فروض القاعدة .

(i) نستبدل $\lim_{x\to a} g(x)$ و $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ « بـ »(8) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$

(ii) نستبدل a إذا كان a عدداً ما بـ "∞ أو $-\infty$, $a = +\infty$"

ونستبدل "$0 < |x - a| < \delta$" بـ "$|x| > M$".

مثـــال ٢ : أن $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$ صيغة غير محددة من النمط ∞/∞ . لذلك :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

أنظر المسائل ٩ — ١١

النمطان $0.\infty$ و $\infty - \infty$:

لمعالجة هذين النمطين نبدأ بتحويلهما إلى أحد النمطين 0/0 أو ∞/∞ فمثلا أن :

$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$ من النمط $0.\infty$ بينما $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$ من النمط ∞/∞

وأن $\lim_{x\to 0}\left(\csc x - \frac{1}{x}\right)$ من النمط ∞/∞ بينما $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \sin x}{x \sin x}\right)$ من النمط 0/0 .

أنظر المسائل ١٣ — ١٦

الأنماط : $0^0, \infty^0, 1^\infty$:

إذا كان $\lim y$ واحداً من هذه الأنماط فإن $\lim(\ln y)$ من النمط $0.\infty$.

مثال ٣ : احسب قيمة $\lim_{x\to 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$.

إن هذه النهاية من النمط 1^∞ لنفرض; $y = (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$ ، فيكون $\ln y = \cot^2 3x \ln \sec^3 2x = \frac{3 \ln \sec 2x}{\tan^2 3x}$

وتكون النهاية $\lim_{x\to 0} \ln y$ من النمط 0/0 .

وعلى هذا فإن, $\lim_{x\to 0}\frac{3 \ln \sec 2x}{\tan^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{6 \tan 2x}{6 \tan 3x \sec^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}$ من النمط 0/0

لأن $\lim_{x\to 0} \sec^2 3x = 1,$ وبالتالي فإن $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x}{3\sec^2 3x} = \frac{2}{3}.$

وبما أن $\lim_{x\to 0} \ln y = 2/3$ فإن $\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x} = e^{2/3}.$

أنظر المسائل ١٧ — ١٩

مســائل محـلولة

١ — برهن قاعدة لوبيتال : إذا كان a عدداً وكانت الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ قابلتين للاشتقاق و $g(x) \neq 0$ لجميع قيم x في الفترة $0 < |x - a| < \delta$ وإذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to c} g(x) = 0$

وإذا وجدت $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ فإن $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0\to a}\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

إذا وضعنا فى القانون العام للقيمة المتوسطة (الفصل ٢١) b بدلا من x وبملاحظة $f(a) = g(a) = 0$ فإننا نجد أن :

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حيث x_0 تقع بين a و x وحيث أن $x_0 \to a$ عندما $x \to a$. إذن :

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ exists, } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

٢ – احسب قيمة $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$. عندما $x \to 2$. نلاحظ أن كلا من البسط والمقام يؤول إلى الصفر . إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{2x} = \frac{5}{4}.$$

٣ – احسب قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}$. عندما $x \to 0$. نلاحظ أن كلا من البسط والمقام يؤول إلى الصفر . إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x} = \frac{1+2}{1-2} = -3.$$

٤ – احسب قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}$. أن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2x} = \infty.$$

٥ – احسب قيمة $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2}$.

إن كلا من البسط والمقام يؤول إلى الصفر عندما $x \to 0$ إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق ومنها ينتج أن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x - 2x}$$

وحيث أن الدالة الناتجة غير محددة من النمط $0/0$ فإننا نطبق القاعدة ثانية فنحصل على :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x - 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x - 2}$$

ومرة أخرى نجد أن الدالة الناتجة غير محددة من النمط $0/0$ وهكذا فإننا ، وبعد أن نبرر كل تساوى ، نحصل على :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin 2x - 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x - 2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{-4\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x} = -\frac{1}{4}$$

٦ – ابحث فى :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3} = \lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-6} = \lim_{x\to 2}\frac{6}{6} = 1.$$

إن الدالة المفروضة غير محددة من النمط $0/0$ إذن فالقاعدة قابلة للتطبيق غير أن الدالة الناتجة ليست من الصيغ غير المحددة (النهاية تساوى $7/3$) ولذلك فإن التطبيقات المتتالية للقاعدة ليست صحيحة وهذا خطأ شائع .

٧ - ابحث فى

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1} = \frac{6x-2}{6x-4} = 2.$$

إن الصيغة الصحيحة هنا هى

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-4x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{6x-2}{6x-4} = 2.$$

وكون النهاية صحيحة لايبرر سلسلة الصيغ الخاطئة التى أدت إليها .

٨ – احسب قيمة $\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}}$.

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x-\pi}} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}(x-\pi)^{-1/2}} = \lim_{x\to\pi^+} 2(x-\pi)^{1/2}\cos x = 0$$

حيث ينبغي أن يكون اقترابنا هنا من اليمين وإلا فإن $(x-\pi)^{1/2}$ تخيل .

٩ – احسب قيمة $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$.

إن البسط والمقام يؤولان إلى $+\infty$ عندما $x\to+\infty$ لذلك فإن $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0.$

١٠ – احسب قيمة $\lim_{x\to0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$.

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\cos x/\sin x}{\sec^2 x/\tan x} = \lim_{x\to0^+} \cos^2 x = 1.$$

١١ – احسب قيمة $\lim_{x\to0} \frac{\cot x}{\cot 2x}$.

$$\lim_{x\to0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x\to0} \frac{\csc^2 x}{2\csc^2 2x} = \lim_{x\to0} \frac{\csc^2 x \cot x}{4\csc^2 2x \cot 2x}$$

إن كل تطبيق للقاعدة هنا ينتج عنه صيغة غير محددة من النمط ∞/∞ لذلك فإننا نلجأ إلى التعويض المثلثي التالي :

$$\lim_{x\to0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x\to0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x\to0} \frac{2\sec^2 2x}{\sec^2 x} = 2$$

١٢ – بفرض أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. برهن أنه إذا كان $\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$

بفرض $x = 1/y$. إذن عندما $x\to+\infty$ فإن $y\to0^+$ ومنه $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)}.$

إذن :

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{-f'(1/y)\cdot y^{-2}}{-g'(1/y)\cdot y^{-2}}$$

$$= \lim_{y\to0^+} \frac{\frac{d}{dy} f(1/y)}{\frac{d}{dy} g(1/y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

١٣ – احسب قيمة $\lim_{x\to0^+} (x^2 \ln x)$.

عندما $x\to0^+$ فإن $x^2\to0$ و $\ln x\to-\infty$ ولذلك فإن $\frac{\ln x}{1/x^2}$ صيغة غير محددة من النمط ∞/∞ .

إذن :

$$\lim_{x\to0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to0^+} (-\tfrac{1}{2}x^2) = 0$$

١٤ – $\lim_{x\to\pi/4} (1-\tan x)\sec 2x = \lim_{x\to\pi/4} \frac{1-\tan x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2\sin 2x} = 1.$

١٥ – $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1} = \lim_{x\to0} \frac{e^x}{xe^x+2e^x} = \frac{1}{2}.$

١٦ – $\lim_{x\to0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$

١٧ – احسب قيمة $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$. (هذه النهاية من النمط 1^{∞})

لنضع $y = x^{1/(x-1)}$. فيكون $y = \frac{\ln x}{x-1}$ صيغة غير محددة من النمط 0/0 .

إذن : $\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$

وبما أن $\ln y \to 1$ عندما $x \to 1$ فإن $y \to e$ والنهاية المطلوبة هي e .

١٨ – احسب قيمة $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} (\tan x)^{\cos x}$. (هذه النهاية من النمط ∞^0) .

لنضع $y = (\tan x)^{\cos x}$. إذن $\ln y = \cos x \ln \tan x = \frac{\ln \tan x}{\sec x}$ وهي صيغ غير محددة من النمط $\frac{\infty}{\infty}$.

إذن : $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \ln y = \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\ln \tan x}{\sec x} = \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\sec^2 x/\tan x}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$

وبما أن $\ln y \to 0$ عندما $x \to {}^1/_2\pi^-$ فإن $y \to 1$ والنهاية المطلوبة هي 1 .

١٩ – احسب قيمة $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$. (هذه النهاية من النمط 0^0) .

لنضع $y = x^{\sin x}$. إذن $\ln y = \sin x \ln x = \frac{\ln x}{\csc x}$ وهي صيغة غير محددة من النمط $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\sin x \cos x}{x \sin x - \cos x} = 0$$

وبما أن $\ln y \to 0$ عندما $x \to 0^+$ فإن $y \to 1$ والنهاية المطلوبة هي 1 .

٢٠ – احسب قيمة $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$. لدينا : الخ ، $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$,

غير أن : $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{2+x^2}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{2}{x^2}+1} = 1.$

٢١ – إذا أثرت قوة دافعة كهربائية ثابتة مقدارها E على ملف مقاومته R ومعامل حثه الذاتي L فإن التيار المار في الملف عند أية لحظة t يعطى بالمعادلة $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. استنتج الصيغة التي يمكن استخدامها عندما تكون R صغيرة جداً .

$$\lim_{R\to 0} i = \lim_{R\to 0} \frac{E(1-e^{-Rt/L})}{R} = \lim_{R\to 0} E\frac{t}{L}e^{-Rt/L} = \frac{Et}{L}$$

مسائل اضافية

احسب ما يلي :

٢٢– $\lim_{x\to 4} \frac{x^4-256}{x-4} = 256$

٢٣– $\lim_{x\to 4} \frac{x^4-256}{x^2-16} = 32$

٢٤– $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = 1/2$

٢٥– $\lim_{x\to 2} \frac{e^x-e^2}{x-2} = e^2$

٢٦– $\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{1-e^x} = -1$

٢٧– $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\tan 2x} = 1/2$

٢٨ ـ $\lim_{x\to -1} \dfrac{\ln(2+x)}{x+1} = 1$

٢٩ ـ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1} = 1/4$

٣٠ ـ $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - e^{-2x}}{\sin x} = 4$

٣١ ـ $\lim_{x\to 0} \dfrac{8^x - 2^x}{4x} = \dfrac{1}{2}\ln 2$

٣٢ ـ $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\arctan x - x}{2x - \arcsin x} = 1$

٣٣ ـ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\sec 2x}{\ln\sec x} = 4$

٣٤ ـ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} = -1/2$

٣٥ ـ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos x}{\sin^2 x} = -3/2$

٣٦ ـ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

٣٧ ـ $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \dfrac{\csc 6x}{\csc 2x} = 1/3$

٣٨ ـ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{5x + 2\ln x}{x + 3\ln x} = 5$

٣٩ ـ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 + x^2}{e^x + 1} = 0$

٤٠ ـ $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\cot x}{e^{\csc^2 x}} = 0$

٤١ ـ $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x + 3x^3}{4e^x + 2x^3} = 1/4$

٤٢ ـ $\lim_{x\to 0} (e^x - 1)\cot x = 1$

٤٣ ـ $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x = 0$

٤٤ ـ $\lim_{x\to 0} x\csc x = 1$

٤٥ ـ $\lim_{x\to 1} \csc \pi x \ln x = -1/\pi$

٤٦ ـ $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} e^{-\tan x}\sec^2 x = 0$

٤٧ ـ $\lim_{x\to 0} (x - \arcsin x)\csc^3 x = -1/6$

٤٨ ـ $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4} - \dfrac{1}{x-2}\right) = -1/4$

٤٩ ـ $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = 0$

٥٠ ـ $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} (\sec^3 x - \tan^3 x) = \infty$

٥١ ـ $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{x}{x-1}\right) = -1/2$

٥٢ ـ $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{2}{1-\cos x}\right) = -1/3$

٥٣ ـ $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$

٥٤ ـ $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$

٥٥ ـ $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = 1$

٥٦ ـ $\lim_{x\to 0} (e^x + 3x)^{1/x} = e^4$

٥٧ ـ $\lim_{x\to +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x} = 1/e$

٥٨ ـ $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} (\sin x - \cos x)^{\tan x} = 1/e$

٥٩ ـ $\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} (\tan x)^{\cos x} = 1$

٦٠ ـ $\lim_{x\to 1} x^{\tan\frac{1}{2}\pi x} = e^{-2/\pi}$

٦١ ـ $\lim_{x\to +\infty} (1 + 1/x)^x = e$

٦٢ ـ احسب : (أ) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)} = \lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1+x}\cdot\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{\ln(1-x)} = 1,$

(ب) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{3^{x^2}} = 0,$ (جـ) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-3/x}}{x^2} = 0$

٦٣ ـ احسب $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^5 x}{x^2} = 0.$ وكذلك $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln^{1000} x}{x^5}.$

الفصل الثالث والعشرون

التفاضـــــــلات

التفاضلات : للدالة $y = f(x)$ نعرف ما يلي :

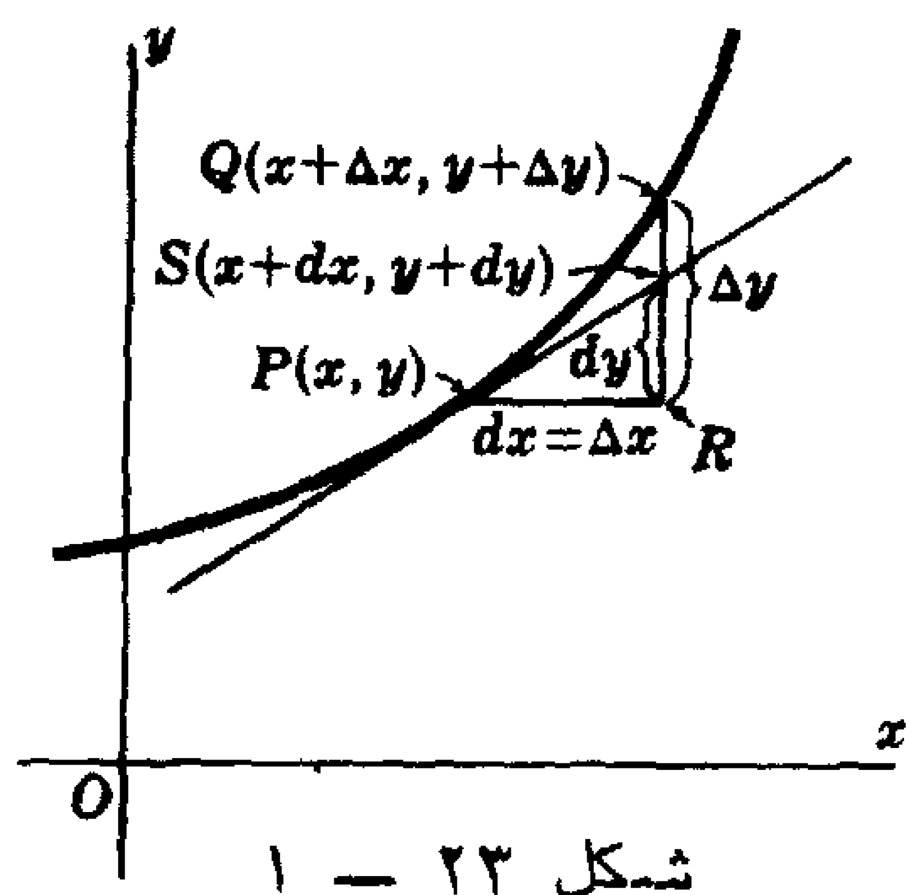
(أ) تعطى dx ، المسماة تفاضل x ، بالعلاقة $dx = \Delta x$.

(ب) تعطى dy ، المسماة تفاضل y ، بالعلاقة $dy = f'(x)\,dx$.

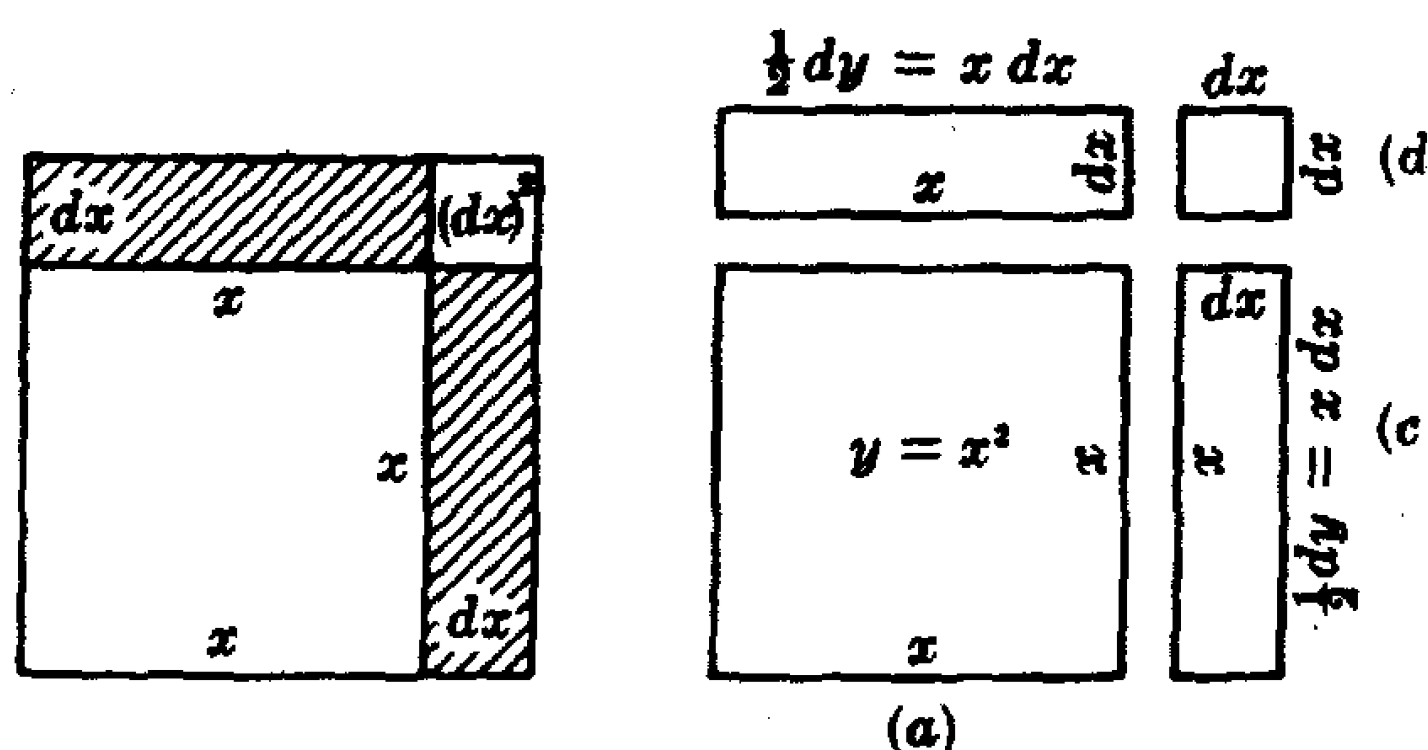
وتفاضل المتغير المستقل ، وفق التعريف ، يساوي تزايد المتغير ولكن تفاضل المتغير غير المستقل لا يساوي تزايد المتغير . انظر الشكل ٢٣ — ١

مثـــال ١ :

عندما $y = x^2$ فإن $dy = 2x.dx$ في حين $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 = 2x\,dx + (dx)^2$.
والشكل ٢٣ — ٢ يبين التوضيح الهندسي لذلك . ومنه نرى أن Δy تختلف عن dy بالمربع الصغير الذي مساحته $(dx)^2$.



شكل ٢٣ — ١



شكل ٢٣ — ٢

التفاضـــل : dy يمكن أن نحصل عليه من التعريف $dy = f'(x)\,dx$ مباشرة أو باستخدام قواعد يمكن الحصول عليها من قواعد إيجاد حساب المشتقات . وبعض هذه القواعد هي :

$$d(c) = 0, \quad d(cu) = c\,du, \quad d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad d(\sin u) = \cos u\,du, \quad d(\ln u) = \frac{du}{u}, \quad \cdots \text{ إلخ}$$

مثـــال ٢ : أوجد dy لكل ما يلي :

(أ) $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5)\,dx$$

(ب)
$$y = (2x^3+5)^{3/2}$$
$$dy = \tfrac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2}\,d(2x^3+5) = \tfrac{3}{2}(2x^3+5)^{1/2}\cdot 6x^2\,dx = 9x^2(2x^3+5)^{1/2}\,dx$$

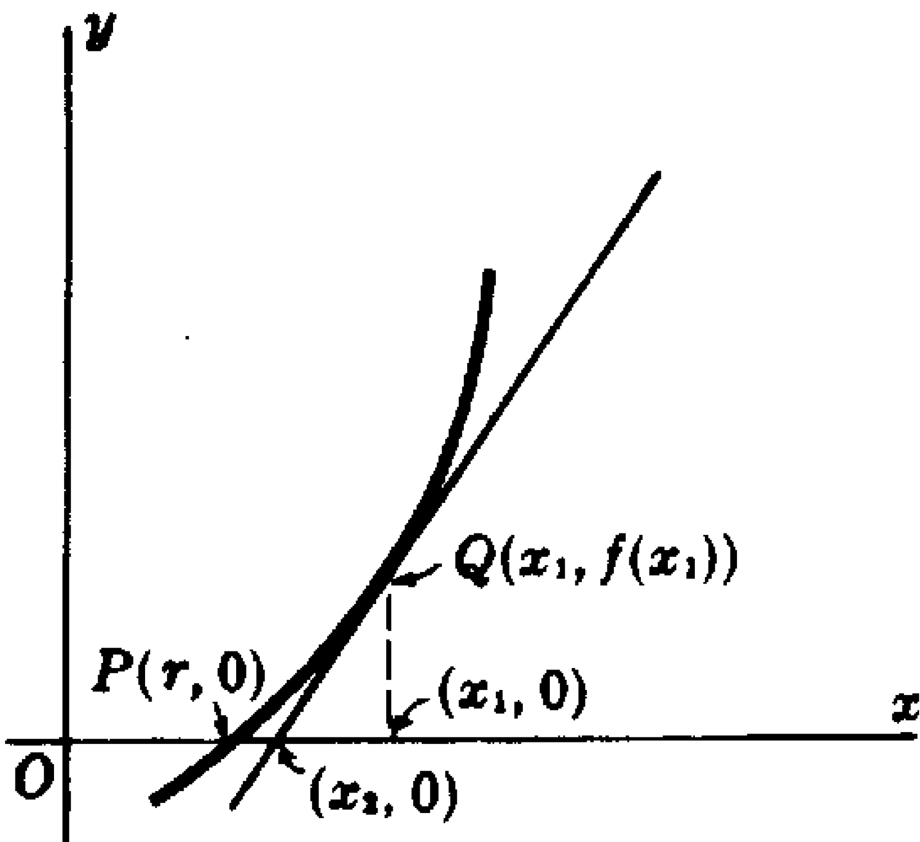
انظر المسائل ١ – ٥

التقريب بالتفاضل : إذا كان $dx = \Delta x$ صغيرا نسبيا إذا ما قورن بـ x فإن dy تقريب جيد ومناسب لـ Δy .

مثال ٣ :

ليكن $y = x^2 + x + 1$ وبفرض أن x تغير من $x = 2$ إلى $x = 2.01$ إذن التغير الحقيقى فى y هو $\Delta y = \{(2.01)^2 + 2.01 + 1\} - \{2^2 + 2 + 1\} = .0501.$ وللحصول على التغير التقريبى نأخذ $x=2$ و $dx=.01$ فنجد
$$dy = f'(x)\,dx = (2x+1)\,dx = \{2(2)+1\}\,.01 = .05.$$

انظر المسائل ٦ – ١٠



شكل ٢٣ — ٣

تقريب جذور المعادلات : ليكن $x = x_1$ تقريبا مناسبا للجذر r للمعادلة $y = f(x) = 0$ وليكن $f(x_1) = y_1 \neq 0$ أى أن y_1 لا تختلف عن الصفر ، إلا بمقدار طفيف ، فإذا تغيرت الآن x_1 إلى r فان التغير المقابل الذى يطرأ على $f_1(x)$ هو $\Delta y_1 = -y_1$ ونحصل على التقريب فى هذا التغير فى x_1 من $f'(x_1)\,dx_1 = -y_1$ أو $dx_1 = -\dfrac{y_1}{f'(x)_1}$ وبهذا نحصل على تقريب ثان أفضل للجذر r وهو :
$$x_2 = x_1 + dx_1 = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

والتقريب الثالث هو $x_3 = x_2 + dx_2 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$ ، وهكذا .

أما إذا كانت x_1 ليست تقريبا مناسبا تماما للجذر فإننا نجد أن x_2 تختلف اختلافا واضحا عن x_1 . ولكن على الرغم من أن هذه الطريقة تصحح نفسها أثناء إجرائها ، إلا أنه من المستحسن أن نختار تقريبا أولا جديدا .

انظر المسألتين ١١ – ١٢

مسائل محلولة

١ – أوجد dy لكل مما يلى :

(أ) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 3}.$

$$dy = \frac{(x^2+3)\cdot d(x^3+2x+1) - (x^3+2x+1)\cdot d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$
$$= \frac{(x^2+3)(3x^2+2)\,dx - (x^3+2x+1)(2x)\,dx}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}\,dx$$

(ب) $y = \cos^2 2x + \sin 3x.$

$$dy = 2\cos 2x\,d(\cos 2x) + d(\sin 3x) = 2\cos 2x(-2\sin 2x\,dx) + 3\cos 3x\,dx$$
$$= -4\sin 2x\cos 2x\,dx + 3\cos 3x\,dx = (-2\sin 4x + 3\cos 3x)\,dx$$

(جـ) $y = e^{3x} + \arcsin 2x.$ $\qquad dy = (3e^{3x} + 2/\sqrt{1-4x^2})\,dx$

اشتق كل من دوال المسائل ٢ – ٥ مستخدما التفاضلات لحصول على dy/dx .

٢ – $xy + x - 2y = 5.$

$d(xy) + d(x) - d(2y) = d(5).$
$x\,dy + y\,dx + dx - 2\,dy = 0$ أو $(x-2)\,dy + (y+1)\,dx = 0.$ ومنه $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+1}{x-2}.$

٣ – $x^3y^2 - 2x^2y + 3xy^2 - 8xy = 6.$

$$2x^3y\,dy + 3x^2y^2\,dx - 2x^2\,dy - 4xy\,dx + 6xy\,dy + 3y^2\,dx - 8x\,dy - 8y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3y^2 + 4xy - 3x^2y^2}{2x^3y - 2x^2 + 6xy - 8x}$$

٤ – $\dfrac{2x}{y} - \dfrac{3y}{x} = 8.$ و $2\left(\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) - 3\left(\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) = 0$ ومنه $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2y + 3y^2}{3xy^2 + 2x^3}$

٥ – $x = 3\cos\theta - \cos 3\theta,\quad y = 3\sin\theta - \sin 3\theta.$

$dx = (-3\sin\theta + 3\sin 3\theta)\,d\theta,\quad dy = (3\cos\theta - 3\cos 3\theta)\,d\theta,$ ومنه $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\theta - \cos 3\theta}{-\sin\theta + \sin 3\theta}$

٦ – استخدم التفاضلات لحساب قيمة تقريبية لـ (ا) $\sqrt[3]{124}$ (ب) $\sin 60^\circ\ 1'$.

(ا) عندما $y = x^{1/3},$ يكون $dy = \dfrac{1}{3x^{2/3}}\,dx.$ وبأخذ $x = 125 = 5^3$ و $dx = -1$. إذن
$dy = \dfrac{1}{3(125)^{2/3}}(-1) = \dfrac{-1}{75} = -0.0133$ ويكون بالتقريب $\sqrt[3]{124} = y + dy = 5 - 0.0133 = 4.9867.$

(ب) عندما $x = 60^\circ$ و $dx = 1' = 0.0003$ rad. يكون $y = \sin x = \sqrt{3}/2 = 0.866\ 03$
و $dy = \cos x\,dx = \frac{1}{2}(0.0003) = 0.000\ 15.$ وعندئذ يكون التقريب

$$\sin 60^\circ 1' = y + dy = 0.866\ 03 + 0.000\ 15 = 0.866\ 18.$$

٧ – احسب $\Delta y - dy$ و dy و Δy بفرض أن $dx = 0.5$ و $x = 2$ و $y = {}^1/_2\,x^2 + 3x$.

$$\Delta y = \{\tfrac{1}{2}(2.5)^2 + 3(2.5)\} - \{\tfrac{1}{2}(2)^2 + 3(2)\} = 2.625.$$
$$dy = (x+3)dx = (2+3)(0.5) = 2.5 \qquad \Delta y - dy = 2.625 - 2.5 = 0.125.$$

٨ – أوجد التغير التقريبي فى حجم مكعب طول ضلعه x cm الناتج عن زيادة أطوال أضلاعه بـ 1% .
إن $V = x^3$ و $dV = 3x^2\,dx$ و عندما يكون $dx = 0.01x$ فإن $dV = 3x^2(0.01x) = 0.03x^3$ cm^3

٩ – أوجد الكتلة التقريبية لأنبوبة من النحاس طولها 2 m وقطرها الداخلى 2.5 cm وسمكها 0.25 cm علما بأن كثافة النحاس 8800 kgm^{-3} .

نجد أولا التغير فى الحجم عندما يتغير نصف القطر ، $r = 1/80$ m بالمقدار ، $dr = 1/400$ m .

$$V = 2\pi r^2 \text{ and } dV = 4\pi r\,dr = 4\pi(1/80)(1/400) = \pi/8000\ \text{m}^3$$

والكتلة المطلوبة هى : $8800(\pi/8000) = 3{,}46$ kg

١٠ – لأية قيمة لـ x يمكن استخدام $\sqrt[5]{x}$ بدلا من $\sqrt[5]{x+1}$ إذا كان الخطأ المسموح به أقل من 0.001 ؟

عندما يكون $y = x^{1/5}$ و $dx = 1$ فإن $dy = \frac{1}{5}x^{-4/5}\,dx = \frac{1}{5}x^{-4/5}$.

وإذا كان $\frac{1}{5}x^{-4/5} < 10^{-3}$, فإن $x^{-4/5} < 5 \cdot 10^{-3}$ ومنه $x^{-4} < 5^5 \cdot 10^{-15}$.

وإذا كان $x^{-4} < 10 \cdot 5^5 \cdot 10^{-16}$, فإن $x^4 > \frac{10^{16}}{31\,250}$ ومنه $x > \frac{10^4}{\sqrt[4]{31\,250}} = 752.1.$

١١ – احسب بالتقريب الجذور الحقيقية لـ $x^3 + 2x - 5 = 0$ أو $x^3 = 5 - 2x.$

(ا) ارسم على نفس المحاور المنحنيان $y = x^3$ و $y = 5 - 2x$ إن الاحداثيات السينيه لنقط تقاطع المنحنيين هى جذور المعادلة المفروضة ويبدو من الرسم أن هناك جذرا واحدا قيمته التقريبية $x_1 = 1.3$.

(ب) والتقريب الثانى للجذر هو

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.3 - \frac{(1.3)^3 + 2(1.3) - 5}{3(1.3)^2 + 2} = 1.3 - \frac{-.203}{7.07} = 1.3 + .03 = 1.33$$

لقد تم إجراء القسمة بحيث نحصل على رقمين عشريين ، لأن هناك صفرا واحدا فقط يلى الفاصلة العشرية مباشرة . وهذا يتفق مع النظرية القائلة إنه إذا حدث أن حصلنا عند إجراء قسمة ما على k صفرا تلى الفاصلة العشرية مباشرة فى حاصل القسمة فإنه يمكن إجراء القسمة بحيث نحصل على $2k$ رقما عشريا .

(جـ) التقريبان الثالث والرابع هما

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.33 - \frac{(1.33)^3 + 2(1.33) - 5}{3(1.33)^2 + 2} = 1.33 - .0017 = 1.3283$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.3283 - .000\,031\,14 = 1.328\,268\,86$$

١٢ – أوجد القيم التقريبية لجذور المعادلة $2\cos x - x^2 = 0.$

(ا) إن المنحنيين $y = 2\cos x$ و $y = x^2$ يتقاطعان فى نقطتين واحداثيها السينى هما 1 و 1 — تقريبا . لاحظ أنه إذا كان r جذرا فإن r — هو الجذر الآخر .

(ب) بأخذ $x_1 = 1$ نجد $x_2 = 1 - \frac{2\cos 1 - 1}{-2\sin 1 - 2} = 1 + \frac{2(.5403) - 1}{2(.8415) + 2} = 1 + .02 = 1.02.$

(جـ) $x^3 = 1.02 - \frac{2\cos(1.02) - (1.02)^2}{-2\sin(1.02) - 2(1.02)} = 1.02 + \frac{.0064}{3.7442} = 1.02 + .0017 = 1.0217.$

وهكذا فإن الجذرين مقربين لأربعة أرقام عشرية هما 1.0217 ، 1.0217 — .

مسائل اضافية

١٣ – أوجد dy لكل من الدوال التالية :

(ا) $y = (5 - x)^3$: ج $-3(5 - x)^2\,dx$ (د) $y = \cos bx^2$: ج $-2bx \sin bx^2\,dx$

(ب) $y = e^{4x^2}$: ج $8xe^{4x^2}dx$ (هـ) $y = \arccos 2x$: ج $\frac{-2}{\sqrt{1 - 4x^2}}dx$

(جـ) $y = (\sin x)/x$: ج $\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx$ (و) $y = \ln \tan x$: ج $\frac{2\,dx}{\sin 2x}$

١٤ – أوجد dy/dx كما فى المسائل ٢ – ٥

(أ) $2xy^3 + 3x^2y = 1$ ج : $-\dfrac{2y(y^2+3x)}{3x(2y^2+x)}$ (ﺟ) $\arctan\dfrac{y}{x} = \ln(x^2+y^2)$ ج : $\dfrac{2x+y}{x-2y}$

(ب) $xy = \sin(x-y)$ ج : $\dfrac{\cos(x-y)-y}{\cos(x-y)+x}$ (د) $x^2\ln y + y^2\ln x = 2$ ج : $-\dfrac{(2x^2\ln y + y^2)y}{(2y^2\ln x + x^2)x}$

١٥ – استخدم التفاضلات لحساب القيم التقريبية لـ (أ) $\sqrt[4]{17}$, (ب) $\sqrt[5]{1020}$, (ﺟ) $\cos 59°$, (د) $\tan 44°$.

ج : (أ) 2.03125, (ب) 3.99688, (ﺟ) 0.5151, (د) 0.9651

١٦ – استخدم التفاضل لحساب القيمة التقريبية للتغير فى (أ) x^3 عندما تتغير x من 5 إلى 5.01 (ب) $1/x$ عندما تتغير x من 1 إلى 0.98 .

ج : (أ) 0.75 (ب) 0.02

١٧ – تتمدد صفيحة دائرية تحت تأثير الحرارة بحيث يزداد نصف القطر من 12.5 cm إلى 12.65 cm . أوجد الزيادة التقريبية فى المساحة . ج : $3{\cdot}75\pi = 11{\cdot}79\ \text{cm}^2$.

١٨ – يتقلص نصف قطر كرة من الثلج من 10 cm إلى 9.8 cm . احسب القيمة التقريبية للتناقص فى (أ) الحجم (ب) مساحة السطح . ج : (أ) $80\pi\ \text{cm}^3$ (ب) $16\pi\ \text{cm}^2$

١٩ – تعطى السرعة ($v\ \text{ms}^{-1}$) التى يكتسبها جسم يسقط طليقا مسافة قدرها h m بـ $v = \sqrt{19{\cdot}6h}$. أوجد الخطأ فى السرعة نتيجة لخطأ فى القياس قدره 0.15 m ، عندما كانت قيمة h المقاسة هى 30 m .

ج : $0.061\ \text{ms}^{-1}$.

٢٠ – إذا طار طيار دورة كاملة حول الكرة الأرضية على ارتفاع 2 km فوق خط الاستواء . كم تزيد المسافة التى يقطعها عن المسافة التى يقطعها رجل يتحرك على خط الاستواء ؟ ج : 12.6 km .

٢١ – إذا كان المطلوب قياس نصف قطر دائرة وحساب مساحتها. وإذا كان نصف القطر يمكن قياسه إلى 0.001 cm وكان الخطأ المسموح به فى حساب المساحة لا يتجاوز $0.1\ \text{cm}^3$ ، فأوجد أقصى نصف قطر يمكن استخدام هذه الطريقة معه .

ج : 16 cm تقريبا .

٢٢ – إذا كانت $pV = 20$ وقيست p فوجدت 5 ± 0.02 فأوجد V . ج : 4 ∓ 0.016

٢٣ – إذا كانت $F = 1/r^2$ وقيست F فوجدت 4 ± 0.05 فأوجد r . ج : 0.5 ∓ 0.003

٢٤ – أوجد التغير الذى يطرأ على المساحة الكلية لمخروط دائرى قائم عندما (أ) يبقى نصف القطر ثابتا بينما يتغير الارتفاع بمقدار طفيف (ب) يبقى الارتفاع ثابتا بينما يتغير نصف القطر بمقدار طفيف .

ج : (أ) $\dfrac{\pi r h\ dh}{\sqrt{r^2+h^2}}$, (ب) $\pi\left\{\dfrac{h^2+2r^2}{\sqrt{r^2+h^2}} + 2r\right\}dr$

٢٥ – أوجد بالتقريب إلى أربعة أرقام عشرية (أ) الجذر الحقيقى للمعادلة $x^3 + 3x + 1 = 0$, (ب) أصغر جذر للمعادلة $e^{-x} = \sin x$, (ﺟ) جذر المعادلة $x^2 + \ln x = 2$, (د) جذر المعادلة $x - \cos x = 0$.

ج : (أ) -0.3222 (ب) 0.5885 (ﺟ) 1.3141 (د) 0.7391

الفصل الرابع والعشرون

رسم المنحنيات

المنحنى الجبرى المستوى : هو منحنى يمكن أن تكتب معادلته بالشكل

$$ay^n + (bx+c)y^{n-1} + (dx^2+ex+f)y^{n-2} + \cdots u_n(x) = 0$$

حيث $u_n(x)$ كثير حدود فى x من الدرجة n . وفيما يلى مناقشة خواص المنحنيات الجبرية .

التماثل : يكون المنحنى متماثلا بالنسبة لـ :

(١) محور السينات إذا لم تتغير معادلته عندما نبدل y بـ $-y$.

(٢) محور الصادات إذا لم تتغير معادلته عندما نبدل x بـ $-x$.

(٣) نقطة الأصل إذا لم تتغير معادلته عندما نبدل x بـ $-x$ و y بـ $-y$ فى آن واحد .

(٤) المستقيم $y = x$ إذا لم تتغير معادلته عندما نبادل بين x و y .

التقاطع مع المحاور : نحصل على نقط التقاطع مع المحور x بأن نضع $y = 0$ فى المعادلة ثم نحل المعادلة بالنسبة لـ x.
ونحصل على نقط التقاطع مع المحور y بأن نضع $x = 0$ ونحل المعادلة بالنسبة لـ y .

الحيز : يعطى الحيز الأفقى بمدى x أى بفترة x التى يوجد فيها المنحنى . ويعطى الحيز الرأسى للمنحنى بمدى y .

ونقول عن نقطة (x_0 و y_0) إنها نقطة منعزلة بالنسبة للمنحنى إذا حقق احداثياها معادلة المنحنى فى الوقت الذى لاتتحقق فيه المعادلة باحداثيات النقط المجاورة لها .

نقط النهاية العظمى والصغرى : ونقط الانعطاف وجهة تقعر المنحنى . لقد تم مناقشة هذه النقط فى الفصل الثامن .

المستقيمات المقاربة : المستقيم المقارب لمنحنى لا نهائى فى الامتداد هو مستقيم يقترب وضعه فى النهاية ، من مستقيم قاطع للمنحنى عندما تذهب نقطتين من نقط تقاطعه مع المنحنى إلى اللانهاية .

ويكون للمنحنى ، الذى معادلته على الشكل المذكور أعلاه ، مستقيمات مقاربة رأسية إذا كان معامل أعلى قوة فى y عبارة عن دالة غير ثابتة فى x لها مضروب خطى (حقيقى) واحد أو أكثر . ويوافق كل مضروب منها مستقيم مقارب رأسى .

ويكون المنحنى ، الذى معادلته على الشكل $ax^n + (by+c)\,x^{n-1} + (dy^2+ey+f)x^{n-2} + \cdots = 0,$
مستقيمات مقاربة أفقية إذا كان معامل أعلى قوة فى x عبارة عن دالة غير ثابتة فى y ولها مضروب خطى (حقيقى) واحد أو أكثر . ويوافق كل مضروب منها مستقيم مقارب أفقى .

والحصول على معادلات المستقيمات المقاربة المائلة :

(١) نبدل y بـ $mx + b$ فى معادلة المنحنى ونرتب النتيجة على الشكل :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

(٢) نحل المعادلتين $a_0 = 0$ و $a_1 = 0$ آنيا بالنسبة لـ m و b .

(٣) لكل زوج من الحلول m و b نكتب معادلة المستقيم المقارب $y = mx + b$.

إذا صادف أن كانت $a_1 = 0$ مستقلة عن قيمة b فإنه ينبغى استخدام المعادلتين $a_0 = 0$ و $a_2 = 0$ فى الخطوة (٣) .

النقط المفردة : النقطة المفردة لمنحنى جبرى هى النقطة التى يكون عندها قيمة dy/dx غير محددة من النمط $0/0$.

ولتعيين مواضع النقط المفردة لمنحنى فإنه يجب الحصول على $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ دون إجراء أى اختصار لأى عوامل مشتركة ، ثم نوجد الجذور المشتركة للمعادلتين $g(x) = 0$ و $h(x) = 0$.

وإذا كانت (x_0, y_0) نقطة مفردة لمنحنى ، فإنه يمكن تبسيط أية دراسة إضافية للمنحنى بإجراء التعويض $x = x' + x_0$ ، $y = y' + y_0$ حيث تصبح النقطة المفردة هى النقطة (0,0) فى الإحداثيات الجديدة .

النقط المفردة عند نقطة الأصل : عندما تقع نقطة الأصل على منحنى فإنه يمكن وضع معادلة هذا المنحنى بالشكل .

$$(a_1x + b_1y) + (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + (a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + \cdots = 0$$

فإذا كان $a_1 = b_1 = 0$ فإن نقطة الأصل هى نقطة مفردة للمنحنى .

وإذا كان $a_1 = b_1 = 0$ ولكن لم تكن جميع a_2, b_2, c_2 أصفارا فإننا نسمى النقطة المفردة نقطة ثنائية .

أما إذا كان $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$ ولكن لم تكن جميع a_3, b_3, c_3, d_3 أصفارا فإننا نسمى النقطة المنفردة نقطة ثلاثية وهكذا .

تصنيف النقطة الثنائية عند نقطة الأصل :

(ا) الحالة : $c_2 \neq 0$.

(١) نضع mx بدلا من y فى الحدود $a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2$ فنحصل على $(c_2m^2 + b_2m + a_2)x^2$.

(٢) نحل المعادلة $c_2m^2 + b_2m + a_2 = 0$ بالنسبة لـ m .

إذا كان الجذران m_1, m_2 حقيقيين ومختلفين فإن للمنحنى مماسين مختلفين $y = m_1x$ و $y = m_2x$ عند نقطة الأصل والنقطة الثنائية فى هذه الحالة عقدة .

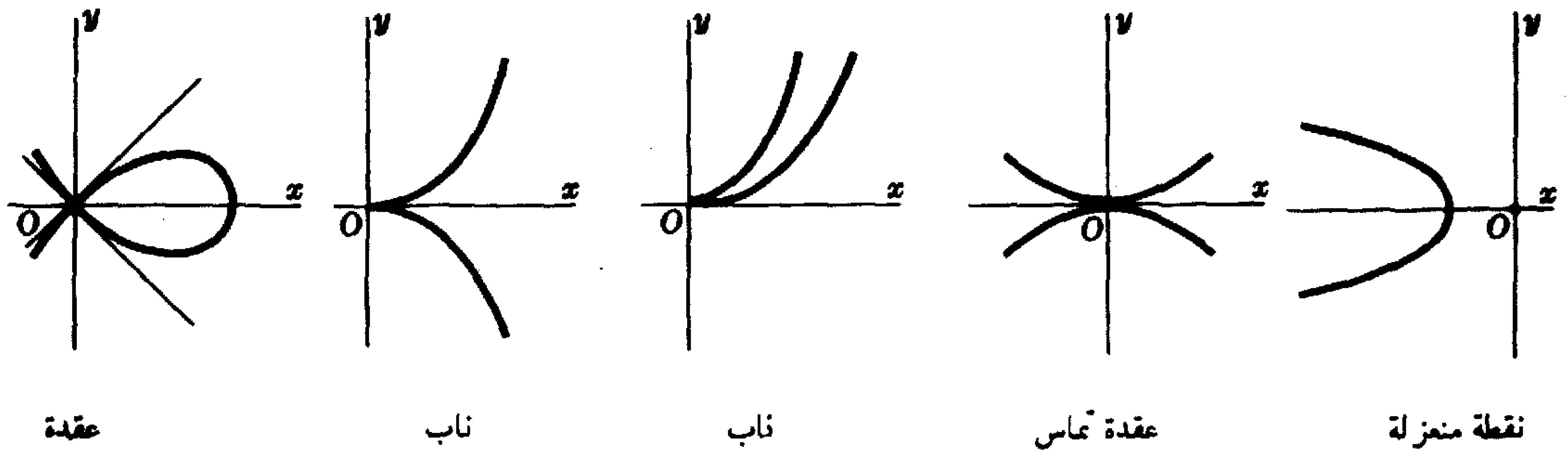
وإذا كان الجذران حقيقيين ومتساويين فعندئذ يكون للمنحنى « بوجه عام » مماس واحد عند نقطة الأصل وتسمى النقطة الثنائية :

(ا) ناب المنحنى إذا لم يستمر المنحنى مارا بنقطة الأصل .

(ب) عقدة تماس إذا استمر المنحنى مارا بنقطة الأصل .

وقد تكون نقطة الأصل فى حالات استثنائية نقطة منعزلة .

وإذا كانت الجذور تخيلية فإن نقطة الأصل نقطة منعزلة ثنائية .



شكل ٢٤ — ١

(ب) الحالة : $c_2 = 0, a_2 \neq 0$.

نضع ny بدلا من x فى الحدود $a_2x^2 + b_2xy$ ونجرى الخطوات كما فى (١) .

(جـ) الحالة : $a_2 = c_2 = 0, b_2 \neq 0$.

نقطة الأصل عقدة والماسان هناك هما المحوران الاحداثيان .

مســـــائل محـــــلولة

المستقيمات المقاربة :

١ — أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $y^2(1+x) = x^2(1-x)$.

إن معامل أعلى قوة لـ y هو $(1 + x)$ ولذلك فالمستقيم $x + 1 = 0$ خط مقارب رأسى . وحيث أن معامل أعلى قوة لـ x ثابت فإنه لا يوجد خطوط مقاربة أفقية .

وللحصول على المستقيمات المقاربة المائلة نضع $mx + b$ بدلا من y فنحصل على

$$(m^2+1)x^3 + (m^2+2mb-1)x^2 + b(b+2m)x + b^2 = 0 \qquad (١)$$

وحل المعادلتين الناتجتين عن مساواة كل من معامل أعلى قوتين لـ x بالصفر ، آنيا

$$m^2 + 2mb - 1 = 0 \quad , \quad m^2 + 1 = 0$$

تخيلى وبالتالى ليس هنالك مستقيمات مقاربة مائلة (انظر الشكل ٢٤ – ٢) .

٢ — أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$

ليس هنالك خطوط مقاربة رأسية أو أفقية لأن معاملات أعلى قوة لكل من x و y ثابت . وللحصول على المستقيمات المقاربة المائلة فإننا نضع $mx + b$ بدلا من y فنحصل على :

$$(m^3+1)x^3 + 3(m^2b-2)x^2 + 3mb^2x + b^3 = 0 \qquad (١)$$

وبحل المعادلتين $m^3 + 1 = 0$ و $m^2b - 2 = 0$ آنيا فنجد أن $b = 2$ ، $m = -1$ إذن معادلة المستقيم المقارب هى $y = -x + 2$.

وإذا عوضنا بالقيم $m = -1$ و $b = 2$ فى المعادلة (١) فإن المعادلة تأخذ الشكل $-12x + 8 = 0$ فهنالك إذن نقطة تقاطع جديدة للمنحنى مع خطه المقارب احداثيها السينى $x = 2/3$. (انظر الشكل ٢٤ – ٣)

٣ ـ أوجد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $y^2(x-1)-x^3 = 0$

حيث أن معامل أعلى قوة لـ y هو $(x-1)$ إذن فالمستقيم $x-1=0$ مستقيم مقارب رأسى ولا يوجد مستقيمات مقاربة أفقية .

والحصول على المستقيمات المقاربة المائلة نضع $mx+b$ بدلا من y فنحصل على :

$$(m^2-1)x^3 + m(2b-m)x^2 + b(b-2m)x - b^2 = 0$$

وبحل المعادلتين $m^2-1=0$ و $m(2b-m)=0$ آنيا فإننا نجد $m=-1$ و $b=-1/2$ ، $m=1, b=1/2$.

إذن معادلتى المستقيمين المقاربين هما $y=x+1/2$ و $y=-x-1/2$.

ويقطع المستقيم المقارب $y=x+1/2$ المنحنى فى نقطة محددة واحداثيها السينى يعطى بـ $x-1/4=0$ $(2-1/2)$ $1/2$

أى أن $x=-1/3$. والاحداثى السينى لنقطة التقاطع المحددة للمنحنى مع المستقيم المقارب $y=-x-1/2$.

هو أيضا $-1/3$ (انظر الشكل ٢٤ ـ ٤)

النقط المفردة :

٤ ـ ابحث فى النقط المفردة للمنحنى $y^2(1+x) = x^2(1-x)$,

إن حدود الدرجة الأدنى هى من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن $c_2 \neq 0$ أى أن حد y^2 موجود وبوضع mx بدلا من y فى الحدين $y^2 - x^2$ ومساواة معامل x^2 بالصفر نحصل على $m^2-1=0$ إذن $m=\pm 1$ والمستقيمان $y=-x$ و $y=x$ مماسان للمنحنى عند نقطة الأصل ، ونقط الأصل هى عقدة .

(انظر الشكل ٢٤ ـ ٢)

٥ ـ ابحث فى النقط الشاذة للمنحنى $x^3+y^3-6x^2 = 0$.

إن حدود الدرجة الأدنى هى من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية .

وبما أن $c_2 = 0$ وبوضع ny بدلا من x فى حدود الدرجة الأدنى ومساواة معامل y^2 بالصفر فنحصل على $n^2 = 0$. لذلك فإنه يوجد مماس وحيد $x=0$ للمنحنى عند نقطة الأصل .

ونقطة الأصل هى نقطة ناب للمنحنى لأنه إذا وضعنا $y=\varepsilon$, فإن للمعادلة $x^3-6x^2-\varepsilon^3 = 0$ استنادا إلى قاعدة ديكارت فى الإشارات ، جذرا موجبا واحدا وجذرين تخيليين وبالتالى فإن المنحنى لا يستمر مارا بنقطة الأصل .

(انظر الشكل ٢٤ ـ ٣) .

٦ ـ ابحث فى النقط المفردة للمنحنى $y^2(x-1)-x^3 = 0$.

إن حدود الدرجة الأدنى هى من الدرجة الثانية إذن فنقطة الأصل نقطة ثنائية .

وبما أن $c_2 \neq 0$ وبوضع mx بدلا من y فى حدود الدرجة الأدنى ثم مساواة معامل x^2 بالصفر فنحصل على $m^2 = 0$

ونقطة الأصل قة للمنحنى لأن y معرفة عندما $x<0$ وتخيلية عندما $0<x<1$. (انظر الشكل ٢٤ ـ ٤)

٧ ـ ابحث (أ) فى النقط الشاذة (ب) فى المستقيمات المقاربة للمنحنى $y^2(x^2-4) = x^4$

(أ) إن نقطة الأصل نقطة ثنائية . وبما أن $a_2=b_2=0$ و $c_2 \neq 0$ فإن النتيجة التى نحصل عليها من وضع $y=mx$ والمساواة بالصفر هى $m^2=0$. ونقطة الأصل التى نحصل عليها نقطة ثنائية منعزلة لأن y تخيلية عندما يكون x قريبة من 0 .

(ب) المستقيمان $x=2$ و $x=-2$ خطان مقاربان رأسيان .

والحصول على المستقيمات المقاربة المائلة نضع $mx+b$ بدلا من y فنحصل على :

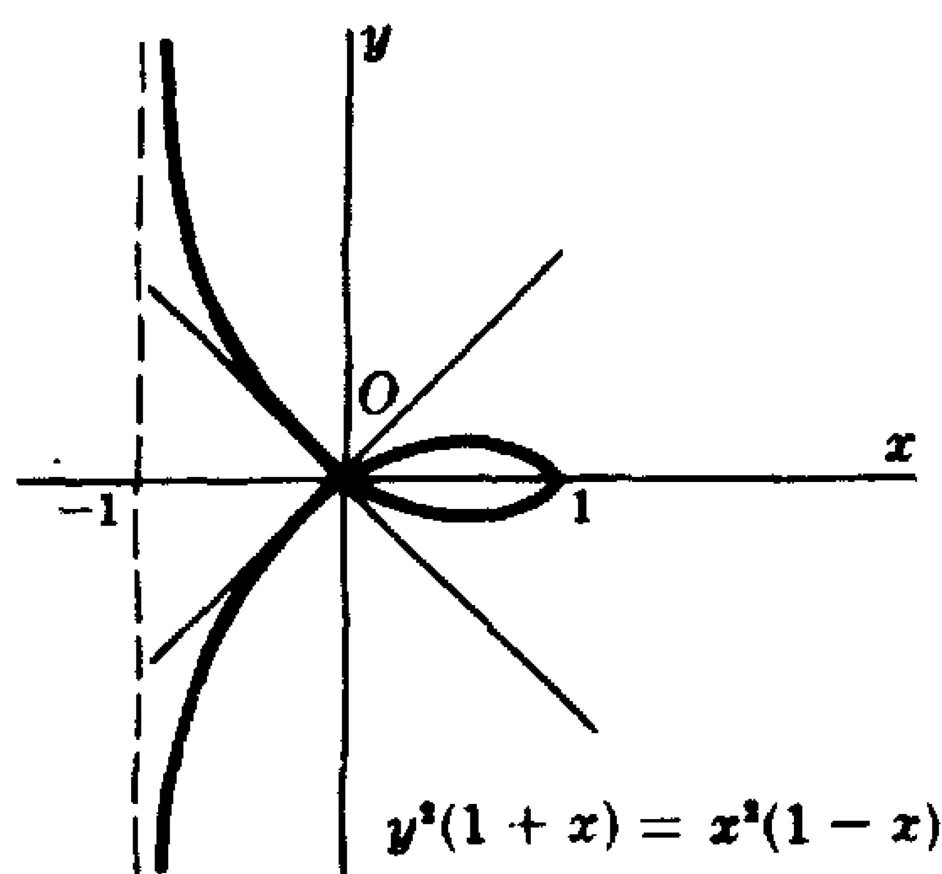
$$(m^2-1)x^4 + 2mbx^3 + (b^2-4m^2)x^2 - 8mbx - 4b^2 = 0$$

وبحل المعادلتين $m^2 - 1 = 0$ و $mb = 0$ آنيا نجد $b = 0$ ؛ $m = 1$ و $b = 0$ ؛ $m = -1$ ومعادلتى الخطين المقاربين هما $y = x$ و $y = -x$.

والخطين المقاربين يقطعان المنحنى عند نقطة الأصل . (انظر الشكل ٢٥ – ٥) .

رسم المنحنيات :

٨ – ادرس المنحنى $y^2(1+x) = x^2(1-x)$. وارسمه .



شكل ٢٤ ـــ ٢

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة لمحور السينات .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحور السينى x فى $x = 0$ و $x = 1$ ويقطع المحور الصادى فى $y = 0$.

الحيز : إن المنحنى موجود فى الفترة $-1 < x \leqq 1$ ـــ ولجميع قيم y .

القيم العظمى والصغرى الخ : يتكون المنحنى من فرعين هما

$y = \dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ و $y = -\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$. وللفرع الأول يكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x-x^2}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}} \quad \text{و} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x-2}{(1+x)^{5/2}(1-x)^{3/2}}$$

والقيم الحرجة هى $x = 1$ و $x = (-1+\sqrt{5})/2$ والنقطة $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ نقطة نهاية عظمى . ولا يوجد نقطة انعطاف والفرع مقعر لأسفل .

ويوجد ، بالتماثل ، نقطة نهاية صغرى عند $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ والفرع الثانى مقعر لأعلى .

الخطوط المقاربة : من المسألة (١) نجد أن المستقيم $x = -1$ هو مستقيم مقارب .

النقط المفردة : من المسألة ٤ نجد أن نقطة الأصل هى عقدة وأنه يوجد مماسان (النقطة الثنائية أو نقطة العقدة) هما $y = x$ و $y = -x$.

٩ – ادرس المنحنى $y^3 - x^2(6-x) = 0$. وارسمه . (انظر الشكل ٢٤ - ٣) .

التماثل : لا يوجد تماثل .

التقاطع مع المحاور : نقطة التقاطع هى $y = 0$ و $x = 6$ و $x = 0$.

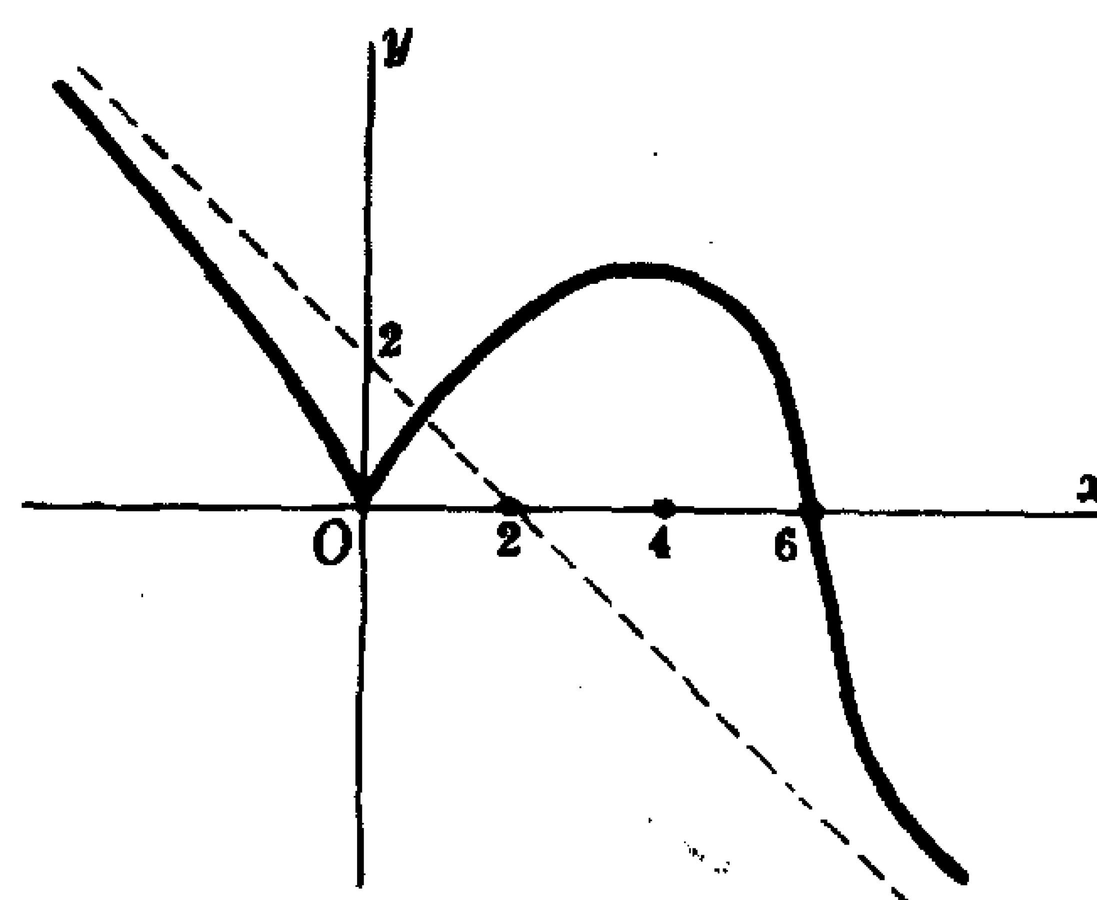
الحيز : المنحنى معرف وموجود لجميع قيم x و y .

القيم العظمى والصغرى الخ : إن $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ و $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$.

والقيم الحرجة هى $x = 0, 4, 6$ والنقطة $(0,0)$ نقطة نهاية صغرى والنقطة $(4, 2\sqrt[3]{4})$ نقطة نهاية عظمى ، والنقطة $(6, 0)$ نقطة انعطاف والمنحنى مقعر لأسفل إلى اليسار ومقعر لأعلى إلى اليمين .

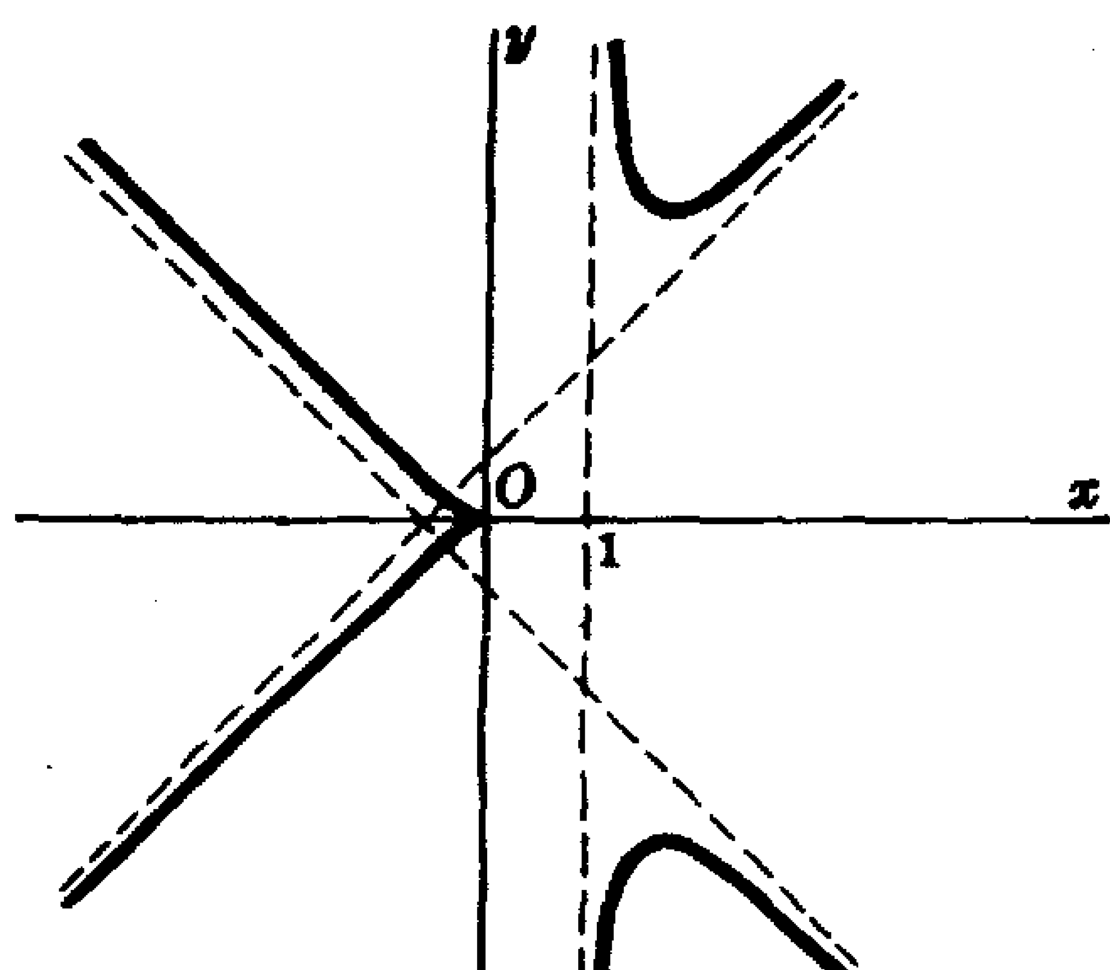
المستقيمات المقاربة : من المسألة (٢) نجد أن $y = -x + 2$ هو خط مقارب .

النقطة المفردة : من المسألة (٥) نجد أن نقطة الأصل نقطة قمة للمنحنى والمماس عندها هو المحور الصادى .



$x^3+y^3-6x^2=0$

شكل ٢٤ — ٣



$y^2(x-1)-x^3=0$

شكل ٢٤ — ٤

١٠ – ادرس المنحنى $y^2(x-1)-x^3=0$. وارسمه . (انظر الشكل ٢٤ – ٤) .

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة للمحور السيني .

التقاطع مع المحاور : نقطة التقاطع مع المحاور هي $x=0$ و $y=0$.

الحيز : المنحنى موجود في الفترتين $-\infty < x \le 0$ و $x>1$ ولجميع قيم y .

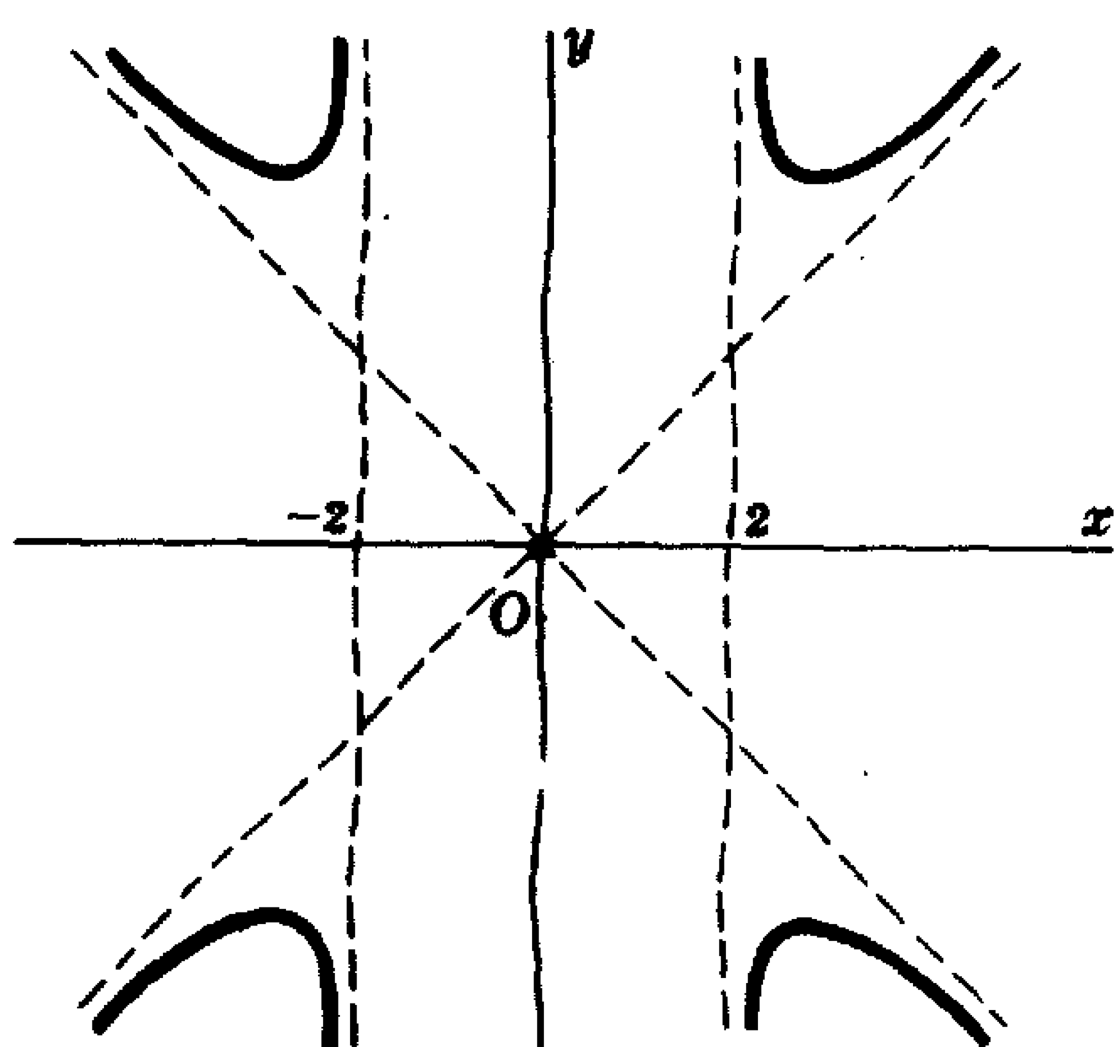
القيم العظمى والصغرى الخ : إذا أخذنا الفرع $y = x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$,

نجد $\frac{dy}{dx}=\frac{(2x-3)x^{1/2}}{2(x-1)^{3/2}}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{4x^{1/2}(x-1)^{5/2}}$

والقيم الحرجة هي $x=0, 3/2$ والنقطة ($3\sqrt{3}/2$ و $3/2$) نقطة نهاية صغرى . ولا يوجد نقطة انعطاف والفرع مقعر لأعلى . ومن التماثل يكون للفرع $y=-x\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ نقطة نهاية عظمى هي $-3\sqrt{3}/2$ و $3/2$ والمنحنى مقعر لأسفل .

الخطوط المقاربة : من المسألة (٣) نجد أن المستقيمات $y=-x-1/2$ و $y=x+1/2$ و $x=1$ هي مستقيمات مقاربة .

النقط المفردة : من المسألة (٦) نجد أن نقطة الأصل هي نقطة ناب للمنحنى والمستقيم $y=0$ هو المماس للمنحنى عندها .



$y^2(x^2-4)=x^4$

شكل ٢٤ — ٥

١١ – ادرس المنحنى $y^2(x^2-4)=x^4$. وارسمه .

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة لمحوري الاحداثيات وبالنسبة لنقطة الأصل .

التقاطع مع المحاور إن المنحنى يقطع المحورين في : $x=0$ و $y=0$.

الحيز : المنحنى موجود في الفترة $-\infty<x<-2$ و $2<x<+\infty$ وفي الفترتين $-\infty<y\le-4$ و $4\le y<+\infty$

والنقطة $(0,0)$ نقطة منعزلة .

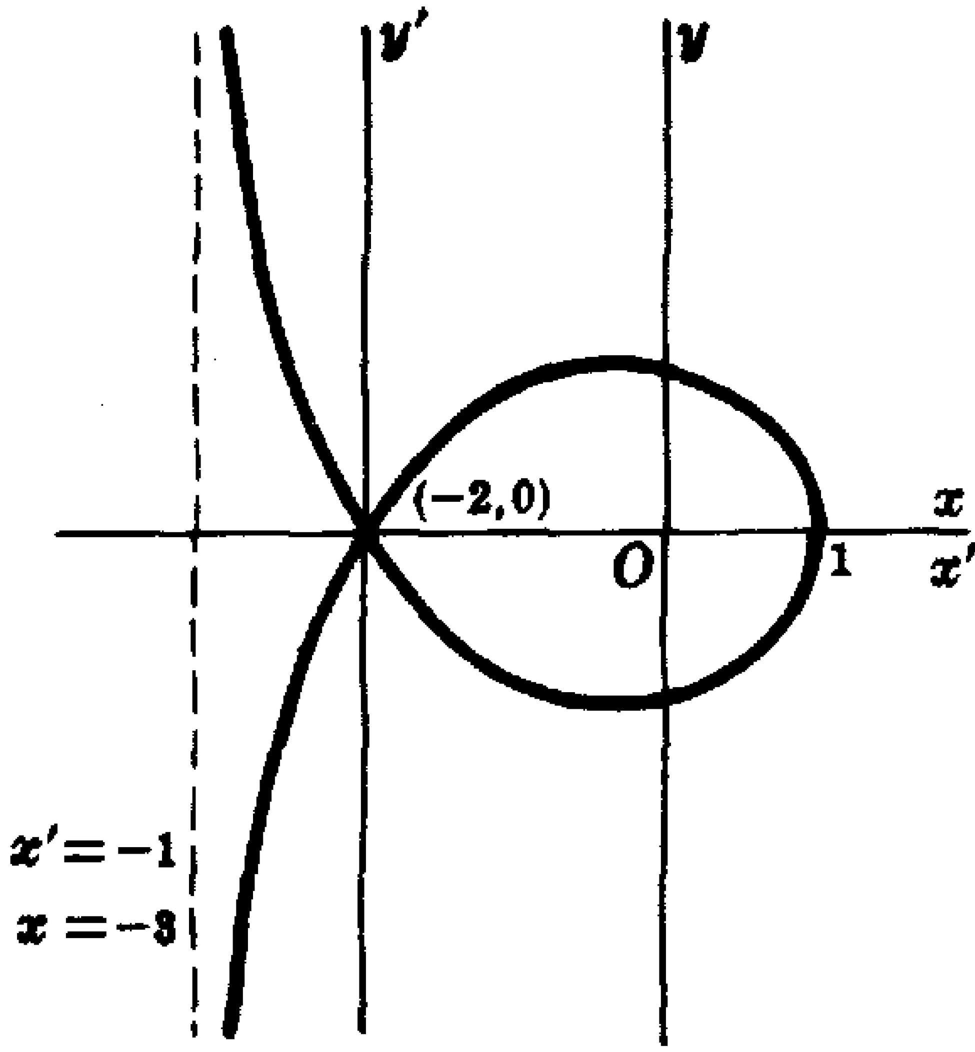
القيم العظمى والصغرى الخ : بالنسبة للجزء

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}},\ x>2,$$

نجد أن : $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2 - 4)^{3/2}}$ و $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x^2 + 32}{(x^2 - 4)^{5/2}}$

والقيمة الحرجة هى $x = 2\sqrt{2}$ والمنحنى مقعر لأعلى فى هذا الجزء والنقطة $(4 , 2\sqrt{2})$ نقطة نهاية صغرى ، ومن التماثل نجد أن النقطة $(-2\sqrt{2},4)$ هى نقطة نهاية صغرى وأن $(-4 , 2\sqrt{2})$ و $(-4 , -2\sqrt{2})$ نقطتا نهاية عظمى .

المستقيمات المقاربة : النقط المفردة . (انظر المسألة ٧)



$(x + 3)(x^2 + y^2) = 4$

شكل ٢٤ — ٦

١٢ — ادرس المنحنى $(x + 3)(x^2 + y^2) = 4$. وارسمه .

قبل دراسة هذا المنحنى سنعين أولا موضع النقطة المفردة إن وجدت ثم ننقل المحاور إلى هذه النقطة باعتبارها نقطة أصل جديدة .

إن $\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+2)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+3)^2 y}$ ومنه نرى أن عندما $y = 0$ و $x = -2$ يكون dy / dx صيغة غير محددة من النمط $0/0$ والنقطة $(-2, 0)$ نقطة مفردة .

وإذا أجرينا التحويل $y = y'$ و $x = x' - 2$.

فإن معادلة المنحنى تأخذ الشكل $y'^2(x' + 1) + x'^3 - 3x'^2 = 0$.

التماثل : إن المنحنى متماثل بالنسبة للمحور x' .

التقاطع مع المحاور : إن المنحنى يقطع المحاور الاحداثية فى : $y' = 0$ و $x' = 0, x' = 3$.

الحيز : إن المنحنى معرف فى الفترة $-1 < x' \leqq 3$ ولجميع قيم y' .

القيم العظمى والصغرى : الخ : بالنسبة للفرع $y' = \frac{x'\sqrt{3 - x'}}{\sqrt{x' + 1}}$

نجد أن : $\frac{dy'}{dx'} = \frac{3 - x'^2}{(3 - x')^{1/2}(x' + 1)^{3/2}}$ و $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{-12}{(3 - x')^{3/2}(x' + 1)^{5/2}}$

والقيم الحرجة هى $x' = \sqrt{3}\,;\,3$ والنقطة $\left(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3} - 9}\right)$ نقطة نهاية عظمى والفرع مقعر لأسفل .

ومن التماثل نجد أن النقطة $\left(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3} - 9}\right)$ هى نقطة نهاية صغرى وأن الفرع الآخر مقعر لأعلى .

المستقيمات المقاربة : إن المستقيم $x' = -1$ مستقيم مقارب رأسى . وللبحث عن المستقيمات المقاربة المائلة نضع $mx' + b$ بدلا من y' فنحصل على المعادلة $(m^2 + 1)x'^3 + \cdots = 0$. ولا يوجد خطوط مقاربة مائلة . لماذا ؟

النقط المفردة : إن نقطة الأصل نقطة ثنائية . وإذا عوضنا بـ mx' بدلا من y' فى حدود الدرجة الأدنى $y'^2 - 3x'^2$ نجد أن $(m^2 - 2)x'^2$ ومن المعادلة $m^2 - 3 = 0$ نجد $m = \pm\sqrt{3}$ والمماسان (عند العقدة) هما $y' = \pm\sqrt{3}x'$ وبالعودة إلى الاحداثيات الأصلية نجد أن $\left(\sqrt{3} - 2, \sqrt{6\sqrt{3} - 9}\right)$ نقطة نهاية عظمى وأن $\left(\sqrt{3} - 2, -\sqrt{6\sqrt{3} - 9}\right)$ نقطة نهاية صغرى . وأن المستقيم $x = -3$ مستقيم مقارب رأسى والنقطة $(-2, 0)$ عقدة وإن معادلتى المماسين (عند العقدة) هما $y = \pm\sqrt{3}\,(x + 2)$.

مسائل اضافية

ادرس كلا من المنحنيات التالية وارسمه :

١٣ - $(x-2)(x-6)y = 2x^2$

١٤ - $x(3-x^2)y = 1$

١٥ - $(1-x^2)y = x^4$

١٦ - $xy = (x^2-9)^2$

١٧ - $2xy = (x^2-1)^3$

١٨ - $x(x^2-4)y = x^2-6$

١٩ - $y^2 = x(x^2-4)$

٢٠ - $y^2 = (x^2-1)(x^2-4)$

٢١ - $xy^2 = x^2+3x+2$

٢٢ - $(x^2-2x-3)y^2 = 2x+3$

٢٣ - $x(x-1)y = x^2-4$

٢٤ - $(x+1)(x+4)^2y^2 = x(x^2-4)$

٢٥ - $y^2 = 4x^2(4-x^2)$

٢٦ - $y^2 = 5x^4+4x^5$

٢٧ - $y^3 = x^2(8-x^2)$

٢٨ - $y^3 = x^2(3-x)$

٢٩ - $(x^2-1)y^3 = x^2$

٣٠ - $(x-3)y^3 = x^4$

٣١ - $(x-6)y^2 = x^2(x-4)$

٣٢ - $(x^2-16)y^2 = x^3(x-2)$

٣٣ - $(x^2+y^2)^2 = 8xy$

٣٤ - $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$

٣٥ - $y^4-4xy^2 = x^4$

٣٦ - $(x^2+y^2)^3 = 4xy(x^2-y^2)$

٣٧ - $y^2 = x(x-3)^2$

٣٨ - $y^2 = x(x-2)^3$

٣٩ - $3y^4 = x(x^2-9)^3$

٤٠ - $x^3y^3 = (x-3)^2$

الفصل الخامس والعشرون

الصيغ الأساسية للتكامل

اذا كانت $F(x)$ **دالة** مشتقتها فى فترة معينة من المحور السينى هى $F'(x) = f(x)$ فإننا ندعو $F(x)$ مضاد المشتقة أو التكامل غير المحدود لـ $f(x)$. والتكامل غير المحدود لدالة مفروضة ليس وحيداً . فعلى سبيل المثـال . الدوال x^2, x^2+5, x^2-4 هى تكاملات غير محددة لـ $f(x) = 2x$ لأن $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2+5) = \frac{d}{dx}(x^2-4) = 2x$. على ذلك فإن جميع التكاملات غير المحددة لـ $f(x) = 2x$ متضمنة فى $x^2 + C$ حيث C الذى نسميه ثابت التكامل ، هو أى ثابت اختيارى .

ويستعمل الرمز $\int f(x)\,dx$ للإشارة إلى أن المطلوب هو التكامل غير المحدود لـ $f(x)$ وهكذا نكتب

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

الصيغ الأساسية للتكامل : إن عددا من الصيغ الواردة أدناه تنتج مباشرة من صيغ الاشتقاق القياسية الواردة فى الفصول السابقة . ويمكننا ، على سبيل المثال ، أن نتحقق من الصيغة ٢٥ على النحو التالى :

$$\frac{d}{du}\left\{\tfrac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{u}{a} + C\right\} = \sqrt{a^2-u^2}$$

وقد تظهر إشارة القيمة المطلقة فى بعض الصيغ ، فعلى سبيل المثال نكتب :

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

بدلا من

• (أ) $u > 0$ ، $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ • (ب) $u < 0$ ، $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C$

وتكتب

١٠ - $\int \tan u\,du = \ln \sec u + C,$

بدلا من

١٠ (أ) $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$ لجميع قيم u التى تحقق العلاقة $u \geqq 1$.

١٠ (ب) $\int \tan u\,du = \ln(-\sec u) + C,$ لجميع قيم u التى تحقق العلاقة $u \leq -1$.

١ – $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C$

٢ – $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$

٣ – $\int au\,dx = a\int u\,dx,$ حيث a ثابت

٤ – $\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$

٥ – $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

٦ – $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a>0,\ a\neq 1$

٧ – $\int e^u\,du = e^u + C$

٨ – $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

٩ – $\int \cos u\,du = \sin u + C$

١٠ – $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

١١ – $\int \cot u\,du = \ln|\sin u| + C$

١٢ – $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

١٣ – $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

١٤ – $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

١٥ – $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

١٦ – $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

١٧ – $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

١٨ – $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

١٩ – $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

٢٠ – $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{u}{a} + C$

٢١ – $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

٢٢ – $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

٢٣ – $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

٢٤ – $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

٢٥ – $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\arcsin\frac{u}{a} + C$

٢٦ – $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

٢٧ – $\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

مسائل محلولة

١ – $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

٢ – $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

٣ – $\int \sqrt[3]{z}\,dz = \int z^{1/3}\,dz = \frac{z^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}z^{4/3} + C$

٤ – $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-2/3}\,dx = \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = 3x^{1/3} + C$

٥ – $\int (2x^2-5x+3)\,dx = 2\int x^2\,dx - 5\int x\,dx + 3\int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

٦ – $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx = \int x^{1/2}\,dx - \int x^{3/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

٧ – $\int (3s+4)^2\,ds = \int (9s^2+24s+16)\,ds = 9(\frac{1}{3}s^3) + 24(\frac{1}{2}s^2) + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$

٨ – $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int (x+5-4x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + C$

٩ – احسب : (أ) $\int (x^3+2)^2\cdot 3x^2\,dx$، (ب) $\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx$، (ج) $\int \frac{8x^2\,dx}{(x^3+2)^3}$، (د) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(x^3+2)}}$.

ضع $u = x^3+2$ فيكون $du = 3x^2dx$.

(أ) $\int (x^3+2)^2 \cdot 3x^2\,dx = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + C$

(ب) $\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{1/2}\cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+2)^{3/2} + C$

(جـ) $\int \frac{8x^2\,dx}{(x^3+2)^3} = 8\cdot\frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-3}\,3x^2\,dx = \frac{8}{3}\int u^{-3}\,du = -\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}u^{-2}\right) + C = -\frac{4}{3(x^3+2)^2} + C$

(د) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int u^{-1/4}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}u^{3/4} + C = \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$

١٠ - احسب $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx.$ ضع $1-2x^2 = u$ فيكون $du = -4x\,dx$.

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = 3\left(-\frac{1}{4}\right)\int (1-2x^2)^{1/2}(-4x\,dx) = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}\,du$$
$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = -\frac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2} + C$$

١١ - احسب $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x)^{1/3}}.$ ضع $x^2+6x = u$ فيكون $du = (2x+6)dx$.

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x)^{1/3}} = \frac{1}{2}\int (x^2+6x)^{-1/3}(2x+6)\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u^{2/3} + C = \frac{3}{4}(x^2+6x)^{2/3} + C$$

١٢ - $\int \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/3}(-2x\,dx) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)^{4/3} + C = -\frac{3}{8}(1-x^2)^{4/3} + C$

١٣ - $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx = \int (1-2x^2)^{1/2}x\,dx = -\frac{1}{4}\int (1-2x^2)^{1/2}(-4x\,dx)$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1-2x^2)^{3/2} + C = -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2} + C$$

١٤ - $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}}dx = \int (x^{-1/2}+2x^{1/2}+x^{3/2})\,dx = 2x^{1/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

١٥ - $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}dx = \int \left\{1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx = x + \frac{1}{x+1} + C' = \frac{x^2}{x+1} + 1 + C' = \frac{x^2}{x+1} + C$

الصيغ ٥ — ٧

١٦ - $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

١٧ - $\int \frac{dx}{x+2} = \int \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln|x+2| + C$

١٨ - $\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C,$ حيث $u = 2x-3$ و $du = 2dx$ أو

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$$

١٩ - $\int \frac{x\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln c = \ln c\sqrt{|x^2-1|}$

٢٠ - $\int \frac{x^2\,dx}{1-2x^3} = -\frac{1}{6}\int \frac{-6x^2\,dx}{1-2x^3} = -\frac{1}{6}\ln|1-2x^3| + C = \ln\frac{c}{\sqrt[6]{|1-2x^3|}}$

٢١ - $\int \frac{x+2}{x+1}dx = \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = x + \ln|x+1| + C$

٢٢ - $\int e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}(-dx) = -e^{-x} + C$

٢٤ $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}(3\,dx) = \frac{e^{3x}}{3} + C$

٢٣ - $\int a^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int a^{2x}(2\,dx) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^{2x}}{\ln a}\right) + C$

٢٥ $\int \frac{e^{1/x}\,dx}{x^2} = -\int e^{1/x}\left(-\frac{dx}{x^2}\right) = -e^{1/x} + C$

٢٦ $\int (e^x+1)^3 e^x\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(e^x+1)^4}{4} + C$ حيث $u = e^x + 1$ و $du = e^x dx$ أو

$$\int (e^x+1)^3 e^x\,dx = \int (e^x+1)^3\,d(e^x+1) = \frac{(e^x+1)^4}{4} + C$$

٢٧ $\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\int \frac{-e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C = \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C$
$= x - \ln(1+e^x) + C$

ولسنا فى حاجة إلى تحديد إشارة القيمة المطلقة لأن $1 + e^{-x} > 0$ مهما كانت قيمة x .

الصيغ ٨ — ١٧

٢٨ – $\int \sin\tfrac{1}{2}x\,dx = 2\int \sin\tfrac{1}{2}x\cdot\tfrac{1}{2}dx = -2\cos\tfrac{1}{2}x + C$

٢٩ – $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x\cdot 3\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

٣٠ – $\int \sin^2 x\cos x\,dx = \int \sin^2 x\,(\cos x\,dx) = \int \sin^2 x\,d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

٣١ – $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

٣٢ – $\int \tan 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \tan 2x\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\ln|\sec 2x| + C$

٣٣ – $\int x\cot x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \cot x^2\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\ln|\sin x^2| + C$

٣٤ – $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx = \frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{\sec x+\tan x}dx = \ln|\sec x+\tan x| + C$

٣٥ – $\int \sec\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \sec x^{1/2}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}dx = 2\ln|\sec\sqrt{x}+\tan\sqrt{x}| + C$

٣٦ – $\int \sec^2 2ax\,dx = \frac{1}{2a}\int \sec^2 2ax\cdot 2a\,dx = \frac{\tan 2ax}{2a} + C$

٣٧ – $\int \frac{\sin x+\cos x}{\cos x}dx = \int (\tan x + 1)\,dx = \ln|\sec x| + x + C$

٣٨ – $\int \frac{\sin y\,dy}{\cos^2 y} = \int \tan y\sec y\,dy = \sec y + C$

٣٩ – $\int (1+\tan x)^2\,dx = \int (1 + 2\tan x + \tan^2 x)\,dx = \int (\sec^2 x + 2\tan x)\,dx$
$= \tan x + 2\ln|\sec x| + C$

٤٠ – $\int e^x\cos e^x\,dx = \int \cos e^x\cdot e^x\,dx = \sin e^x + C$

٤١ – $\int e^{3\cos 2x}\sin 2x\,dx = -\frac{1}{6}\int e^{3\cos 2x}(-6\sin 2x\,dx) = -\frac{e^{3\cos 2x}}{6} + C$

٤٢ – $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}dx = \int (\csc^2 x - \cot x\csc x)\,dx$
$= -\cot x + \csc x + C$

٤٣ – $\int (\tan 2x + \sec 2x)^2\,dx = \int (\tan^2 2x + 2\tan 2x\sec 2x + \sec^2 2x)\,dx$
$= \int (2\sec^2 2x + 2\tan 2x\sec 2x - 1)\,dx = \tan 2x + \sec 2x - x + C$

٤٤ – $\int \csc u\,du = \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{du}{2\sin\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}u} = \int \frac{\sec^2\frac{1}{2}u\cdot\frac{1}{2}du}{\tan\frac{1}{2}u} = \ln|\tan\tfrac{1}{2}u| + C$

$$\int (\sec 4x - 1)^2\,dx = \int (\sec^2 4x - 2\sec 4x + 1)\,dx = \tfrac{1}{4}\tan 4x - \tfrac{1}{2}\ln|\sec 4x + \tan 4x| + x + C$$ — ٤٥

$$\int \frac{\sec x \tan x\,dx}{a + b\sec x} = \frac{1}{b}\int \frac{\sec x \tan x \cdot b\,dx}{a + b\sec x} = \frac{1}{b}\ln|a + b\sec x| + C$$ — ٤٦

$$\int \frac{dx}{\csc 2x - \cot 2x} = \int \frac{\sin 2x\,dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\sin 2x \cdot 2\,dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2}\ln(1 - \cos 2x) + C'$$ — ٤٧

$$= \tfrac{1}{2}\ln(2\sin^2 x) + C' = \tfrac{1}{2}(\ln 2 + 2\ln|\sin x|) + C' = \ln|\sin x| + C$$

الصيغ ١٨ — ٢٠

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$ — ٤٨

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin\frac{x}{2} + C$$ — ٥١

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$ — ٤٩

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$$ — ٥٢

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C$$ — ٥٠

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,dx}{\sqrt{5^2-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{5} + C$$ — ٥٣

$$\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(2x)^2+3^2} = \frac{1}{6}\arctan\frac{2x}{3} + C$$ — ٥٤

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{2x}{3} + C$$ — ٥٥

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin x^3 + C$$ — ٥٦

$$\int \frac{x\,dx}{x^4+3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2)^2+3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\frac{x^2\sqrt{3}}{3} + C$$ — ٥٧

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec} x^2 + C = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x^2} + C$$ — ٥٨

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{2} + C$$ — ٥٩

$$\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \arctan e^x + C$$ — ٦٠

$$\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}\,dx = \int\left(3x - 4 + \frac{4}{x^2+1}\right)dx = \frac{3x^2}{2} - 4x + 4\arctan x + C$$ — ٦١

$$\int \frac{\sec x\tan x\,dx}{9+4\sec^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\sec x\tan x\,dx}{3^2+(2\sec x)^2} = \frac{1}{6}\arctan\frac{2\sec x}{3} + C$$ — ٦٢

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + 3\arcsin x + C$$ — ٦٣

$$\int \frac{(2x-7)\,dx}{x^2+9} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+9} - 7\int \frac{dx}{x^2+9} = \ln(x^2+9) - \frac{7}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$$ — ٦٤

$$\int \frac{dy}{y^2+10y+30} = \int \frac{dy}{(y^2+10y+25)+5} = \int \frac{dy}{(y+5)^2+5} = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\frac{(y+5)\sqrt{5}}{5} + C$$ — ٦٥

$$\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x^2-8x+16)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \arcsin\frac{x-4}{6} + C$$ — ٦٦

$$\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \int \frac{2\,dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{2\,dx}{(2x+1)^2+9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{2x+1}{3} + C$$ — ٦٧

$$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+6}{x^2-4x+8}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+8} + 3\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$$ — ٦٨

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+8} + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x-2}{2} + C$$

ولسنا في حاجة إلى تحديد إشارة القيمة المطلقة لأن $x^2 - 4x + 8 > 0$ مهما كانت قيمة x .

٦٩ –
$$\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x^2+12x+36)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x+6)^2}} = \arcsin\frac{x+6}{8} + C$$

٧٠ –
$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-6}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x-4)-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$$
$$= -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\frac{x+2}{3} + C$$

٧١ –
$$\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+27}{9x^2-12x+8}\,dx = \frac{1}{9}\int \frac{(18x-12)+39}{9x^2-12x+8}\,dx$$
$$= \frac{1}{9}\int \frac{18x-12}{9x^2-12x+8}\,dx + \frac{13}{3}\int \frac{dx}{(3x-2)^2+4}$$
$$= \frac{1}{9}\ln(9x^2-12x+8) + \frac{13}{18}\arctan\frac{3x-2}{2} + C$$

٧٢ –
$$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x+4)-8}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-2}{2} + C$$

الصيغ ٢١ — ٢٤

٧٣ –
$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

٧٤ –
$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

٧٥ –
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

٧٦ –
$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$$

٧٧ –
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$$

٧٨ –
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

٧٩ –
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} = \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) + C$$

٨٠ –
$$\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3}\ln|3z+\sqrt{9z^2-25}| + C$$

٨١ –
$$\int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(3x)^2-16} = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C$$

٨٢ –
$$\int \frac{dy}{25-16y^2} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,dy}{25-(4y)^2} = \frac{1}{40}\ln\left|\frac{5+4y}{5-4y}\right| + C$$

٨٣ –
$$\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)-1}{(x+3)+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$$

٨٤ –
$$\int \frac{dx}{4x-x^2} = \int \frac{dx}{4-(x-2)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+(x-2)}{2-(x-2)}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C$$

٨٥ –
$$\int \frac{ds}{\sqrt{4s+s^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(s+2)^2-4}} = \ln|s+2+\sqrt{4s+s^2}| + C$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$$ – ٨٦

$$= \sqrt{x^2+9} + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right) + C$$

$$\int \frac{2x-3}{4x^2-11}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x-12}{4x^2-11}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x\,dx}{4x^2-11} - \frac{3}{2}\int \frac{2\,dx}{4x^2-11}$$ – ٨٧

$$= \frac{1}{4}\ln|4x^2-11| - \frac{3\sqrt{11}}{44}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{11}}{2x+\sqrt{11}}\right| + C$$

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$$ – ٨٨

$$= \sqrt{x^2+2x-3} + \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}\right| + C$$

$$\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{8x-16}{4x^2+4x-3}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)^2-4}$$ – ٨٩

$$= -\frac{1}{8}\ln|4x^2+4x-3| + \frac{5}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C$$

الصيغ ٢٥ — ٢٧

$$\int \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5} + C$$ – ٩٠

$$\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{3-4x^2}\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2}\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$$ – ٩١

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4}\arcsin\frac{2x\sqrt{3}}{3} + C$$

$$\int \sqrt{x^2-36}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-36} - 18\ln\left|x+\sqrt{x^2-36}\right| + C$$ – ٩٢

$$\int \sqrt{3x^2+5}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{3x^2+5}\cdot\sqrt{3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{3x^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left(\sqrt{3}\,x+\sqrt{3x^2+5}\right)\right] + C$$ – ٩٣

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{3x^2+5} + \frac{5\sqrt{3}}{6}\ln\left(\sqrt{3}\,x+\sqrt{3x^2+5}\right) + C$$

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{2} + C$$ – ٩٤

$$\int \sqrt{4x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x-1)^2+4}\cdot 2\,dx$$ – ٩٥

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x-1}{2}\sqrt{4x^2-4x+5} + 2\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right)\right] + C$$

$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+5} + \ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right) + C$$

مسائل اضافية

أجر عمليات التكامل التالية :

$$\int (4x^3+3x^2+2x+5)\,dx = x^4+x^3+x^2+5x+C$$ – ٩٦

$$\int (3-2x-x^4)\,dx = 3x - x^2 - x^5/5 + C$$ – ٩٧

٩٨ - $\int (2-3x+x^3)\,dx = 2x - 3x^2/2 + x^4/4 + C$

٩٩ - $\int (x^2-1)^2\,dx = x^5/5 - 2x^3/3 + x + C$

١٠٠ - $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + 2/\sqrt{x})\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2 + 4x^{1/2} + C$

١٠١ - $\int (a+x)^3\,dx = \frac{1}{4}(a+x)^4 + C$

١٠٢ - $\int (x-2)^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + C$

١٠٣ - $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$

١٠٤ - $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

١٠٥ - $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} + C$

١٠٦ - $\int \sqrt{3x-1}\,dx = \frac{2}{9}(3x-1)^{3/2} + C$

١٠٧ - $\int \sqrt{2-3x}\,dx = -\frac{2}{9}(2-3x)^{3/2} + C$

١٠٨ - $\int (2x^2+3)^{1/3}x\,dx = \frac{3}{16}(2x^2+3)^{4/3} + C$

١٠٩ - $\int (x-1)^2x\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

١١٠ - $\int (x^2-1)x\,dx = \frac{1}{4}(x^2-1)^2 + C$

١١١ - $\int \sqrt{1+y^4}\,y^3\,dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2} + C$

١١٢ - $\int (x^3+3)x^2\,dx = \frac{1}{6}(x^3+3)^2 + C$

١١٣ - $\int (4-x^2)^2x^2\,dx = \frac{16}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + C$

١١٤ - $\int \frac{dy}{(2-y)^3} = \frac{1}{2(2-y)^2} + C$

١١٥ - $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^3} = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + C$

١١٦ - $\int (1-x^3)^2\,dx = x - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$

١١٧ - $\int (1-x^3)^2x\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^8 + C$

١١٨ - $\int (1-x^3)^2x^2\,dx = -\frac{1}{9}(1-x^3)^3 + C$

١١٩ - $\int (x^2-x)^4(2x-1)\,dx = \frac{1}{5}(x^2-x)^5 + C$

١٢٠ - $\int \frac{3t\,dt}{\sqrt[3]{t^2+3}} = \frac{9}{4}(t^2+3)^{2/3} + C$

١٢١ - $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \sqrt{x^2+2x-4} + C$

١٢٢ - $\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/3}} = \frac{3}{2b}(a+bx)^{2/3} + C$

١٢٣ - $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + C$

١٢٤ - $\int \sqrt{x}(3-5x)\,dx = 2x^{3/2}(1-x) + C$

١٢٥ - $\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C$

١٢٦ - $\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$

١٢٧ - $\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$

١٢٨ - $\int \frac{3x\,dx}{x^2+2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + C$

١٢٩ - $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C$

١٣٠ - $\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = x - 2\ln|x+1| + C$

١٣١ - $\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x+2| + C$

١٣٢ - $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C$

١٣٣ - $\int \left(\frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2x+1}\right) = \ln\sqrt{\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|} + C$

١٣٤ - $\int a^{4x}\,dx = \frac{1}{4}\frac{a^{4x}}{\ln a} + C$

١٣٥ - $\int e^{4x}\,dx = \frac{1}{4}e^{4x} + C$

١٣٦ - $\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C$

١٣٧ - $\int e^{-x^2+2}x\,dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2+2} + C$

١٣٨ - $\int x^2e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

١٣٩ - $\int (e^x+1)^2\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

١٤٠ - $\int (e^x - x^e)\,dx = e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

١٤١ - $\int (e^x+1)^2e^x\,dx = \frac{1}{3}(e^x+1)^3 + C$

١٤٢ - $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3) + C$

$$\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C$$ - ١٤٣

$$\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\, dx = \ln (e^x + 1)^2 - x + C$$ - ١٤٤

$$\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 3}\, dx = \ln (e^{2x} + 3)^{2/3} - \frac{1}{3}x + C$$ - ١٤٥

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})} = \ln \frac{C}{(1 - \sqrt{x})^2}, \quad C > 0$$ - ١٤٦

147. $$\int \frac{dx}{x + x^{1/3}} = \frac{3}{2} \ln C(x^{2/3} + 1), \quad C > 0$$ - ١٤٧

$$\int \sin 2x\, dx = -\tfrac{1}{2} \cos 2x + C$$ - ١٤٨

$$\int \cos \tfrac{1}{2}x\, dx = 2 \sin \tfrac{1}{2}x + C$$ - ١٤٩

$$\int \sec 3x \tan 3x\, dx = \tfrac{1}{3} \sec 3x + C$$ - ١٥٠

$$\int \csc^2 2x\, dx = -\tfrac{1}{2} \cot 2x + C$$ - ١٥١

$$\int x \sec^2 x^2\, dx = \tfrac{1}{2} \tan x^2 + C$$ - ١٥٢

$$\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x + C$$ - ١٥٣

$$\int \tan \tfrac{1}{2}x\, dx = 2 \ln |\sec \tfrac{1}{2}x| + C$$ - ١٥٤

$$\int \csc 3x\, dx = \tfrac{1}{3} \ln |\csc 3x - \cot 3x| + C$$ - ١٥٥

$$\int b \sec ax \tan ax\, dx = \frac{b}{a} \sec ax + C$$ - ١٥٦

$$\int (\cos x - \sin x)^2\, dx = x + \tfrac{1}{2} \cos 2x + C$$ - ١٥٧

$$\int \sin ax \cos ax\, dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax + C$$ - ١٥٨

$$= -\frac{1}{2a} \cos^2 ax + C' = -\frac{1}{4a} \cos 2ax + K$$

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \tfrac{1}{4} \sin^4 x + C$$ - ١٥٩

$$\int \cos^4 x \sin x\, dx = -\tfrac{1}{5} \cos^5 x + C$$ - ١٦٠

$$\int \tan^5 x \sec^2 x\, dx = \tfrac{1}{6} \tan^6 x + C$$ - ١٦١

$$\int \cot^4 3x \csc^2 3x\, dx = -\tfrac{1}{15} \cot^5 3x + C$$ - ١٦٢

$$\int \frac{dx}{1 - \sin \frac{1}{2}x} = 2(\tan \tfrac{1}{2}x + \sec \tfrac{1}{2}x) + C$$ - ١٦٣

$$\int \frac{dx}{1 + \cos 3x} = \frac{1 - \cos 3x}{3 \sin 3x} + C$$ - ١٦٤

$$\int \frac{dx}{1 + \sec ax} = x + \frac{1}{a}(\cot ax - \csc ax) + C$$ - ١٦٥

$$\int \sec^2 \frac{x}{a} \tan \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2} a \tan^2 \frac{x}{a} + C$$ - ١٦٦

$$\int \frac{\sec^2 3x}{\tan 3x}\, dx = \frac{1}{3} \ln |\tan 3x| + C$$ - ١٦٧

$$\int \frac{\sec^5 x}{\csc x}\, dx = \frac{1}{4} \sec^4 x + C$$ - ١٦٨

$$\int e^{\tan 2x} \sec^2 2x\, dx = \tfrac{1}{2} e^{\tan 2x} + C$$ - ١٦٩

$$\int e^{2 \sin 3x} \cos 3x\, dx = \tfrac{1}{6} e^{2 \sin 3x} + C$$ - ١٧٠

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \arcsin \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$$ - ١٧١

$$\int \frac{dx}{5 + x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \arctan \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$$ - ١٧٢

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,sec} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$$ - ١٧٣

$$\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = \arcsin e^x + C$$ - ١٧٤

$$\int \frac{e^{2x}\, dx}{1 + e^{4x}} = \frac{1}{2} \arctan e^{2x} + C$$ - ١٧٥

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 9x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C$$ - ١٧٦

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 4} = \frac{1}{6} \arctan \frac{3x}{2} + C$$ - ١٧٧

$$\int \frac{\sin 8x}{9 + \sin^4 4x}\, dx = \frac{1}{12} \arctan \frac{\sin^2 4x}{3} + C$$ - ١٧٨

$$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1 - 4 \tan^2 x}} = \frac{1}{2} \arcsin (2 \tan x) + C$$ - ١٧٩

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - 9 \ln^2 x}} = \frac{1}{3} \arcsin \ln x^{3/2} + C$$ - ١٨٠

$$\int \frac{2x^4 - x^2}{2x^2 + 1}\, dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan x\sqrt{2} + C$$ - ١٨١

$$\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^2 2x + 8} = \frac{\sqrt{2}}{8} \arctan \frac{\sin 2x}{2\sqrt{2}} + C$$ - ١٨٢

$$\int \frac{(2x - 3)\, dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{(2x + 6)\, dx}{x^2 + 6x + 13} - 9 \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \ln (x^2 + 6x + 13) - \frac{9}{2} \arctan \frac{x + 3}{2} + C$$ - ١٨٣

١٨٤ -
$$\int \frac{(x-1)\,dx}{3x^2-4x+3} = \frac{1}{6}\int \frac{(6x-4)\,dx}{3x^2-4x+3} - \int \frac{dx}{9x^2-12x+9} = \frac{1}{6}\ln(3x^2-4x+3) - \frac{\sqrt{5}}{15}\arctan\frac{3x-2}{\sqrt{5}} + C$$

١٨٥ -
$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} = -\sqrt{27+6x-x^2} + 3\arcsin\frac{x-3}{6} + C$$

١٨٦ -
$$\int \frac{(5-4x)\,dx}{\sqrt{12x-4x^2-8}} = \sqrt{12x-4x^2-8} - \frac{1}{2}\arcsin(2x-3) + C$$

١٨٧ -
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

١٨٨ -
$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$$

١٨٩ -
$$\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + C$$

١٩٠ -
$$\int \frac{dx}{25-9x^2} = \frac{1}{30}\ln\left|\frac{3x+5}{3x-5}\right| + C$$

١٩١ -
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$$

١٩٢ -
$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} = \frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2-25}| + C$$

١٩٣ -
$$\int \sqrt{16-9x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{16-9x^2} + \frac{8}{3}\arcsin\frac{3x}{4} + C$$

١٩٤ -
$$\int \sqrt{x^2-16}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} - 8\ln|x+\sqrt{x^2-16}| + C$$

١٩٥ -
$$\int \sqrt{4x^2+9}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{4x^2+9} + \tfrac{9}{4}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) + C$$

١٩٦ -
$$\int \sqrt{x^2-2x-3}\,dx = \tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-3} - 2\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}| + C$$

١٩٧ -
$$\int \sqrt{12+4x-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(x-2)\sqrt{12+4x-x^2} + 8\arcsin\tfrac{1}{4}(x-2) + C$$

١٩٨ -
$$\int \sqrt{x^2+4x}\,dx = \tfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x} - 2\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}| + C$$

١٩٩ -
$$\int \sqrt{x^2-8x}\,dx = \tfrac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x} - 8\ln|x-4+\sqrt{x^2-8x}| + C$$

٢٠٠ -
$$\int \sqrt{6x-x^2}\,dx = \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x-3}{3} + C$$

الفصل السادس والعشرون

التـــكامل بالتجزئة

التكامل بالتجزئة : إذا كانت u و v دالتين قابلتين للاشتقاق فإن :

$$\begin{aligned} d(uv) &= u\,dv + v\,du \\ u\,dv &= d(uv) - v\,du \\ \int u\,dv &= uv - \int v\,du \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

ولاستخدام (i) فى حساب تكامل مطلوب ، ينبغى فصل التكامل المعطى إلى جزءين أحدهما u والآخر مع dx هو dv . (ولهذا السبب فإن التكامل باستخدام المعادلة (i) يسمى التكامل بالتجزئة) . وهناك قاعدتان عامتان هما :

(ا) ينبغى أن يكون الجزء الذى اخترناه dv قابلا للتكامل مباشرة .

(ب) ينبغى أن لايكون $\int v\,du$ اكثر تعقيداً من $\int u\,dv$.

مثـــال ١ : أوجـــد $\int x^3e^{x^2}dx$.

لنضع $u = x^2$ و $dv = e^{x^2}dx$ فيكون $du = 2x\,dx$ و $v = {}^1/_2 e^{x^2}$.

واستناداً إلى القاعدة يكون :

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x\,e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

مثـــال ٢ : أوجـــد $\int \ln(x^2+2)\,dx.$

لنأخذ $u = \ln(x^2+2)$ و $dv = dx$ فيكون $du = \frac{2x\,dx}{x^2+2}$ و $v = x$ واستناداً إلى القاعدة يكون

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2+2)\,dx &= x\ln(x^2+2) - \int \frac{2x^2\,dx}{x^2+2} = x\ln(x^2+2) - \int\left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)dx \\ &= x\ln(x^2+2) - 2x + 2\sqrt{2}\,\arctan x/\sqrt{2} + C \end{aligned}$$

أنظر المسائل ١ – ١٠

صيغ الاختزال : يمكن بالإستفادة من صيغ الإختزال تقليل الجهد الذى يبذل فى تكرار عملية التكامل بالتجزئة لحساب قيمة تكامل ما . وتقودنا صيغ الإختزال ، بوجه عام إلى تكامل جديد له شكل التكامل الأصلى ذاته بأس أصغر أو أكبر . وتكون صيغ الإختزال ناجحة إذا نتج فى آخــر المطاف تكاملا يمكن حسابه .

وفيما يلى بعض صيغ الإختزال :

(أ) $$\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(a^2 \pm u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(ب) $$\int (a^2 \pm u^2)^m\, du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm u^2)^{m-1}\, du, \quad m \neq -1/2$$

(جـ) $$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(u^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(د) $$\int (u^2 - a^2)^m\, du = \frac{u(u^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int (u^2 - a^2)^{m-1}\, du, \quad m \neq -1/2$$

(هـ) $$\int u^m e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^m e^{au} - \frac{m}{a}\int u^{m-1} e^{au}\, du$$

(و) $$\int \sin^m u\, du = -\frac{\sin^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} u\, du$$

(ز) $$\int \cos^m u\, du = \frac{\cos^{m-1} u \sin u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} u\, du$$

(ح) $$\begin{aligned}\int \sin^m u \cos^n u\, du &= \frac{\sin^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m u \cos^{n-2} u\, du \\ &= -\frac{\sin^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} u \cos^n u\, du, \quad m \neq -n\end{aligned}$$

(ط) $$\int u^m \sin bu\, du = -\frac{u^m}{b}\cos bu + \frac{m}{b}\int u^{m-1} \cos bu\, du$$

(ى) $$\int u^m \cos bu\, du = \frac{u^m}{b}\sin bu - \frac{m}{b}\int u^{m-1} \sin bu\, du$$

أنظر المسألة ١١

مسائل محلولة

١ – أوجد : $\int x \sin x\, dx.$

لدينا الاختيارات التالية :

(أ) $u = x \sin x,\ dv = dx$؛ (ب) $u = \sin x,\ dv = x\,dx$؛ (جـ) $u = x,\ dv = \sin x\, dx.$

(أ) فإذا اخترنا $u = x \sin x,\ dv = dx.$ إذن $du = (\sin x + x \cos x)\,dx,\ v = x,$ و بالتالى

$$\int x \sin x\, dx = x \cdot x \sin x - \int x(\sin x + x \cos x)\, dx$$

ولكن التكامل الناتج فى هذه الحالة ليس بدرجة بساطة التكامل الأصلى و بذلك فإننا نستبعد هذا الاختيار .

(ب) وإذا اخترنا $u = \sin x,\ dv = x\,dx.$ إذن $du = \cos x\, dx,\ v = \frac{1}{2}x^2$ و بالتالى :

$$\int x \sin x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2 \sin x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cos x\, dx$$

ولكن التكامل الناتج فى هذه الحالة أيضا ليس بدرجة بساطة التكاملة الأصلى و لذلك فإننا نستبعد هذا الاختيار .

(جـ) وإذا اخترنا $u = x,\ dv = \sin x\, dx.$ إذن $du = dx,\ v = -\cos x,$ وبالتالي :

$$\int x \sin x\, dx = -x\cos x - \int -\cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + C$$

٢ – أوجد : $\int xe^x\, dx.$

لنضع $u = x,\ dv = e^x\, dx.$ إذن $du = dx,\ v = e^x,$ ومنه

$$\int xe^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C$$

٣ – أوجد : $\int x^2 \ln x\, dx.$

لنضع $u = \ln x,\ dv = x^2\, dx.$ إذن $du = \dfrac{dx}{x},\ v = \dfrac{x^3}{3},$ ومنه

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

٤ – أوجد : $\int x\sqrt{1+x}\, dx.$

لنضع $u = x,\ dv = \sqrt{1+x}\, dx.$ إذن $du = dx,\ v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2},$ منه

$$\int x\sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{3/2}\, dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C$$

٥ – أوجد : $\int \arcsin x\, dx.$

لنضع $u = \arcsin x,\ dv = dx.$ إذن $du = dx/\sqrt{1-x^2},\ v = x,$ منه

$$\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

٦ – أوجد :- $\int \sin^2 x\, dx.$

لنضع $u = \sin x,\ dv = \sin x\, dx.$ إذن $du = \cos x\, dx,\ v = -\cos x,$ ومنه

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\, dx$$
$$= -\sin x\cos x + \int (1 - \sin^2 x)\, dx = -\tfrac{1}{2}\sin 2x + \int dx - \int \sin^2 x\, dx$$

وبنقل التكامل الناتج إلى الطرف الأيسر نجد :

$$2\int \sin^2 x\, dx = -\tfrac{1}{2}\sin 2x + x + C'$$ ومنه $$\int \sin^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + C$$

٧ – أوجد : $\int \sec^3 x\, dx.$

لنضع $u = \sec x,\ dv = \sec^2 x\, dx.$ إذن $du = \sec x \tan x\, dx,\ v = \tan x,$ ومنه

$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

وبالتالى
$$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x + \int \sec x\,dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C'$$

وأخيراً
$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}\{\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\} + C$$

٨ – أوجد : $\int x^2 \sin x\,dx.$

لنضع $u = x^2,\ dv = \sin x\,dx.$ إذن $du = 2x\,dx,\ v = -\cos x,$ ومنه

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx$$

لنضع فى التكامل الأخير $u = x$ و $dv = \cos x\,dx.$ إذن $du = dx,\ v = \sin x,$ ومنه

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2\left\{x \sin x - \int \sin x\,dx\right\}$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

٩ – أوجد $\int x^3 e^{2x}\,dx.$

لنضع $u = x^3,\ dv = e^{2x}\,dx.$ إذن $du = 3x^2\,dx,\ v = \tfrac{1}{2}e^{2x},$ ومنه

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\,dx$$

لنضع فى التكامل الأخير $u = x^2$ و $dv = e^{2x}dx$ إذن $du = 2x\,dx,\ v = \tfrac{1}{2}e^{2x},$ ومنه

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\,dx\right\} = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\int x e^{2x}\,dx$$

ولنضع فى التكامل الأخير $u = x$ و $dv = e^{2x}dx$ إذن $du = dx,\ v = \tfrac{1}{2}e^{2x},$ ومنه

$$\int x^3 e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\right\}$$
$$= \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$$

١٠ – أوجد $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 \pm x^2)^m}$

(أ) لنأخذ $u = x,\ dv = \dfrac{x\,dx}{(a^2 \pm x^2)^m};$ إذن $du = dx,\ v = \dfrac{\mp 1}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}},$ ومنه

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2 \pm x^2)^m} = \frac{\mp x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} \pm \frac{1}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$$

(ب) لنأخذ $u = x,\ dv = x(a^2 \pm x^2)^{m-1}\,dx;$ إذن $du = dx,\ v = \dfrac{\pm 1}{2m}(a^2 \pm x^2)^m,$ ومنه

$$\int x^2(a^2 \pm x^2)^{m-1}\,dx = \frac{\pm x}{2m}(a^2 \pm x^2)^m \mp \frac{1}{2m}\int (a^2 \pm x^2)^m\,dx$$

١١ – أوجد (ا) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$ ، (ب) $\int (9+x^2)^{3/2}\,dx.$

(ا) بما أن استخدام صيغة الاختزال (ا) تنقص الأس فى المقام بمقدار الوحدة . فإننا نجد باستخدام هذه الصيغة مرتين أن :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

(ب) باستخدام صيغة الاختزال (ب) نجد أن :

$$\int (9+x^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4}\int (9+x^2)^{1/2}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{8}\{x(9+x^2)^{1/2} + 9\ln(x+\sqrt{9+x^2})\} + C$$

مسائل اضافية

١٢ $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

١٣ – $\int x\sec^2 3x\,dx = \frac{x}{3}\tan 3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + C$

١٤ – $\int \text{arc}\cos 2x\,dx = x\,\text{arc}\cos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

١٥ – $\int \text{arc}\tan x\,dx = x\,\text{arc}\tan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

١٦ – $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx = -\frac{2}{105}(1-x)^{3/2}(15x^2+12x+8) + C$

١٧ – $\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C$

١٨ – $\int x\,\text{arc}\tan x\,dx = \frac{1}{2}(x^2+1)\,\text{arc}\tan x - \frac{1}{2}x + C$

١٩ – $\int x^2 e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}) + C$

٢٠ – $\int \sin^3 x\,dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x - \sin^2 x\cos x + C$

٢١ – $\int x^3\sin x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$

٢٢ – $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C$

٢٣ – $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15}(3x^2-4x+8)\sqrt{1+x} + C$

٢٤ – $\int x\,\text{arc}\sin x^2\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\text{arc}\sin x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

٢٥ – $\int \sin x\sin 3x\,dx = \frac{1}{8}\sin 3x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos 3x + C$

٢٦ – $\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x(\sin\ln x - \cos\ln x) + C$

٢٧ – $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

٢٨ – $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

٢٩ – (ا) اكتب $\int \frac{a^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m} = \int \frac{(a^2\pm x^2)\mp x^2}{(a^2\pm x^2)^m}dx = \int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^{m-1}} \mp \int \frac{x^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m}$ ، واستخدم نتيجة المسألة ١٠ (ا) لتحصل على صيغة الاختزال (ا) .

(ب) اكتب $\int x^2(a^2 \pm x^2)^{m-1}\,dx \;\pm\; \int (a^2 \pm x^2)^{m-1}\,dx \;\; a^2 = \int (a^2 \pm x^2)^m\,dx$ واستخدم نتيجة المسألة ١٠ (ب) لتحصل على الاختزال (ب) .

٣٠ - استنتج صيغة الاختزال من (جـ) إلى (ى).

٣١ - $$\int \frac{dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x(5-3x^2)}{8(1-x^2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

٣٢ - $$\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(4+x^2)^{1/2}} + C$$

٣٣ - $$\int (4-x^2)^{3/2}\,dx = \tfrac{1}{4}x(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6\arcsin\tfrac{1}{2}x + C$$

٣٤ - $$\int \frac{dx}{(x^2-16)^3} = \frac{1}{2048}\left\{\frac{x(3x^2-80)}{(x^2-16)^2} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\right\} + C$$

٣٥ - $$\int (x^2-1)^{5/2}\,dx = \tfrac{1}{48}x(8x^4-26x^2+33)\sqrt{x^2-1} - \tfrac{5}{16}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$$

٣٦ - $$\int \sin^4 x\,dx = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{8}\sin x\cos x - \tfrac{1}{4}\sin^3 x\cos x + C$$

٣٧ - $$\int \cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{15}(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8)\sin x + C$$

٣٨ - $$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{5}\cos^3 x\,(\sin^2 x + \tfrac{2}{3}) + C$$

٣٩ - $$\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{9}\sin^5 x\,(\cos^4 x + \tfrac{4}{7}\cos^2 x + \tfrac{8}{35}) + C$$

وهناك طريقة بديلة تصلح لبعض المسائل الصعبة فى هذا الفصل . ويمكن الحصول على هذه الطريقة بملاحظة أن (أنظر المسألة ٩) .

$$\text{(i)}\quad \int x^3e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^3e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2e^{2x} + \tfrac{3}{4}xe^{2x} - \tfrac{3}{8}e^{2x} + C$$

حيث حدود الطرف الأيمن ، بغض النظر عن المعاملات (الأمثال) ، هى الحدود المختلفة التى نحصل عليها باشتقاقات متكررة للدالة المكاملة x^3e^{2x} وبالتالى فإنه يمكننا أن نكتب مباشرة .

$$\text{(ii)}\quad \int x^3e^{2x}\,dx = Ax^3e^{2x} + Bx^2e^{2x} + Dxe^{2x} + Ee^{2x} + C$$

وبالاشتقاق نجد أن

$$x^3e^{2x} = 2Ax^3e^{2x} + (3A+2B)x^2e^{2x} + (2B+2D)xe^{2x} + (D+2E)e^{2x}$$

وبمساواة المعاملات نجد أن

$$2A = 1,\quad 3A+2B = 0,\quad 2B+2D = 0,\quad D+2E = 0$$

وبالتالى فإن $A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{3}{2}A = -\tfrac{3}{4},\ D = -B = \tfrac{3}{4},\ E = -\tfrac{1}{2}D = -\tfrac{3}{8}$. وبالتعويض عن E, D, B, A فى (ii) نحصل على (i) .

يمكن استخدام هذه الطريقة للحصول على $\int f(x)\,dx$ إذا كان التفاضل المتكرر للدالة $f(x)$ يعطى فى كل مرة عدد محدود من الحدود المختلفة .

٤٠ – أوجـد $\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{13} e^{2x}(3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + C$ وذلك باستخدام :

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = Ae^{2x} \sin 3x + Be^{2x} \cos 3x + C$$

٤١ – أوجـد $\int e^{3x}(2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = \frac{1}{25} e^{3x}(-14 \sin 4x - 23 \cos 4x) + C$ وذلك باستخدام :

$$\int e^{3x}(2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \, dx = Ae^{3x} \sin 4x + Be^{3x} \cos 4x + C$$

٤٢ – أوجـد $\int \sin 3x \cos 2x \, dx = -\frac{1}{5}(2 \sin 3x \sin 2x + 3 \cos 3x \cos 2x) + C$ ، وذلك باستخدام

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = A \sin 3x \sin 2x + B \cos 3x \cos 2x + D \cos 3x \sin 2x + E \sin 3x \cos 2x + C$$

٤٣ – أوجـد $\int e^{3x} x^2 \sin x \, dx$

$$= \frac{e^{3x}}{250} [25x^2(3 \sin x - \cos x) - 10x(4 \sin x - 3 \cos x) + 9 \sin x - 13 \cos x] + C$$

الفصل السابع والعشرون

التكاملات المثلثية

نستخدم المتطابقات التالية لحصول على التكاملات المثلثية في هذا الفصل .

١ — $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

٢ — $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

٣ — $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

٤ — $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

٥ — $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

٦ — $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

٧ — $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$

٨ — $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$

٩ — $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

١٠ — $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$

١١ — $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$

١٢ — $1 \pm \sin x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

مسائل محلولة

الجيوب وجيوب التمام :

١ — $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

٢ — $\int \cos^2 3x\, dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6x)\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$

٣ — $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

٤ — $\int \cos^5 x\, dx = \int \cos^4 x \cos x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\, dx$

$$= \int \cos x\, dx - 2\int \sin^2 x \cos x\, dx + \int \sin^4 x \cos x\, dx$$

$$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

٥ — $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\cos x\, dx$

$$= \int \sin^2 x \cos x\, dx - \int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

٦ — $\int \cos^4 2x \sin^3 2x\, dx = \int \cos^4 2x \sin^2 2x \sin 2x\, dx = \int \cos^4 2x(1 - \cos^2 2x)\sin 2x\, dx$

$$= \int \cos^4 2x \sin 2x\, dx - \int \cos^6 2x \sin 2x\, dx = -\frac{1}{10}\cos^5 2x + \frac{1}{14}\cos^7 2x + C$$

٧ — $\int \sin^3 3x \cos^5 3x\, dx = \int (1 - \cos^2 3x)\cos^5 3x \sin 3x\, dx$

$$= \int \cos^5 3x \sin 3x\, dx - \int \cos^7 3x \sin 3x\, dx = -\frac{1}{18}\cos^6 3x + \frac{1}{24}\cos^8 3x + C$$

أو

$$\int \sin^3 3x \cos^5 3x\, dx = \int \sin^3 3x(1 - \sin^2 3x)^2 \cos 3x\, dx$$

$$= \int \sin^3 3x \cos 3x\, dx - 2\int \sin^5 3x \cos 3x\, dx + \int \sin^7 3x \cos 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{12}\sin^4 3x - \frac{1}{9}\sin^6 3x + \frac{1}{24}\sin^8 3x + C$$

$$\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx = \int \left(1 - \sin^2 \frac{x}{3}\right) \cos \frac{x}{3}\, dx = 3 \sin \frac{x}{3} - \sin^3 \frac{x}{3} + C$$ — ٨

$$\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2\, dx$$ — ٩

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$ — ١٠

$$\int \sin^4 3x \cos^2 3x\, dx = \int (\sin^2 3x \cos^2 3x) \sin^2 3x\, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 6x\, (1 - \cos 6x)\, dx$$ — ١١

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 6x\, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 12x)\, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 6x + C$$

$$\int \sin 3x \sin 2x\, dx = \int \frac{1}{2} \{\cos (3x - 2x) - \cos (3x + 2x)\}\, dx = \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x)\, dx$$ — ١٢

$$= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C$$

$$\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2} \{\sin (3x - 5x) + \sin (3x + 5x)\}\, dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$$ — ١٣

$$\int \cos 4x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{12} \sin 6x + C$$ — ١٤

$$\int \sqrt{1 - \cos x}\, dx = \sqrt{2} \int \sin \tfrac{1}{2} x\, dx = -2\sqrt{2} \cos \tfrac{1}{2} x + C$$ — ١٥

$$\int (1 + \cos 3x)^{3/2}\, dx = 2\sqrt{2} \int \cos^3 \tfrac{3}{2} x\, dx = 2\sqrt{2} \int (1 - \sin^2 \tfrac{3}{2} x) \cos \tfrac{3}{2} x\, dx$$ — ١٦

$$= 2\sqrt{2} \left(\tfrac{2}{3} \sin \tfrac{3}{2} x - \tfrac{2}{9} \sin^3 \tfrac{3}{2} x\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin 2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos (\frac{1}{2}\pi - 2x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\sin (\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \csc (\tfrac{1}{4}\pi - x)\, dx$$ — ١٧

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln |\csc (\tfrac{1}{4}\pi - x) - \cot (\tfrac{1}{4}\pi - x)| + C$$

الظلال والقواطع وظلال التمام وقواطع التمام :

$$\int \tan^4 x\, dx = \int \tan^2 x \tan^2 x\, dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^2 x\, dx$$ — ١٨

$$= \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tfrac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C$$

$$\int \tan^5 x\, dx = \int \tan^3 x \tan^2 x\, dx = \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1)\, dx$$ — ١٩

$$= \int \tan^3 x \sec^2 x\, dx - \int \tan^3 x\, dx = \int \tan^3 x \sec^2 x\, dx - \int \tan x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \tfrac{1}{4} \tan^4 x - \tfrac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\sec x| + C$$

$$\int \sec^4 2x\, dx = \int \sec^2 2x \sec^2 2x\, dx = \int \sec^2 2x (1 + \tan^2 2x)\, dx$$ — ٢٠

$$= \int \sec^2 2x\, dx + \int \tan^2 2x \sec^2 2x\, dx = \tfrac{1}{2} \tan 2x + \tfrac{1}{6} \tan^3 2x + C$$

٢١ — $\int \tan^3 3x \sec^4 3x\, dx = \int \tan^3 3x\,(1 + \tan^2 3x) \sec^2 3x\, dx$

$= \int \tan^3 3x \sec^2 3x\, dx + \int \tan^5 3x \sec^2 3x\, dx = \frac{1}{12}\tan^4 3x + \frac{1}{18}\tan^6 3x + C$

٢٢ — $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec^3 x\, dx = \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx$

$= \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x - \frac{1}{8}\sec x \tan x - \frac{1}{8}\ln|\sec x + \tan x| + C$

٢٣ — $\int \tan^3 2x \sec^3 2x\, dx = \int \tan^2 2x \sec^2 2x \cdot \sec 2x \tan 2x\, dx$

$= \int (\sec^2 2x - 1)\sec^2 2x \cdot \sec 2x \tan 2x\, dx$

$= \int \sec^4 2x \cdot \sec 2x \tan 2x\, dx - \int \sec^2 2x \cdot \sec 2x \tan 2x\, dx$

$= \frac{1}{10}\sec^5 2x - \frac{1}{6}\sec^3 2x + C$

٢٤ — $\int \cot^3 2x\, dx = \int \cot 2x\,(\csc^2 2x - 1)\, dx = -\frac{1}{4}\cot^2 2x + \frac{1}{2}\ln|\csc 2x| + C$

٢٥ — $\int \cot^4 3x\, dx = \int \cot^2 3x\,(\csc^2 3x - 1)\, dx = \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx - \int \cot^2 3x\, dx$

$= \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx - \int (\csc^2 3x - 1)\, dx = -\frac{1}{9}\cot^3 3x + \frac{1}{3}\cot 3x + x + C$

٢٦ — $\int \csc^6 x\, dx = \int \csc^2 x\,(1 + \cot^2 x)^2\, dx$

$= \int \csc^2 x\, dx + 2\int \cot^2 x \csc^2 x\, dx + \int \cot^4 x \csc^2 x\, dx$

$= -\cot x - \frac{2}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C$

٢٧ — $\int \cot 3x \csc^4 3x\, dx = \int \cot 3x\,(1 + \cot^2 3x)\csc^2 3x\, dx$

$= \int \cot 3x \csc^2 3x\, dx + \int \cot^3 3x \csc^2 3x\, dx = -\frac{1}{6}\cot^2 3x - \frac{1}{12}\cot^4 3x + C$

٢٨ — $\int \cot^3 x \csc^5 x\, dx = \int \cot^2 x \csc^4 x \cdot \csc x \cot x\, dx = \int (\csc^2 x - 1)\csc^4 x \cdot \csc x \cot x\, dx$

$= \int \csc^6 x \cdot \csc x \cot x\, dx - \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x\, dx$

$= -\frac{1}{7}\csc^7 x + \frac{1}{5}\csc^5 x + C$

مسائل اضافية

٢٩ — $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$ — ٣٠ . $\int \sin^3 2x\, dx = \frac{1}{6}\cos^3 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$

٣١ — $\int \sin^4 2x\, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + C$

٣٢ — $\int \cos^4 \frac{1}{2}x\, dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}\sin 2x + C$

٣٣ — $\int \sin^7 x\, dx = \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C$

٣٤ — $\int \cos^6 \frac{1}{2}x\, dx = \frac{5}{16}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{3}{32}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 x + C$

٣٥ — $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C$

٣٦ — $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$

٣٧ — $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{48}\cos^3 2x - \frac{1}{16}\cos 2x + C$

٣٨ — $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{128}(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x) + C$

٣٩ — $\int \sin 2x \cos 4x\, dx = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{12}\cos 6x + C$

٤٠ — $\int \cos 3x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$

٤١ — $\int \sin 5x \sin x\, dx = \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$

٤٢ — $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{1 - \sin x} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

٤٣ — $\int \frac{\cos^{2/3} x}{\sin^{8/3} x}\, dx = -\frac{3}{5}\cot^{5/3} x + C$

٤٤ — $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\, dx = \csc x - \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

٤٥ — $\int x(\cos^3 x^2 - \sin^3 x^2)\, dx = \frac{1}{12}(\sin x^2 + \cos x^2)(4 + \sin 2x^2) + C$

٤٦ — $\int \tan^3 x\, dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$

٤٧ — $\int \tan^3 3x \sec 3x\, dx = \frac{1}{9}\sec^3 3x - \frac{1}{3}\sec 3x + C$

٤٨ — $\int \tan^{3/2} x \sec^4 x\, dx = \frac{2}{5}\tan^{5/2} x + \frac{2}{9}\tan^{9/2} x + C$

٤٩ — $\int \tan^4 x \sec^4 x\, dx = \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C$

٥٣ — $\csc^4 2x\, dx = -\frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{6}\cot^3 2x + C$

٥٠ — $\int \cot^3 x\, dx = -\frac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\sin x| + C$

٥٤ — $\int \left(\frac{\sec x}{\tan x}\right)^4 dx = -\frac{1}{3\tan^3 x} - \frac{1}{\tan x} + C$

٥١ — $\int \cot^3 x \csc^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\cot^4 x - \frac{1}{6}\cot^6 x + C$

٥٥ — $\int \frac{\cot^3 x}{\csc x}\, dx = -\sin x - \csc x + C$

٥٢ — $\int \cot^3 x \csc^3 x\, dx = -\frac{1}{5}\csc^5 x + \frac{1}{3}\csc^3 x + C$

٥٦ — $\int \tan x \sqrt{\sec x}\, dx = 2\sqrt{\sec x} + C$

٥٧ — استخدم طريقة التكامل بالتجزئة لتستنتج صيغ الاختزال التالية :

(أ) $\int \sec^m u\, du = \frac{1}{m-1}\sec^{m-2} u \tan u + \frac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} u\, du$

(ب) $\int \csc^m u\, du = -\frac{1}{m-1}\csc^{m-2} u \cot u + \frac{m-2}{m-1}\int \csc^{m-2} u\, du$

استخدم صيغ الاختزال فى المسألة ٥٧ لحساب قيم المسائل ٥٨ — ٦٠

٥٨ — $\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$

٥٩ — $\int \csc^5 x\, dx = -\frac{1}{4}\csc^3 x \cot x - \frac{3}{8}\csc x \cot x + \frac{3}{8}\ln|\csc x - \cot x| + C$

٦٠ — $\int \sec^6 x\, dx = \frac{1}{5}\sec^4 x \tan x + \frac{4}{15}\sec^2 x \tan x + \frac{8}{15}\tan x + C$

$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{3}\tan^3 x + \tan x + C$

الفصل الثامن والعشرون

التعويضات المثلثية

يمكن تحويل دالة التكامل ، التى تحتوى على أحد الأشكال $\sqrt{a^2 - b^2u^2}$, و $\sqrt{a^2 + b^2u^2}$, أو $\sqrt{b^2u^2 - a^2}$
بشرط عدم احتوائها على أى مضروب غير قياسى آخر إلى دالة تكامل أخرى . تحتوى على دوال مثلثية لمتغير جديد :

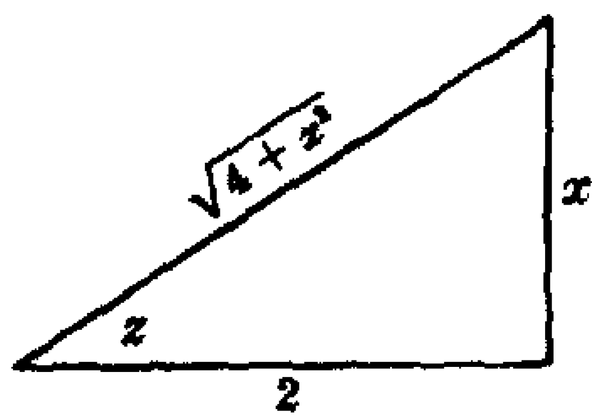
من أجل	استخدم	لتحصل على
$\sqrt{a^2 - b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\sin z$	$a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a\cos z$
$\sqrt{a^2 + b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\tan z$	$a\sqrt{1 + \tan^2 z} = a\sec z$
$\sqrt{b^2u^2 - a^2}$	$u = \frac{a}{b}\sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\tan z$

وفى كل حالة يقودنا التكامل إلى تعبير فى المتغير z . وللحصول على التعبير المقابل فى المتغير الأصلى نستخدم المثلث القائم كما هو مبين فى المسائل المحلولة التالية :

مسائل محلولة

١ – أوجد $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$.

لنضع $x = 2\tan z$; فيكون $dx = 2\sec^2 z\, dz$ و $\sqrt{4 + x^2} = 2\sec z$. وبالتالى فإن



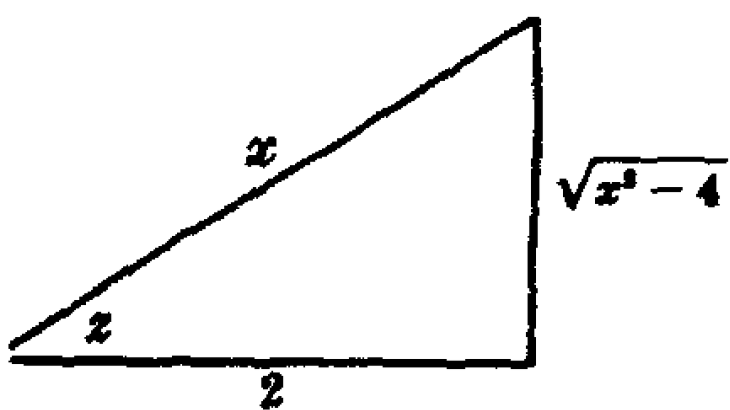
شكل ٢٨ — ١

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 + x^2}} = \int \frac{2\sec^2 z\, dz}{(4\tan^2 z)(2\sec z)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\tan^2 z}dz$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin^{-2} z\cos z\, dz = -\frac{1}{4\sin z} + C = -\frac{\sqrt{4 + x^2}}{4x} + C$$

٢ – أوجد $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}dx$.

لنضع $x = 2\sec z$; فيكون $dx = 2\sec z\tan z\, dz$ ؛ $\sqrt{x^2 - 4} = 2\tan z$. وبالتالى فإن



شكل ٢٨ — ٢

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}dx = \int \frac{4\sec^2 z}{2\tan z}(2\sec z\tan z\, dz) = 4\int \sec^3 z\, dz$$

$$= 2\sec z\tan z + 2\ln|\sec z + \tan z| + C'$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 4} + 2\ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$$

٣ – أوجد $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx$.

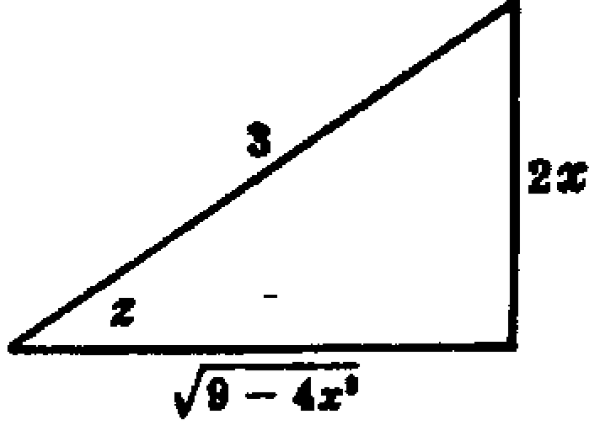
لنضع $x = \frac{3}{2}\sin z$; فيكون $dx = \frac{3}{2}\cos z\,dz$ ، $\sqrt{9-4x^2} = 3\cos z$. وبالتالى فإن

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{3\cos z}{\frac{3}{2}\sin z}\left(\tfrac{3}{2}\cos z\,dz\right) = 3\int \frac{\cos^2 z}{\sin z}\,dz$$

$$= 3\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z}\,dz = 3\int \csc z\,dz - 3\int \sin z\,dz$$

$$= 3\ln|\csc z - \cot z| + 3\cos z + C'$$

$$= 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C$$



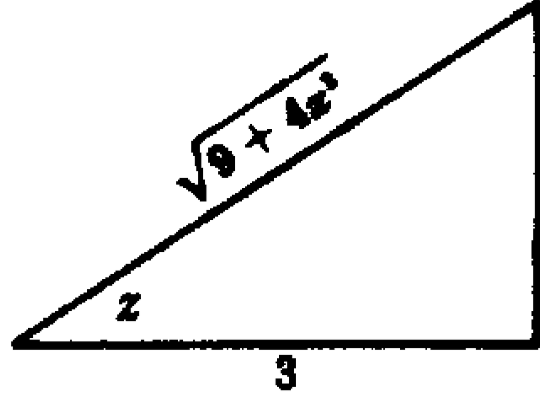
شكل ٢٨ — ٣

٤ – أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$.

لنضع $x = \frac{3}{2}\tan z$; فيكون $dx = \frac{3}{2}\sec^2 z\,dz$ ، $\sqrt{9+4x^2} = 3\sec z$. وبالتالى فإن

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 z\,dz}{\frac{3}{2}\tan z\cdot 3\sec z} = \frac{1}{3}\int \csc z\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\csc z - \cot z| + C' = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x}\right| + C$$



شكل ٢٨ — ٤

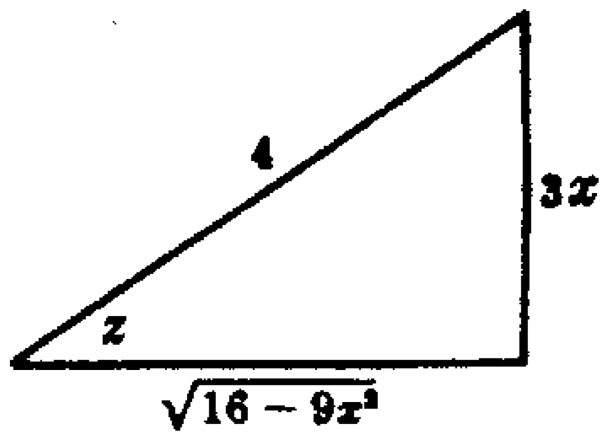
٥ – أوجد $\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$.

لنضع $x = \frac{4}{3}\sin z$; فيكون $dx = \frac{4}{3}\cos z\,dz$ ، $\sqrt{16-9x^2} = 4\cos z$. وبالتالى فإن :

$$\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx = \int \frac{64\cos^3 z\cdot\frac{4}{3}\cos z\,dz}{\frac{4096}{729}\sin^6 z} = \frac{243}{16}\int \frac{\cos^4 z}{\sin^6 z}\,dz$$

$$= \frac{243}{16}\int \cot^4 z\csc^2 z\,dz = -\frac{243}{80}\cot^5 z + C$$

$$= -\frac{243}{80}\cdot\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{243x^5} + C = -\frac{1}{80}\cdot\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{x^5} + C$$



شكل ٢٨ — ٥

٦ – أوجد $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

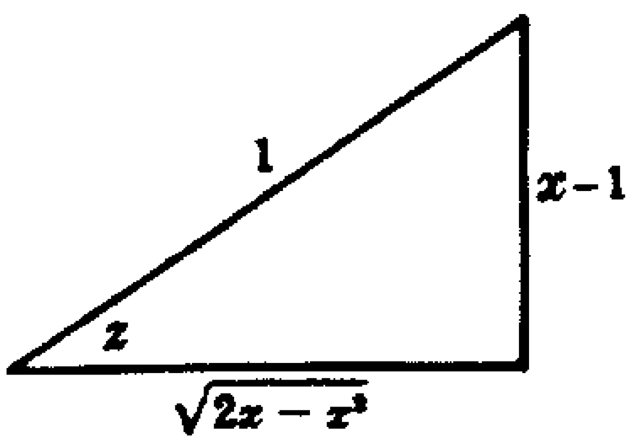
لنضع $x-1 = \sin z$; فيكون $dx = \cos z\,dz$ ، $\sqrt{2x-x^2} = \cos z$. وبالتالى فإن

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{(1+\sin z)^2}{\cos z}\cos z\,dz = \int (1+\sin z)^2\,dz$$

$$= \int \left(\tfrac{3}{2} + 2\sin z - \tfrac{1}{2}\cos 2z\right)dz = \tfrac{3}{2}z - 2\cos z - \tfrac{1}{4}\sin 2z + C$$

$$= \tfrac{3}{2}\arcsin(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + C$$

$$= \tfrac{3}{2}\arcsin(x-1) - \tfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} + C$$



شكل ٢٨ — ٦

٧ – أوجـد . $\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\{4(x-3)^2 - 9\}^{3/2}}$

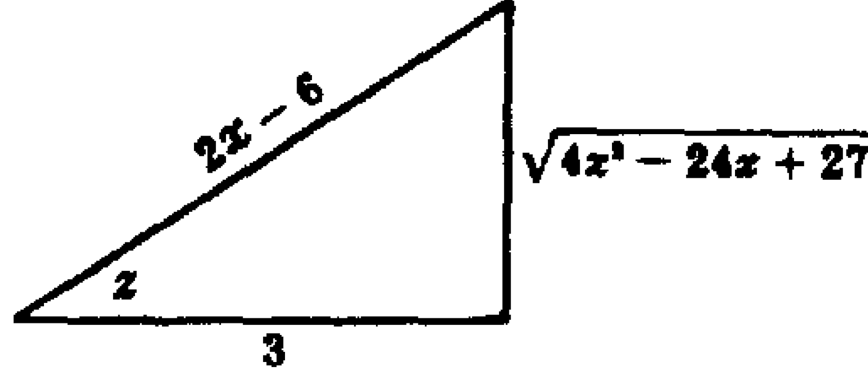
لنضع $x - 3 = \frac{3}{2}\sec z;$ فيكون $dx = \frac{3}{2}\sec z \tan z\, dz$ و $\sqrt{4x^2 - 24x + 27} = 3\tan z.$ وبالتالى فإن :

$$\int \frac{dx}{(4x^2 - 24x + 27)^{3/2}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec z \tan z\, dz}{27\tan^3 z}$$

$$= \frac{1}{18}\int \sin^{-2} z \cos z\, dz$$

$$= -\frac{1}{18}\csc z + C$$

$$= -\frac{1}{9}\,\frac{x-3}{\sqrt{4x^2 - 24x + 27}} + C$$



شكل ٢٨ — ٧

مســـائل اضـــافية

٨ — $\int \frac{dx}{(4 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{4 - x^2}} + C$

٩ — $\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\, dx = 5 \ln\left|\frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x}\right| + \sqrt{25 - x^2} + C$

١٠ — $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$.

١١ — $\int \sqrt{x^2 + 4}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + 4} + 2\ln(x + \sqrt{x^2 + 4}) + C$.

١٢ — $\int \frac{x^2\, dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C$.

١٣ — $\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 4} - 2\ln|x + \sqrt{x^2 - 4}| + C$.

١٤ — $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}\, dx = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2 + x^2} - a}{\sqrt{a^2 + x^2} + a} + C$.

١٥ — $\int \frac{x^2\, dx}{(4 - x^2)^{5/2}} = \frac{x^3}{12(4 - x^2)^{3/2}} + C$.

١٦ — $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}} + C$.

١٧ — $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{9x} + C$.

١٨ — $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 16} + 8\ln|x + \sqrt{x^2 - 16}| + C$.

١٩ — $\int x^3\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{5}(a^2 - x^2)^{5/2} - \frac{a^2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} + C$.

٢٠ — $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} = \ln(x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x + 13}) + C$.

٢١ — $\int \frac{dx}{(4x - x^2)^{3/2}} = \frac{x - 2}{4\sqrt{4x - x^2}} + C$.

٢٢ — $\int \frac{dx}{(9 + x^2)^2} = \frac{1}{54}\arctan\frac{x}{3} + \frac{x}{18(9 + x^2)} + C$.

أجرى التكامل بالتجزئة فى المسألتين ٢٣ – ٢٤ واستخدم الطريقة المتّبعة فى هذا الفصل .

٢٣ — $\int x \arcsin x\, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$

٢٤ — $\int x \arccos x\, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - 1)\arccos x - \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} + C$

الفصل التاسع والعشرون

التكامل بالكســـور الجزئية

متعددة الحدود فى x هى دالة من الشكل $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, حيث المعاملات a_n ثوابت و $a_0 \neq 0$ و n عدد صحيح موجب أو صفر .

إذا تساوت متعددا حدود من نفس الدرجة لجميع قيم المتغير فإن معاملات المتغير ذات القوة الواحدة فى المتعددتين تكون متساوية .

يمكن التعبير عن كل متعددة حدود ذات معاملات حقيقية (نظريا على الأقل) بحاصل ضرب معاملات خطية حقيقية من الشكل $2x + b$ ومعاملات تربيعية حقيقية ، غير قابلة للتحويل إلى مضاريب خطية ، من الشكل $ax^2 + bx + c$.

تسمى الدالة $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, حيث $f(x)$ و $g(x)$ متعددا حدود بدالة جذرية .

وإذا كانت درجة $f(x)$ أقل من درجة $g(x)$ فإن $F(x)$ تسمى كسراً حقيقيا وخلاف ذلك فإن $F(x)$ تسمى كسراً غير حقيقى .

يمكن التعبير عن كل كسر غير حقيقى بمجموع كثيرة حدود وكسر حقيقى . مثل $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$.

يمكن (نظريا على الأقل) التعبير عن كل كسر قياسى بمجموع كسور بسيطة (كسور جزئية) مقاماتها من الشكل $(ax+b)^n$ أو من الشكل $(ax^2+bx+c)^n$ حيث n عدد صحيح موجب . وهنا تنشأ ، حسب طبيعة معاملات المقام ، أربع حالات :

الحالة I معاملات خطية متمايزة :

يقابل كل معامل خطى $ax + b$ يظهر مرة واحدة فى مقام كسر قياسى حقيقى كسرا جزئيا وحيدا من الشكل $\dfrac{A}{ax+b}$ حيث A ثابت ينبغى تعيينه .

أنظر المسألتين ١ – ٢

الحالة II معاملات خطية متكررة :

يقابل كل معامل خطى $ax + b$ يظهر n مرة فى مقام كسر قياسى حقيقى مجموع n كسرا جزئيا من الشكل

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

حيث A_i ثوابت ينبغى تعيينها .

أنظر المسألتين ٣ – ٤

الحالة III معاملات تربيعية متمايزة :

يقابل كل معامل تربيعى $ax^2 + bx + c$ ، غير قابل التحويل إلى معاملات خطية ، يظهر مرة واحدة

فى مقام كسر قياسى حقيقى ، كسرا جزئيا وحيدا من الشكل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ، حيث A و B ثابتان ينبغى تعيينها .
أنظر المسألتين ٥ – ٦

الحالة IV معاملات تربيعية متكررة :

يقابل كل معامل تربيعى ax^2+bx+c يظهر n مرة فى مقام كسر قياسى حقيقى ، مجموع n كسرا جزئيا من الشكل .

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

حيث A_i و B_i ثوابت ينبغى تعيينها .

أنظر المسألتين ٧ – ٨

مسائل محلولة

١ – أوجد $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

(ا) نحلل المقام إلى $x^2-4 = (x-2)(x+2)$.

ونكتب $\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$ ونتخلص من المقامات فنحصل على :

(١) $1 = A(x+2)+B(x-2)$ أو $1 = (A+B)x + (2A-2B)$ (٢)

(ب) تعيين الثوابت .

الطريقة العامة . نساوى بين معاملات الحدود متساوية القوى لـ x فى (٢) ، ثم نحل المعادلات الناتجة آنيا لنحصل على الثوابت ، وهكذا نجد أن $A+B=0$ و $2A-2B=1$ ومنه $A=\frac14$ و $B=-\frac14$

الطريقة المختصرة : بالتعويض عن $x=2$ فى (١) $x=-2$ فنجد أن $4A=1$ و $-4B=1$ ومنه $A=\frac14$ و $B=-\frac14$ تماما كما وجدنا (ليلاحظ أن القيمتين التين اخترناها لـ x هما القيمتان اللتان تجعلان مقامى الكسرين الجزئيين مساويا للصفر) .

(جـ) وهكذا يكون لدينا مهما كانت الطريقة $\frac{1}{x^2-4} = \frac{\frac14}{x-2} - \frac{\frac14}{x+2}$ ومنه

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac14\int\frac{dx}{x-2} - \frac14\int\frac{dx}{x+2} = \frac14\ln|x-2| - \frac14\ln|x+2| + C = \frac14\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

٢ – أوجد $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x}$.

(ا) $x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3)$. إذن $\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$ وبالتالى :

$$x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2) \quad (١)$$

أو

$$x+1 = (A+B+C)x^2 + (A+3B-2C)x - 6A \quad (٢)$$

(ب) الطريقة العامة . نحل مجموعة المعادلات :

$$A+B+C=0, \quad A+3B-2C=1, \quad \text{و} \quad -6A=1$$

آنيا فنحصل على $A=-1/6$ ، $B=3/10$ ، $C=-2/15$

الطريقة المختصرة : لنعوض في (١) بالقيم $x=0$ و $x=2$ و $x=-3$ فنحصل على $1=-6A$ ومنه $A=-1/6$ وعلى $3=10B$ ومنه $B=3/10$ وعلى $-2=15C$ ومنه $C=-2/15$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x} = -\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15}\int\frac{dx}{x+3}.$$

(جـ) $$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C = \ln\frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6}\,|x+3|^{2/15}} + C$$

٣ – أوجد $\displaystyle\int \frac{(3x+5)\,dx}{x^3-x^2-x+1}$.

أن $x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2$ إذن $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$ وبالتالي

$$3x+5 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$$

وإذا وضعنا $x=-1$ نجد $2=4A$ ومنه $A={}^1/_2$. وإذا وضعنا $x=1$ نجد $8=2C$ ومنه $C=4$

ولتعيين الثوابت الأخرى استخدم أية قيمة أخرى لـ x ، مثلا $x=0$ فنجد $5=A-B+C$ ومنه $B=-{}^1/_2$ إذن :

$$\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

٤ – أوجد $\displaystyle\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx.$

إن دالة التكامل كسر غير حقيقي . بالتقسيم نجد أن

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

لنكتب $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}.$ إذن

$$x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

لنضع $x=0$ فنجد $1=-B$ ومنه $B=-1$. ثم لنضع $x=1$ فنجد $2=C$ ، أما إذا وضعنا $x=2$ فإننا نجد $3=2A+B+4C$ ومنه $A=-2$ ، وهكذا يكون :

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}dx = \int x\,dx + 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} - 2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$$

٥ – أوجد $\displaystyle\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx.$

إن $x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2).$ لنكتب $\dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+2}.$ إذن :

$$\begin{aligned} x^3+x^2+x+2 &= (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D) \end{aligned}$$

وبالتالي $A + C = 1,\ B + D = 1,\ 2A + C = 1, 2B + D = 2$. وبالحل الآن نجد أن $A = 0,\ B = 1, C = 1,\ D = 0$.

إذن

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{x^2+2} = \arctan x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$$

٩ – حل المعادلة $\int \frac{x^2\,dx}{a^4 - x^4} = \int k\,dt$ التى ترد فى الكيمياء الفيزيائية .

لنكتب $\frac{x^2}{a^4 - x^4} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} + \frac{Cx+D}{a^2+x^2}$ إذن

$$x^2 = A(a+x)(a^2+x^2) + B(a-x)(a^2+x^2) + (Cx+D)(a-x)(a+x)$$

إذا وضعنا $x = a$ نجد $a^2 = 4Aa^3$ ، ومنه $A = \frac{1}{4}a$ وإذا وضعنا $x = -a$ نجد $a^2 = 4Ba^2$

ومنه $B = \frac{1}{4}a$ وإذا وضعنا $x = 0$ نجد $0 = Aa^3 + Ba^3 + Da^2 = a^2/2 + Da^2$ ومنه $D = -\frac{1}{2}$

أما إذا وضعنا $x = 2a$ فإننا نجد $4a^2 = 15Aa^3 - 5Ba^3 - 6Ca^3 - 3Da^2$ ومنه $C = 0$

إذن:

$$\int \frac{x^2\,dx}{a^4 - x^4} = \frac{1}{4a}\int \frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a}\int \frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= -\frac{1}{4a}\ln|a-x| + \frac{1}{4a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

ومنه
$$\int k\,dt = kt = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| - \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

٧ – أوجد $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3}\,dx.$

لنكتب $\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$ إذن:

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex + F$$
$$= Ax^5 + Bx^4 + (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2$$
$$+ (4A + 2C + E)x + (4B + 2D + F)$$

ومنها نجد $A = 1,\ B = -1,\ C = 0,\ D = 0,\ E = 4,\ F = 0$. وهكذا فإن التكامل يساوى :

$$\int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx + 4\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

٨ – أوجد $\int \frac{2x^3+3}{(x^2+1)^2}\,dx.$

لنكتب $\frac{2x^3+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$ إذن :

$$2x^3 + 3 = (Ax+B)(x^2+1) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A+C)x + (B+D)$$

ومنها نجد $A=0,\ B=2,\ A+C=0,\ B+D=3.$ أي $A=0,\ B=2,\ C=0,\ D=1$ وهكذا يكون :

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

لحساب التكامل الثانى فى الطرف الأيمن نضع $x=\tan z$ فنجد

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sec^4 z} = \int \cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\sin 2z + C$$

ومنه
$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C = \frac{5}{2}\arctan x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C$$

مسائل اضافية

٩ — $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

١٠ — $\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

١١ — $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5}\ln|(x+1)(x-4)^4| + C$

١٢ — $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = x + \ln|(x+2)(x-4)^4| + C$

١٣ — $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \ln\left|\frac{x^{1/2}(x+2)^{3/2}}{x-1}\right| + C$

١٤ — $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$

١٥ — $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln(1-x)^6 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C$

١٦ — $\int \frac{dx}{x^3+x} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

١٧ — $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+3} + \arctan x + C$

١٨ — $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\right| + C$

١٩ — $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C$

٢٠ — $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x + \frac{4}{x^2+4} + C$

٢١ — $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C$

٢٢ — $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}\,dx = \ln\left|\frac{x^3-x^2+x}{(x+1)^2}\right| - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

٢٣ — $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{5}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + C$

٢٤ — $\int \frac{x^6+7x^5+15x^4+32x^3+23x^2+25x-3}{(x^2+x+2)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{3}{x^2+1} + \ln\frac{x^2+1}{x^2+x+2} + C$

٢٥ — $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x}\right| + C$ (ضع $e^x = u$)

٢٦ — $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right| + C$ (ضع $\cos x = u$)

٢٧ — $\int \frac{(2+\tan^2\theta)\sec^2\theta\,d\theta}{1+\tan^3\theta} = \ln|1+\tan\theta| + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\theta-1}{\sqrt{3}} + C$

الفصل الثلاثون

تعويضات متنوعة

إذا كانت داله التكامل جذرية باستثناء جذر من الشكل :

١ - $\sqrt[n]{au+b}$, فإن التعويض $au+b = z^n$ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية .

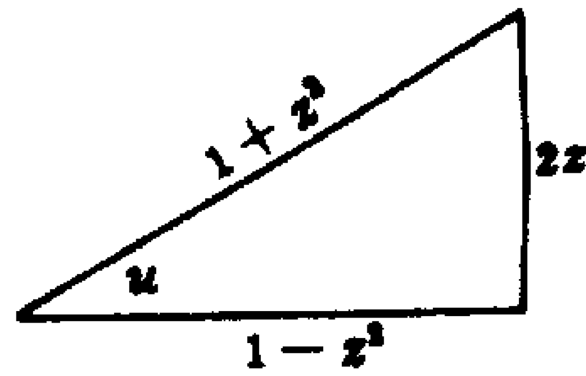
٢ - $\sqrt{q+pu+u^2}$, فإن التعويض $q+pu+u^2 = (z-u)^2$ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية .

٣ - $\sqrt{q+pu-u^2} = \sqrt{(\alpha+u)(\beta-u)}$, فإن التعويض $q+pu-u^2 = (\alpha+u)^2 z^2$ أو $q+pu-u^2 = (\beta-u)^2 z^2$ يقودنا إلى دالة تكامل جذرية .

انظر المسائل ١ - ٥

التعويض $u = 2\text{arc}\tan z$ يحول أي دالة جذرية في $\sin u$ و $\cos u$ إلى دالة جذرية في z لأن :

$$\sin u = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad \text{and} \quad du = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$



شكل ٣٠ - ١

نحصل على العلاقة الأولى والثانية من الشكل المرافق ٣٠ - ١ أما العلاقة الثالثة فنحصل عليها باشتقاق

$$u = 2\,\text{arc}\tan z$$

وبعد إجراء التكامل نعوض بـ $z = \tan {}^1/_2\, u$ للعودة إلى المتغير الأصلي .

انظر المسائل ٦ - ١٠

وهناك تعويضات أخرى مجدية يوحي بها غالبا شكل دالة التكامل

انظر المسائل ١١ - ١٢

مسائل محلولة

١ - أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$. لنضع $1-x = z^2$. إذن $x = 1-z^2$, $dx = -2z\,dz$, ومنه

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2z\,dz}{(1-z^2)z} = -2\int \frac{dz}{1-z^2} = -\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C$$

٢ - أوجد $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$. لنضع $x+2 = z^2$. إذن $x = z^2-2$, $dx = 2z\,dz$,

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2z\,dz}{z(z^2-4)} = 2\int \frac{dz}{z^2-4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + C$$

٣ – أوجد $\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}}$. لنضع $x = z^4$. إذن $dx = 4z^3\,dz$ ومنه :

$$\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}} = \int \frac{4z^3\,dz}{z^2 - z} = 4\int \frac{z^2}{z-1}\,dz = 4\int \left(z + 1 + \frac{1}{z-1}\right)dz$$
$$= 4(\tfrac{1}{2}z^2 + z + \ln|z-1|) + C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x} - 1)^4 + C$$

٤ – أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 2}}$. لنضع $x^2 + x + 2 = (z - x)^2$. إذن :

ومنه $x = \frac{z^2 - 2}{1 + 2z}$، $dx = \frac{2(z^2 + z + 2)\,dz}{(1 + 2z)^2}$، $\sqrt{x^2 + x + 2} = \frac{z^2 + z + 2}{1 + 2z}$،

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 2}} = \int \frac{\frac{2(z^2 + z + 2)}{(1 + 2z)^2}}{\frac{z^2 - 2}{1 + 2z} \cdot \frac{z^2 + z + 2}{1 + 2z}}\,dz = 2\int \frac{dz}{z^2 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}}\right| + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{x^2 + x + 2} + x - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x + \sqrt{2}}\right| + C$$

٥ – أوجد $\int \frac{x\,dx}{(5 - 4x - x^2)^{3/2}}$. لنضع $5 - 4x - x^2 = (5 + x)(1 - x) = (1 - x)^2 z^2$. إذن :

ومنه $x = \frac{z^2 - 5}{1 + z^2}$، $dx = \frac{12z\,dz}{(1 + z^2)^2}$، $\sqrt{5 - 4x - x^2} = (1 - x)z = \frac{6z}{1 + z^2}$،

$$\int \frac{x\,dx}{(5 - 4x - x^2)^{3/2}} = \int \frac{\frac{z^2 - 5}{1 + z^2} \cdot \frac{12z}{(1 + z^2)^2}}{\frac{216z^3}{(1 + z^2)^3}}\,dz = \frac{1}{18}\int \left(1 - \frac{5}{z^2}\right)dz$$
$$= \frac{1}{18}\left(z + \frac{5}{z}\right) + C = \frac{5 - 2x}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C$$

٦ – $$\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1 + z^2}}{1 + \frac{2z}{1 + z^2} - \frac{1 - z^2}{1 + z^2}} = \int \frac{dz}{z(1 + z)} = \ln|z| - \ln|1 + z| + C$$
$$= \ln\left|\frac{z}{1 + z}\right| + C = \ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x}{1 + \tan\frac{1}{2}x}\right| + C$$

٧ – $$\int \frac{dx}{3 - 2\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1 + z^2}}{3 - 2\frac{1 - z^2}{1 + z^2}} = \int \frac{2\,dz}{1 + 5z^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \arctan z\sqrt{5} + C$$
$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \arctan(\sqrt{5}\tan\tfrac{1}{2}x) + C$$

٨ – $$\int \sec x\,dx = \int \frac{1 + z^2}{1 - z^2} \cdot \frac{2\,dz}{1 + z^2} = 2\int \frac{dz}{1 - z^2} = \ln\left|\frac{1 + z}{1 - z}\right| + C = \ln\left|\frac{1 + \tan\frac{1}{2}x}{1 - \tan\frac{1}{2}x}\right| + C$$
$$= \ln|\tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)| + C$$

٩ – $$\int \frac{dx}{2 + \cos x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1 + z^2}}{2 + \frac{1 - z^2}{1 + z^2}} = 2\int \frac{dz}{3 + z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\frac{z}{\sqrt{3}} + C$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\tfrac{1}{2}x\right) + C$$

١٠ – $$\int \frac{dx}{5 + 4\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1 + z^2}}{5 + 4\frac{2z}{1 + z^2}} = \int \frac{2\,dz}{5 + 8z + 5z^2} = \frac{2}{5}\int \frac{dz}{(z + \frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}}$$
$$= \frac{2}{3} \arctan\frac{z + 4/5}{3/5} + C = \frac{2}{3} \arctan\frac{5\tan\frac{1}{2}x + 4}{3} + C$$

١١ – استخدم التعويض $1 - x^3 = z^2$ لتحصل على $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$. أن $x^3 = 1 - z^2$, ومنه $3x^2\,dx = -2z\,dz$, وبالتالى :

$$\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx = \int x^3\sqrt{1-x^3}\cdot x^2\,dx = \int(1-z^2)z(-\tfrac{2}{3}z\,dz) = -\frac{2}{3}\int(1-z^2)z^2\,dz$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right) + C = -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(2+3x^3) + C$$

١٢ – استخدم $x = \frac{1}{z}$ لتحصل على $\int\frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx$. ان $dx = -\frac{dz}{z^2}$, $\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{z}\sqrt{z-1}$, ومنه

$$\int\frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx = \int\frac{\frac{1}{z}\sqrt{z-1}\left(-\frac{dz}{z^2}\right)}{1/z^4} = -\int z\sqrt{z-1}\,dz$$

لنضع $z - 1 = s^2$ إذن :

$$\int z\sqrt{z-1}\,dz = -\int(s^2+1)s\cdot 2s\,ds = -2\left(\frac{s^5}{5}+\frac{s^3}{3}\right) + C$$

$$= -2\left(\frac{(z-1)^{5/2}}{5}+\frac{(z-1)^{3/2}}{3}\right) + C = -2\left(\frac{(1-x)^{5/2}}{5x^{5/2}}+\frac{(1-x)^{3/2}}{3x^{3/2}}\right) + C$$

مسائل اضافية

١٣ – $\int\frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx = 2\sqrt{x} - 2\arctan\sqrt{x} + C$

١٤ – $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$

١٥ – $\int\frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} = 2\sqrt{x+2} - 6\ln(3+\sqrt{x+2}) + C$

١٦ – $\int\frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\,dx = -x + \frac{4}{3}\left\{\sqrt{3x+2} - \ln(1+\sqrt{3x+2})\right\} + C$

١٧ – $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \ln\left|2\sqrt{x^2-x+1} + 2x - 1\right| + C$

١٨ – $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} = 2\arctan(\sqrt{x^2+x-1}+x) + C$

١٩ – $\int\frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} = \arcsin\frac{2x-1}{5} + C$

٢٠ – $\int\frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{(4x-x^2)^{3/2}}{6x^3} + C$

٢١ – $\int\frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/4}} = 2(x+1)^{1/2} - 4(x+1)^{1/4} + 4\ln(1+(x+1)^{1/4}) + C$

٢٢ – $\int\frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{1}{2}x+1}{\sqrt{3}} + C$

٢٣ – $\int\frac{dx}{1-2\sin x} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x-2-\sqrt{3}}{\tan\frac{1}{2}x-2+\sqrt{3}}\right| + C$

٢٤ – $\int\frac{dx}{3+5\sin x} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{3\tan\frac{1}{2}x+1}{\tan\frac{1}{2}x+3}\right| + C$

٢٥ – $\int\frac{dx}{\sin x-\cos x-1} = \ln\left|\tan\frac{1}{2}x - 1\right| + C$

٢٦ – $\int\frac{dx}{5+3\sin x} = \frac{1}{2}\arctan\frac{5\tan\frac{1}{2}x+3}{4} + C$

٢٧ – $\int\frac{\sin x\,dx}{1+\sin^2 x} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\tan^2\frac{1}{2}x+3-2\sqrt{2}}{\tan^2\frac{1}{2}x+3+2\sqrt{2}}\right| + C$

٢٨ – $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \ln\left|1+\tan\frac{1}{2}x\right| + C$

٢٩ – $\int\frac{dx}{2-\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3}\tan\frac{1}{2}x) + C$

٣٠ – $\int\sin\sqrt{x}\,dx = -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$

٣١ - $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} = -\arcsin\frac{1-x}{2x} + C$ ضع $x = 1/z$.

٣٢ - $\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1}\,dx = e^x - 3\ln(e^x+1) + C$ ضع $e^x + 1 = z$.

٣٣ - $\int \frac{\sin x\cos x}{1-\cos x}\,dx = \cos x + \ln(1-\cos x) + C$ ضع $\cos x = z$.

٣٤ - $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ ضع $x = 2/z$.

٣٥ - $\int \frac{dx}{x^2(4+x^2)} = -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8}\arctan\frac{2}{x} + C$

٣٦ - $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C$

٣٧ - $\int \frac{dx}{3(1-x^2) - (5+4x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + C$

الفصل الحادى والثلاثون

تكامل الدوال الزائدية

قواعد التكامل :

$$\int \sinh u\,du = \cosh u + C$$

$$\int \cosh u\,du = \sinh u + C$$

$$\int \tanh u\,du = \ln \cosh u + C$$

$$\int \coth u\,du = \ln|\sinh u| + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u + C$$

$$\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sinh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u > a > 0$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u^2 < a^2$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u^2 > a^2$$

مسائل محلولة

١ — $\int \sinh \tfrac{1}{2}x\,dx = 2\cosh \tfrac{1}{2}x + C$

٢ — $\int \cosh 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\sinh 2x + C$

٣ — $\int \operatorname{sech}^2(2x-1)\,dx = \tfrac{1}{2}\tanh(2x-1) + C$

٤ — $\int \operatorname{csch} 3x \coth 3x\,dx = -\tfrac{1}{3}\operatorname{csch} 3x + C$

٥ — $\int \operatorname{sech} x\,dx = \int \frac{1}{\cosh x}dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x}{1+\sinh^2 x}dx = \arctan(\sinh x) + C$

٦ — $\int \sinh^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x - 1)\,dx = \tfrac{1}{4}\sinh 2x - \tfrac{1}{2}x + C$

٧ — $\int \tanh^2 2x\,dx = \int (1-\operatorname{sech}^2 2x)\,dx = x - \tfrac{1}{2}\tanh 2x + C$

٨ — $\int \cosh^3 \tfrac{1}{2}x\,dx = \int (1+\sinh^2 \tfrac{1}{2}x)\cosh \tfrac{1}{2}x\,dx = 2\sinh \tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}\sinh^3 \tfrac{1}{2}x + C$

٩ — $\int \operatorname{sech}^4 x\,dx = \int (1-\tanh^2 x)\operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x - \tfrac{1}{3}\tanh^3 x + C$

١٠ — $\int e^x \cosh x\,dx = \int e^x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x}+1)\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + C$

١١ — $\int x \sinh x\,dx = \int x\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int xe^x\,dx - \frac{1}{2}\int xe^{-x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}(xe^x - e^x) - \frac{1}{2}(-xe^{-x} - e^{-x}) + C = x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \frac{e^x-e^{-x}}{2} + C$$

$$= x\cosh x - \sinh x + C$$

١٢ — $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\frac{2x}{3} + C$

١٣ — $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-25} = -\frac{1}{15}\coth^{-1}\frac{3x}{5} + C$

١٤ — أوجد $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$. نضع $x = 2\sinh z$. إذن $dx = 2\cosh z\,dz,\ \sqrt{x^2+4} = 2\cosh z$, ومنه :

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = 4\int \cosh^2 z\,dz = 2\int (\cosh 2z + 1)\,dz = \sinh 2z + 2z + C$$
$$= 2\sinh z\cosh z + 2z + C = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\sinh^{-1}\tfrac{1}{2}x + C$$

١٥ — أوجد $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. نضع $x = \operatorname{sech} z$. إذن $dx = -\operatorname{sech} z\tanh z\,dz,\ \sqrt{1-x^2} = \tanh z$, ومنه :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\operatorname{sech} z\tanh z}{\operatorname{sech} z\tanh z}\,dz = -\int dz = -z + C = -\operatorname{sech}^{-1} x + C$$

مسائل اضافية

١٦ — $\int \sinh 3x\,dx = \frac{1}{3}\cosh 3x + C$

١٧ — $\int \cosh \frac{1}{4}x\,dx = 4\sinh\frac{1}{4}x + C$

١٨ — $\int \coth\frac{2}{3}x\,dx = \frac{3}{2}\ln|\sinh\frac{2}{3}x| + C$

١٩ — $\int \operatorname{csch}^2(1+3x)\,dx = -\frac{1}{3}\coth(1+3x) + C$

٢٠ — $\int \operatorname{sech} 2x\tanh 2x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sech} 2x + C$

٢١ — $\displaystyle\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} + C$

٢٢ — $\int \cosh^2\frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}(\sinh x + x) + C$

٢٣ — $\int \coth^2 3x\,dx = x - \frac{1}{3}\coth 3x + C$

٢٤ — $\int \sinh^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + C$

٢٥ — $\int e^x\sinh x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x + C$

٢٦ — $\int e^{2x}\cosh x\,dx = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + C$

٢٧ — $\int x\cosh x\,dx = x\sinh x - \cosh x + C$

٢٨ — $\int x^2\sinh x\,dx = (x^2+2)\cosh x - 2x\sinh x + C$

٢٩ — $\int \sinh^3 x\cosh^2 x\,dx = \frac{1}{5}\cosh^5 x - \frac{1}{3}\cosh^3 x + C$

٣٠ — $\int \sinh x\ln\cosh^2 x\,dx = \cosh x(\ln\cosh^2 x - 2) + C$

٣١ — $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \sinh^{-1}\frac{x}{3} + C$

٣٢ — $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \cosh^{-1}\frac{x}{5} + C$

٣٣ — $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2} = \frac{1}{6}\tanh^{-1}\frac{3}{2}x + C$

٣٤ — $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^2-9} = -\frac{1}{12}\coth^{-1}\frac{4}{3}x + C$

٣٥ — $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{3} + C$

٣٦ — $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}} = \sinh^{-1}\frac{x-1}{4} + C$

٣٧ — $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+12x+5} = -\frac{1}{4}\coth^{-1}\left(x+\frac{3}{2}\right) + C$

٣٨ — $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx = \sinh^{-1}\frac{1}{2}x - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C$

٣٩ — $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = \sinh^{-1}x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

الفصل الثانى والثلاثون

تطبيقات على التكامل غير المحدد

إذا كانت المعادلة $y = f(x)$ لمنحنى مفروض فإن ميله m عند أية نقطة منه $P(x, y)$ يعطى بـ $m = f'(x)$ وبالعكس إذا كان ميل المنحنى عند نقطة منه $P(x, y)$ يعطى بـ $m = dy/dx = f'(x)$ فإننا نحصل بالتكامل على مجموعة منحنيات $y = f(x) + C$. ولكى نحصل على منحنى خاص من هذه المجموعة ينبغى أن نعين أو أن نعطى قيمة معينة لـ C ويمكن أن يتم هذا الأمر بأن نشترط فى المنحنى أن يمر بنقطة مفروضة .

انظر المسائل ١ – ٤

ان المعـــادلة : $s = f(t)$ ، حيث s بعد جسم ما عند اللحظة t عن نقطة ثابتة من مساره (المستقيم) ، تعين حركة الجسم تماما وتعطى سرعة الجسم وتسارعه عند اللحظة t بـ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) \ , \ v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$$

وبالعكس إذا كانت السرعة (التسارع) معروفة عند الزمن t وإذا كان الموضع (الموضع والسرعة) معروفا عند لحظة مفروضة ، عادة هى اللحظة $t = 0$ فن الممكن عندئذ الحصول على معادلة الحركة .

انظر المسائل ٧ – ١٠

مســــــائل محـــــلولة

١ – أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التى ميلها عند أية نقطة يساوى ضعفى الاحداثى السينى للنقطة بإشارة مخالفة . أوجد ذلك المنحنى من المجموعة الذى يمر بالنقطة $(1,1)$.

بما أنه من المفروض أن $dy / dx = -2x$ فإن $dy = -2x\,dx$ ومنه $\int dy = \int -2x\,dx,$ وبالتالى $y = -x^2 + C.$ وهذه معادلة مجموعة من القطاعات المكافئة .

وإذا وضعنا $x = 1, y = 1$ فى معادلة المجموعة نجد أن : $1 = -1 + C$ ومنه $C = 2$.

ومعادلة منحنى المجموعة الذى يمر بالنقطة $(1,1)$ هى $y = -x^2 + 2.$

٢ – أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التى ميلها عند أية نقطة $P(x, y)$ منها هو $m = 3x^2y$ ومعادلة منحنى المجموعة الذى يمر بالنقطة $(0,8)$

$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2y$ أو $\frac{dy}{y} = 3x^2\,dx.$ وبالتالى $y = x^3 + C = x^3 + \ln c$ ومنه $y = ce^{x^3}.$

وعندما يكون $x = 0$ و $y = 8$ نجد $8 = Ce^0 = C$. ومعادلة المنحنى المطلوب هى : $y = 8\,e^{x^3}$.

٣ – لنفرض أن $y'' = x^2 - 1$ عند كل نقطة من منحنى مفروض . أوجد معادلة المنحنى الذى يمر بالنقطة $(1,1)$ والذى يمس هناك المستقيم : $x + 12y = 13$.

إن $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 1.$ إذن $\int \frac{d}{dx}(y')\,dx = \int (x^2-1)\,dx$ ومنه $y' = \frac{x^3}{3} - x + C_1.$

وحيث أن الميل y' للمنحنى عند $(1,1)$ يساوي $-1/12$ وهو ميل المستقيم ، فإن $-\frac{1}{12} = \frac{1}{3} - 1 + C_1,\ C_1 = \frac{7}{12}.$

ومنه $C_1 = \frac{7}{12}$ وبالتالي :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}x^3 - x + \tfrac{7}{12},\quad \int dy = \int \left(\tfrac{1}{3}x^3 - x + \tfrac{7}{12}\right) dx,\quad y = \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{7}{12}x + C_2$$

ويكون عند النقطة $(1 , 1)$ ، $1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C_2$ ومنه $C_2 = 5/6$ والمعادلة المطلوبة هي :

$$y = \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{7}{12}x + \tfrac{5}{6}.$$

٤ — إن مجموعة المسارات المتعامدة لمجموعة معينة من المنحنيات هي مجموعة أخرى من المنحنيات يقطع كل منها كل منحنى من منحنيات المجموعة المفروضة بزاوية قائمة . أوجد معادلات المسارات المتعامدة لمجموعة القطاعات الزائدة $x^2 - y^2 = c$.

إن ميل القطع الزائد عند أية نقطة $P(x, y)$ منه يعطى بـ $m_1 = x/y$ وميل المسار المتعامد المار بـ P هو $m_2 = dy/dx = -y/x$. إذن :

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},\quad \text{ومنه}\quad |y| = -\ln|x| + \ln C' \quad \text{وبالتالي}\quad |xy| = C'$$

والمعادلة المطلوبة هي $x\,y = \pm C'$ أو ، اختصارا ، $xy = C$.

٥ — لنفرض أن كية معينة q تتزايد بمعدل متناسب مع الكية نفسها . فإذا كانت $q = 25$ عندما $t = 0$ و $q = 75$ عندما $t = 2$ فما هي q عندما $t = 6$.

بما أن $dq/dt = kq$ فإن $dq/q = k\,dt$ ومنه $\ln q = kt + \ln c$ أو $q = ce^{kt}.$

وعندما $t = 0$ يكون $q = 25 = ce^0 = c;$ وبالتالي $q = 25e^{kt}.$

وعندما $t = 2$ يكون $q = 25e^{2k} = 75;$ ومنه $e^{2k} = 3 = e^{1.10}$ و $k = .55$.

وعندما $t = 6$ يكون $q = 25e^{.55t} = 25e^{3.3} = 25(e^{1.1})^3 = 25(27) = 675.$

٦ — تتحول مادة إلى أخرى بمعدل يتناسب مع الكية غير المحولة . فإذا كانت الكية الأصلية 50 وأصبحت 25 عندما $t = 3$ فتى يبقى 1/10 من المادة غير محول .

لنفرض أن q تمثل الكية المحولة في اللحظة t . عندئذ :

$$\frac{dq}{50-q} = k\,dt,\quad \frac{dq}{dt} = k(50-q),\quad \ln(50-q) = -kt + \ln c,\ \text{and}\ 50-q = ce^{-kt}$$

وعندما $t = 0$ ، يكون $q = 0$ ومنه $c = 50$ وبالتالي $50 - q = 50e^{-kt}$.

وعندما $t = 3$ يكون $50 - q = 25 = 50\,e^{-3k}$ وبالتالي $e^{-3k} = .5 = e^{-.69}$, ومنه $k = .23$ و $50 - q = 50e^{-.23t}.$

وعندما تكون الكية غير المحولة تساوي 5 يكون $50e^{-.23t} = 5;$ ومنه $e^{-.23t} = .1 = e^{-2.30}$ وبالتالي $t = 10$.

٧ — تتدحرج كرة على مستوى بسرعة ابتدائية $8\ ms^{-1}$. فإذا كانت السرعة تتناقص بسبب الاحتكاك ، بمعدل $2\ ms^{-1}$ ، فما هي المسافة التي تقطعها الكرة ؟

إن $\frac{dv}{dt} = -2$ ومنه $v = -2t + C_1$. وبما أن $v = 8$ عندما $t = 0$ إذن $C_1 = 8$ ومنه $v = -2t + 8.$

ومن $v = ds/dt = -2t + 8$ نجد $s = -t^2 + 8t + C_2.$ وبما أن $s = 0$ عندما $t = 0$ إذن $C_2 = 0$

ومنها $s = -t^2 + 8t.$

وعندما $t = 4$ يكون $v = 0$ أي أن الكرة تتدحرج على المرج مدة أربع ثوان قبل أن تقف .

وعندما $t = 4$ يكون $s = -16 + 32 = 16\ \text{m}.$

٨ – رمى حجر من منطاد ساكن يعلو عن الأرض 3000 m لأسفل مباشرة بسرعة $15\ ms^{-1}$. أوجد موضع الحجر وسرعته بعد 20 seconds .

لنفرض أن الاتجاه الموجب لأعلى . وعندما يترك الحجر المنطاد يكون :

$$a = dv/dt = -9.8\ ms^{-2} \quad \text{ومنه} \quad v = -9.8t + C_1$$

وعندما $t = 0$ يكون $v = -15$ وبالتالى $C_1 = -15$. إذن $v = ds/dt = -9.8t - 15$
ومنه $s = -4.9t^2 - 15t + C_2$.

وعندما $t = 0$ يكون $s = 3000$ ومنه $C_2 = 3000$ وبالتالى $s = -4.9t^2 - 15t + 3000$.

وعندما $t = 20$ يكون $s = -4.9(20)^2 - 15(20) + 3000 = 750$ و $v = -9.8(20) - 15 = -211$.

إذن بعد 20 sec يكون الحجر على ارتفاع 750 m عن سطح الأرض وتكون سرعته $211\ ms^{-1}$.

٩ – تركت كرة تسقط من منطاد يعلو 196 m عن الأرض . فإذا كان المنطاد يرتفع لأعلى بمعدل $14.7\ ms^{-1}$ فأوجد :

(ا) أقصى ارتفاع عن الأرض تبلغه الكرة .

(ب) الوقت الذى تقضيه الكرة فى الجو .

(جـ) سرعة الكرة عندما تصطدم بالأرض .

لنفرض أن الاتجاه الموجب لأعلى . عندئذ :

$$a = dv/dt = -9.8\ ms^{-2} \quad \text{ومنه} \quad v = -9.8t + C_1$$

وعندما $t = 0$ يكون $v = 14.7$ ومنه $C_1 = 14.7$ إذن $v = ds/dt = -9.8t + 14.7$ وبالتالى :
$s = -4.9t^2 + 14.7t + C_2$.

وعندما $t = 0$ يكون $s = 196$ ومنه $C_2 = 196$ وبالتالى $s = -4.9t^2 + 14.7t + 196$.

(ا) وعندما $t = 3/2$ يكون $v = 0$ ومنه $s = -4.9(3/2)^2 + 14.7(3/2) + 196 = 207$. وأقصى ارتفاع عن الأرض تبلغه الكرة هو 207 m .

(ب) وعندما $s = 0$ يكون $-4.9t^2 + 14.7t + 196 = 0$ ومنه $t = -5,8$ والكرة تبقى فى الجو 8 sec .

(جـ) وعندما $t = 8$ يكون $v = -9.8(8) + 14.7 = -63.7$. والكرة تصطدم بالأرض بسرعة $63.7\ ms^{-1}$.

١٠ – ينسكب ماء بسرعة $0.6\sqrt{2gh}\ ms^{-1}$ من فتحة صغيرة تقع على عمق h m تحت سطح السائل ، حيث $g = 9.8\ ms^{-2}$. احسب الزمن اللازم لتفريغ خزان اسطوانى قائم إذا كان ارتفاعه 1.225 m ونصف قطره 0.3 m من خلال فتحة فى قاعة نصف قطرها 2.5 cm .

ليكن h هو عمق الماء عند اللحظة t . والماء الذى ينسكب فى زمن dt يكافىء اسطوانة ارتفاعها vdt m ونصف قطرها 1/80 m وحجمها $\pi(1/80)^2 v\,dt = 0.6\pi(1/80)^2\sqrt{2gh}\,dt\ m^3$

لنفرض $-dh$ m هو مقدار الهبوط المرافق لمستوى سطح الماء . إذن الحجم المرافق الذى يفقده الخزان هو $-\pi(0.3)^2 dh\ m^3$.

عندئذ $0.6\pi(1/80)^2 \cdot \sqrt{19.6h}\,dt = -\pi(0.3)^2\,dh$, أو $dt = -960\,dh/\sqrt{19.6h}$; $t = -1920\sqrt{h}/\sqrt{19.6} + C$.

وعندما $t = 0$ يكون $h = 1.225$ ومنه $C = 1920\sqrt{1.225}/\sqrt{19.6} = 480$; وبالتالى $t = -1920\sqrt{h}/\sqrt{19.6} + 480$.

ويصبح الخزان فارغاً عندما $h = 0$ ومنه $t = 480\ sec = 8\ mins.$

مســـــائل اضـــافية

١١ – أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي ميلها معطى فيما يلي ، ثم أوجد معادلة منحنى المجموعة الذي يمر بالنقطة المفروضة :

(ا) $m = 4x;\ (1,5)$ (جـ) $m = (x-1)^2;\ (3,0)$ (هـ) $m = x/y;\ (4,2)$ (ز) $m = 2y/x;\ (2,8)$

(ب) $m = \sqrt{x};\ (9,18)$ (د) $m = 1/x^2;\ (1,2)$ (و) $m = x^2/y^2;\ (3,2)$ (ح) $m = xy/(1+x^2);\ (3,5)$

الجـــواب :

(ا) $y = 2x^2 + C;\ y = 2x^2 + 3$ (هـ) $x^2 - y^2 = C;\ x^2 - y^2 = 12$

(ب) $3y = 2x^{3/2} + C;\ 3y = 2x^{3/2}$ (و) $3y^4 = 4x^3 + C;\ 3y^4 = 4x^3 - 60$

(جـ) $4y = (x-1)^4 + C;\ 4y = (x-1)^4 - 16$ (ز) $y = Cx^2;\ y = 2x^2$

(د) $xy = Cx - 1;\ xy = 3x - 1$ (ح) $y^2 = C(1+x^2);\ 2y^2 = 5(1+x^2)$

١٢ – (ا) إذا كان $y'' = 2$ لمنحنى مفروض فأوجد معادلته إذا كان هذا المنحنى ماراً بالنقط $P(2,6)$ وميله عندها مساوى 10 .

ج : $y = x^2 + 6x - 10$

(ب) إذا كان $y'' = 6x - 8$ لمنحنى مفروض ، فأوجد معادلته إذا فرضنا أنه يمر بالنقطة $P(1,0)$ وأن ميله عندها يساوى 4 .

(ج) : $y = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$

١٣ – يتحرك جسم على خط مستقيم بدأ من نقطة الأصل 0 عند اللحظة $t = 0$ بسرعة مفروضة v . أوجد المسافة التي يقطعها الجسم خلال الفترة من $t = t_1$ إلى $t = t_2$:

(ا) $v = 4t + 1;\ 0,4$ (جـ) $v = 3t^2 + 2t;\ 2,4$ (هـ) $v = 2t - 2;\ 0,5$

(ب) $v = 6t + 3;\ 1,3$ (د) $v = \sqrt{t} + 5;\ 4,9$ (و) $v = t^2 - 3t + 2;\ 0,4$

ج : (ا) 36 ، (ب) 30 ، (جـ) 68 ، (د) $37\ ^2/_3$ ، (هـ) 17 (و) 17/3

١٤ – أوجد معادلة مجموعة المنحنيات التي يكون لها تحت العامود عند أية نقطة مساوياً ضعفي الاحداثي السيني للنقطة .

ج : $y^2 = Cx$.

١٥ – أوجد معادلة مجموعة المسارات المتعامدة لمجموعة القطاعات المكافئة $y^2 = 2x + c$.

ج : $y = Ce^{-x}$

١٦ – يتحرك جسم على خط مستقيم بدأ من نقطة الأصل (عند اللحظة $t = 0$) بسرعة ابتدائية مفروضة v وتسارع a : أوجد s عند اللحظة t إذا كان :

(ا) $a = 32;\ v_0 = 2$ (ب) $a = -32;\ v_0 = 96$ (جـ) $a = 12t^2 + 6t;\ v_0 = -3$ (د) $a = 1/\sqrt{t};\ v_0 = 4$

ج : (ا) $s = 16t^2 + 2t$ (ب) $s = -16t^2 + 96t$ (جـ) $s = t^4 + t^3 - 3t$ (د) $s = \frac{4}{3}(t^{3/2} + 3t)$

١٧ – تتباطأ سيارة بمعدل $0.025\ ms^{-1}$. فما هي المسافة التي تقطعها السيارة قبل أن تقف إذا كانت سرعتها الإبتدائية $25\ kmh^{-1}$.

ج : $96.5\ m$.

١٨ – قذف جسم رأسيا لأعلى من موضع يعلو $34.3\ m$ عن الأرض بسرعة ابتدائية $29.4\ ms^{-1}$.

(أ) كم تكون سرعته عندما يكون على ارتفاع $73.5\ m$ عن الأرض ؟ .

(ب) متى يبلغ أعلى نقطة على مساره ؟ .

(ج) بأية سرعة يصطدم الجسم بالأرض ؟ .

ج : (أ) $9.8\ ms^{-1}$ ، (ب) بعد ثلاث ثوان ، (ج) $39.2 ms^{-1}$.

١٩ – ينزلق قالب من الثلج لأسفل على مستوى بتسارع $1\ ms^{-2}$. فإذا فرضنا أن طول المستوى $20\ m$. وإذا فرضنا أن قالب الثلج يصل نهاية المستوى بعد $5\ sec$. فما هي السرعة الإبتدائية للثلج وماهي سرعته عندما يكون على بعد $6\ m$ من نهاية المستوى .

ج : $1.5\ ms^{-1}$ ، $5.5\ ms^{-1}$.

٢٠ – ماهو التسارع الثابت المطلوب : (أ) كي يتحرك جسم $25\ m$ في $5\ sec$.

(ب) كي يتباطأ جسم بدءاً من السرعة $15\ ms^{-1}$ إلى حالة السكون بعد أن يقطع $5\ m$ ؟

ج : (أ) $2\ ms^{-2}$ ، (ب) $-22.5\ ms^{-2}$.

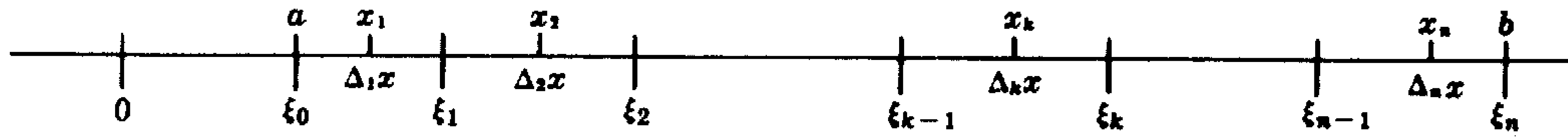
٢١ – تتكاثر البكتريا في مزرعة طبقاً للقانون $dN/dt = 0.25\ N$ فإذا كان $N = 200$ في البدء فما هي قيمة N عندما $t = 8$.

ج : 1478 .

الفصل الثالث والثلاثون

التكامل المحدد

التكامل المحدد : إذا كانت $a \le x \le b$ هي الفترة التي فيها الدالة المفروضة $f(x)$ متصلة . نقسم هذه الفترة إلى n فترات جزئية $h_1, h_2, \ldots, h_n$ وذلك بإدخال $n-1$ نقطة $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ حيث $a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-1} < b$, ولنرمز لـ a بـ ξ_0 ولـ b بـ ξ_n ولنرمز لطول الفترة الجزئية h_1 بـ $\Delta_1 x = \xi_1 - \xi_0$, ولـ h_2 بـ $\Delta_2 x = \xi_2 - \xi_1$, ..., ولـ h_n بـ $\Delta_n x = \xi_n - \xi_{n-1}$. (هذه الأطوال مسافات موجهة ، وكل واحدة منها موجبة بسبب المتباينة السابقة)



شكل ٣٣ — ١

لنختر على كل فترة جزئية نقطة — x_1 على الفترة الجزئية h_1 و x_2 على h_2 ,..., x_n على h_n — ولنشكل المجموع

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = f(x_1)\,\Delta_1 x + f(x_2)\,\Delta_2 x + \cdots + f(x_n)\,\Delta_n x \qquad (\text{i})$$

إن كل حد هو حاصل ضرب طول فترة جزئية بقيمة الدالة عند النقطة التي اخترناها على تلك الفترة الجزئية . لنرمز بـ λ_n لطول أطول فترة جزئية تظهر فى (i) ولنجعل بعد ذلك عدد الفترات الجزئية يزداد إلى مالا نهاية بحيث $\lambda_n \to 0$ (إحدى الطرق للوصول إلى هذا الهدف هو تنصيف كل فترة جزئية أصلية . ثم تنصيف كل فترة من هذه الفترات الناتجة ، وهكذا) . عندئذ :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x \qquad (\text{ii})$$

نصل إلى نفس النتيجة مهما كانت طريقة تقسيم الفترة $a \le x \le b$ إلى فترات جزئية شريطة أن يتحقق الشرط $\lambda_n \to 0$ ومهما كانت الكيفية التي نختار بها x_k فى الفترات الجزئية الناتجة .

إن برهان النظرية يخرج عن إطار هذا الكتاب . ولكننا سنرى فى المسائل ١ — ٣ كيفية حساب قيم النهاية لبعض الدوال المختارة $f(x)$. وعلينا أن ندرك ، على كل حال ، أنه من الصعب سلوك هذه الطريقة فى حساب قيمة النهاية لأية دالة اختيارية . بالإضافة إلى أنه من الضرورى ، كى ننجح فى حساب القيمة المذكورة هنا ، أن نتبع علاقة بين أطوال المجالات الجزئية (نعتبر هذه المجالات متساوية فى الأطوال) ونتبع أسلوباً معيناً فى اختيار النقط على الفترات الجزئية (كأن نختارها مثلا نقطة النهاية اليسرى أو نقطة النهاية اليمنى أو نقطة منتصف هذه الفترات الجزئية) .

ولقد تم الاتفاق على أن يكتب :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

حيث نقرأ الرمز $\int_a^b f(x)\,dx$ ، التكامل المحدد لـ $f(x)$ ، بالنسبة لـ x من $x = a$ إلى $x = b$ وتسمى الدالة $f(x)$ دالة التكامل . وتسمى a و b على الترتيب الحد الأدنى والحد الأعلى للتكامل .

أنظـر المسائل ١ — ٣

خواص التكاملات المحددة : إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين على فترة التكامل $a \le x \le b$ فإن :

١ — $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

٢ — $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

٣ — $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$ مهما كان الثابت

لبرهان هذه الخواص أنظر المسألة ٤

٤ — $$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

٥ — $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$ عندما $a < c < b$

٦ — نظرية القيمة المتوسطة الأولى :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_0)$$ لقيمة واحدة على الأقل $x = x_0$ بين a و b . للبرهان أنظر المسألة ٥

٧ — إذا كان $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$ ، فإن $\frac{d}{du}F(u) = f(u).$ للبرهان أنظر المسألة ٦

النظرية الأساسية فى الحساب التكاملى : إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وكانت $F(x)$ تكاملا غير محدد لـ $f(x)$. فعندئذ يكون :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

للبرهان أنظر المسألة ٧

مثـــال ١ :

(ا) لنأخذ $f(x) = c$ ، حيث c ثابت ، ولنأخذ $F(x) = cx$ ، عندئذ $\int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a).$

(ب) لنأخذ $f(x) = x$ و $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ، عندئذ $\int_0^5 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}.$

(ج) $f(x) = x^3$ و $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ ، عندئذ $\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$

قارن هذه النتائج بتلك التى سنحصل عليها فى المسائل ١ — ٣ . ويمكن القارىء أن يبرهن أنه يمكن استخدام أى تكامل غير محدود لـ $f(x)$ وذلك بتحليل (ج) أى $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

أنظـر المسائل ٨ — ٢٠

نظرية بلس : إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين متصلتين فى الفترة $a \le x \le b$ ، وإذا جزأنا الفترة إلى فترات جزئية كما فعلنا سابقاً واخترنا نقطتين على كل فترة جزئية (مثل x_k و x'_k فى الفترة الجزئية k فيكون عندئذ :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot g(x'_k)\, \Delta_k x = \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx$$

نلاحظ أولا أن النظرية صحيحة إذا تطابقت النقط x_k مع x'_k وأن قيمة النظرية تكمن فى أن النتيجة تبقى كما هى سواء أكانت نقطتا كل زوج مختلفتين أو منطبقتين ولعل شعورنا الحدسى بصحة هذه النظرية ينتج من كتابة :

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot g(x'_k)\, \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot g(x_k)\, \Delta_k x + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \{g(x'_k) - g(x_k)\}\, \Delta_k x$$

ويلاحظ أنه عندما $n \to \infty$ (أى $\Delta_k x \to 0$) فإن x_k و x'_k تقتربان من التطابق ، وحيث أن $g(x)$ متصلة فإن $g(x'_k) - g(x_k)$ يؤول إلى الصفر

مسائل محلولة

احسب قيمة التكامل المحدد فى كل من المسائل ١ – ٣ وذلك عن طريق تشكيل S_n ثم حساب النهاية عندما $n \to +\infty$,

١ – $\int_a^b c\, dx = c(b-a),$ حيث c ثابت .

نقسم الفترة $a \le x \le b$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها $\Delta x = (b-a)/n$. بما أن دالة التكامل $f(x) = c$ فإن $f(x_k) = c$ مهما كان اختيارنا للنقطة x_k على الفترة الجزئية k وأن :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} c(\Delta x) = (c + c + \cdots + c)(\Delta x) = nc \cdot \Delta x = nc\frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

وبالتالى فإن :

$$\int_a^b c\, dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} c(b-a) = c(b-a)$$

٢ – $\int_0^5 x\, dx = 25/2.$



شكل ٣٣ — ٢

نقسم الفترة $0 \le x \le 5$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها $\Delta x = 5/n$. ولنختر النقطة x_k بحيث تكون نقطة نهاية الطرف الأيمن لهذه الفترات الجزئية أى أن $x_1 = \Delta x, x_2 = 2\Delta x, \ldots, x_n = n\Delta x$ فيكون عندئذ :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot \Delta x)\, \Delta x = (1 + 2 + \cdots + n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ومنه :

$$\int_0^5 x\, dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2}$$

٣ — $\int_1^3 x^3\,dx = 20.$

نقسم الفترة $1 \le x \le 3$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية طول كل منها $\Delta x = 2/n$.

I — لنختر النقط x_k بحيث تكون نقطة نهاية الطرف الأيسر لهذه الفترات الجزئية كما فى الشكل ٣٣ — ٣ أى أن :

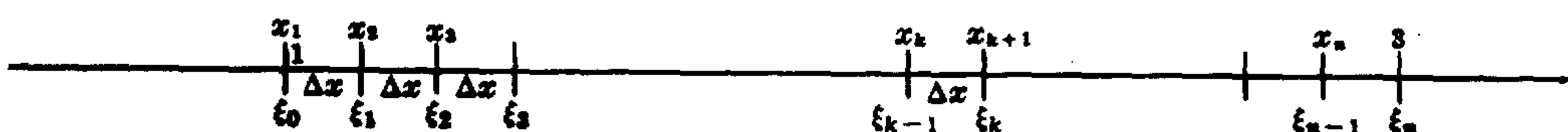
$$x_1 = 1,\ x_2 = 1+\Delta x,\ \ldots,\ x_n = 1+(n-1)\Delta x.$$

فيكون عندئذ :

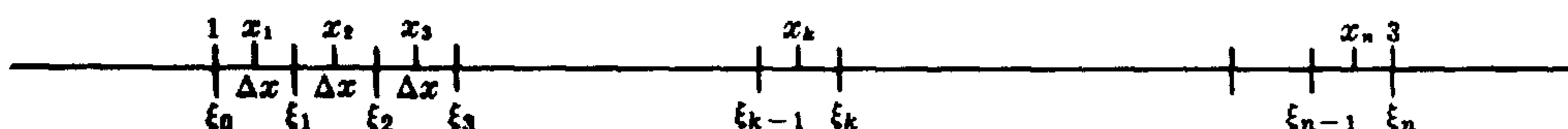
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = x_1^3\cdot\Delta x + x_2^3\cdot\Delta x + \cdots + x_n^3\cdot\Delta x\\
&= [1 + (1+\Delta x)^3 + (1+2\cdot\Delta x)^3 + \cdots + \{1+(n-1)\Delta x\}^3]\,\Delta x\\
&= [n + 3\{1+2+\cdots+(n-1)\}\Delta x + 3\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}(\Delta x)^2\\
&\qquad + \{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3\}(\Delta x)^3]\,\Delta x\\
&= \left[n + 3\,\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{n}\right) + 3\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)^2n^2}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{2}{n}\right)^3\right]\frac{2}{n}\\
&= 2 + \left(6-\frac{6}{n}\right) + \left(8-\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}\right) + \left(4-\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}\right) = 20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}
\end{aligned}$$

ومنه :

$$\int_1^3 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(20-\frac{26}{n}+\frac{8}{n^2}\right) = 20 \quad (28)$$



شكل ٣٣ — ٣



شكل ٣٣ — ٤

II — أما إذا اخترنا النقط x_k فى منتصفات الفترات الجزئية كما فى الشكل ٣٣ — ٤ أى أن

$x_1 = 1+\frac{1}{2}\Delta x,\ x_2 = 1+\frac{3}{2}\Delta x,\ \ldots,\ x_n = 1+\frac{2n-1}{2}\Delta x.$ فإنه يكون :

$$\begin{aligned}
S_n &= \left[(1+\tfrac{1}{2}\Delta x)^3 + (1+\tfrac{3}{2}\Delta x)^3 + \cdots + \left(1+\frac{2n-1}{2}\Delta x\right)^3\right]\Delta x\\
&= \Big[\{1 + 3(\tfrac{1}{2})\Delta x + 3(\tfrac{1}{2})^2(\Delta x)^2 + (\tfrac{1}{2})^3(\Delta x)^3\} + \{1 + 3(\tfrac{3}{2})(\Delta x) + 3(\tfrac{3}{2})^2(\Delta x)^2 + (\tfrac{3}{2})^3(\Delta x)^3\} + \cdots\\
&\qquad + \left\{1 + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)(\Delta x) + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^3(\Delta x)^3\right\}\Big]\Delta x\\
&= n\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4}(4n^3-n)\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{8}(2n^4-n^2)\left(\frac{2}{n}\right)^4\\
&= 2 + 6 + \left(8-\frac{2}{n^2}\right) + \left(4-\frac{2}{n^2}\right) = 20 - \frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

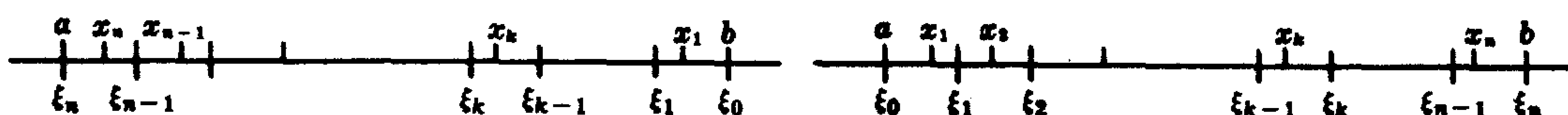
ومنه :

$$\int_1^3 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(20-\frac{4}{n^2}\right) = 20$$

٤ – برهن :

(أ) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$ إن طول فترة التكامل هنا تساوى الصفر وبالتالى فإن $\Delta x = 0$ و $0 = S_n$ و

$$\int_a^a f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0.$$



شكل ٣٣ — ٦ شكل ٣٣ — ٥

(ب) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$ لنقسم الفترة $a \le x \le b$ ولنختر النقط x_k كما فى الشكل ٣٣ – ٥ لـ $\int_a^b f(x)\,dx$. أما لـ $\int_b^a f(x)\,dx$ فإننا ندع الفترة (شكل ٣٣ – ٦) تماماً كما كان قبلا باستثناء النقط ξ_k و x_k فإننا نرقمها من اليمين إلى اليسار بدلا من اليسار إلى اليمين . والآن فإن المجموع S_n إذا حسب من الشكل ٣٣ – ٥ لايختلف عنه فيما لو حسب من الشكل ٣٣ – ٦ ، باستثناء إشارات $\Delta_k x$ حيث تكون موجبة فى التكامل الأول وسالبة فى الآخر .

وبالتالى فإن : $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

(جـ) $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$ لأية تجزئة للفترة ولأى اختيار للنقط على الفترات الجزئية نجد أن :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c\, f(x_k)\,\Delta_k x = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

ومنه : $$\int_a^b c\, f(x)\,dx = c\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = c\int_a^b f(x)\,dx$$

٥ – برهن نظرية القيمة المتوسطة الأولى لحساب التكامل . إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(x_0)$ لقيمة واحدة على الأقل $x = x_0$ واقعة بين a و b .

إن النظرية صحيحة فى حالة المثال (١) عندما كانت $f(x) = c$ حيث c ثابت . وبخلاف ذلك نفرض أن m هى القيمة المطلقة الصغرى للدالة $f(x)$ فى الفترة $a \le x \le b$ وأن M القيمة المطلقة العظمى ، فيكون لدينا لأية تجزئة مناسبة للفترة ولأى اختيار ما للنقط x_k على الفترات الجزئية .

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta_k x < \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x < \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta_k x$$

فإذا جعلنا $n\to+\infty$ نجد أن :

$$\int_a^b m\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b M\,dx$$

والتى تصبح ، استناداً إلى المسألة ١ ، على الشكل :

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$$

وبالتالى : $m < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < M$

ومنه نجد أن : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = N,$ حيث N عدد بين m و M . وبما أن $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ فإنه يبغى استناداً إلى النظرية ١ من الفصل الثالث أن توجد قيمة واحدة على الأقل لهذه الدالة بين m و M ، أى ينبغى أن توجد قيمة لـ x مثل $x = x_0$ ، بحيث يكون $f(x_0) = N$. وهكذا يكون :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = N = f(x_0) \qquad \text{ومنه} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_0)$$

٦ — برهن أنه إذا كان $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx,$ فإن $\frac{d}{du}F(u) = f(u).$

نستخدم طريقة المراحل لإيجاد المشتقة :

$$F(u+\Delta u) - F(u) = \int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx - \int_a^u f(x)\,dx$$

وهذا يأخذ ، باستخدام الخواص ٢ ، ٥ ، ٦ ، الشكل

$$F(u+\Delta u) - F(u) = \int_u^a f(x)\,dx + \int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx = \int_u^{u+\Delta u} f(x)\,dx$$
$$= f(u_0)\cdot\Delta u,$$

حيث $u < u_0 < u + \Delta u$ ومنه :

$$\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u_0)$$

وبالتالى

$$\frac{dF}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} f(u_0) = f(u)$$

حيث أن $\Delta u \to 0$ و $u_0 \to u$.

إن هذه الخاصة غالباً ما توضع على الشكل :

(i) إذا كان $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx,$ فإن $F'(x) = f(x).$

وما استعمال الحرف u هنا إلا مجرد محاولة لتجنب كل احتمال للالتباس بين الأدوار التى تلعبها x المختلفة . ويلاحظ جيداً أن $F(x)$ فى (i) هى دالة حدها الأعلى للتكامل هو x وأنه ليس حرفاً صامتاً كالحرف x فى $f(x)\,dx$. ويمكن ، بعبارة أخرى ، كتابة الخاصة المذكورة بالشكل :

إذا كان $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$ فإن $F'(x) = f(x).$

وينتج من (i) أن $F(x)$ هو بكل بساطة تكامل غير محدود لـ $f(x)$.

٧ — برهن أنه إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة فى الفترة $a \le x \le b$ وإذا كان $F(x)$ هو تكامل غير محدود لـ $f(x)$ فإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

باستخدام الصيغة الأخيرة فى المسألة ٦ يمكن كتابة :

$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x) + C$$

وعندما يكون الحد الأعلى للتكامل هو $x = a$ يكون :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 = F(a) + C \quad \text{ومنه} \quad C = -F(a)$$

وبالتالي فإن $\int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a)$ وعندما يكون الحد الأعلى للتكامل هو $x\ b$ نجد المطلوب

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

استخدم النظرية الأساسية لحساب التكامل لتحسب قيمة كل من التكاملات :

٨ — $$\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}$$

٩ — $$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right) = \frac{10}{9}$$

١٠ — $$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big]_1^4 = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2$$

١١ — $$\int_{-2}^{3} e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big]_{-2}^{3} = -2(e^{-3/2} - e) = 4.9904$$

١٢ — $$\int_{-6}^{-10} \frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\,\Big]_{-6}^{-10} = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$$

١٣ — $$\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \sin x\,dx = -\cos x\,\Big]_{\pi/2}^{3\pi/4} = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

١٤ — $$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x\,\Big]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right] = \frac{1}{4}\pi$$

١٥ — $$\int_{-5}^{-3} \sqrt{x^2-4}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x + \sqrt{x^2-4}|\right]_{-5}^{-3} = \frac{5}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}\sqrt{5} - 2\ln\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{21}}$$

١٦ — $$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big]_{-1}^{2} = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{5} - \ln 2\right) = \frac{1}{6}\ln 0.1$$

١٧ — $$\int_1^e \ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = (e\ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$$

١٨ — أوجد $\int_3^6 xy\,dx$ عندما $x = 6\cos\theta,\ y = 2\sin\theta.$

نعبر أولا عن x و y و dx بدلالة θ و $d\theta$ ونستبدل بحدود التكامل قيم الوسيط المرافقة ثم نحسب قيمة التكامل الناتج .

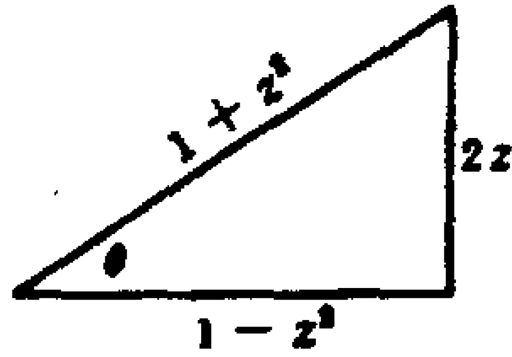
إن $dx = -6\sin\theta\,d\theta$ وعندما $x = 6\cos\theta = 6,$ يكون $\theta = 0$ وعندما $x = 6\cos\theta = 3,$ يكون $\theta = \pi/3$ وبالتالي

$$\int_{2}^{0} x\,y\,dx = \int_{\pi/3}^{0} (6\cos\theta)(2\sin\theta)(-6\sin\theta)\,d\theta$$

$$= -72\int_{\pi/3}^{0} \sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = -24\sin^3\theta\Big]_{\pi/3}^{0} = -24\{0-(\sqrt{3}/2)^3\} = 9\sqrt{3}$$

١٩– أوجد $\int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta}$. إن : $\int \frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{5+4\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{9+z^2}$

لنعين حدى z للتكامل $(\theta = 2\arctan z)$ عندما $\theta = 0$ فإن $z = 0$ وعندما $\theta = 2\pi/3$ فإن $\arctan z = \pi/3$ ومنه $z = \sqrt{3}$.



شكل ٣٣ — ٧

وبالتالى فإن : $\int_0^{2\pi/3} \frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dz}{9+z^2} = \frac{2}{3}\arctan\frac{z}{3}\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9}$

٢٠– أوجد $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1-\sin x}$. إن : $\int \frac{dx}{1-\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{1-\frac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{(1-z)^2}$

وعندما $x = 0$ فإن $\arctan z = 0$ ومنه $z = 0$ وعندما $x = \pi/3$ فإن $\arctan z = \pi/6$ ومنه $z = \sqrt{3}/3$

وبالتالى فإن :

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\sin x} = 2\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dz}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z}\Big]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\sqrt{3}/3} - 2 = \sqrt{3}+1$$

مسائل اضافية

٢١– احسب قيمة تكامل المسألة ١ : $\int_a^b c\,dx$ وذلك بتقسيم الفترة $a \le x \le b$ إلى n من الفترات الجزئية أطوالها $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$. ولاحظ أن $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k x = b - a$.

٢٢– احسب قيمة تكامل المسألة ٢ : $\int_0^5 x\,dx$ مستخدماً فترات جزئية أطوالها متساوية (أ) مختاراً النقط x_k بحيث تمثل نقط نهايات الأطراف اليسرى للفترات الجزئية.

(ب) مختاراً النقط x_k بحيث تمثل منتصفات الفترات الجزئية (ج) مختاراً النقط x_k على نهاية الثلث الأول لكل هذه الفترات أى أن $x_1 = \frac{1}{3}\Delta x,\ x_2 = \frac{4}{3}\Delta x, \ldots$

٢٣– احسب $\int_1^4 x^2\,dx = 21$ مستخدماً فترات جزئية أطوالها متساوية ومختاراً النقط x_k بحيث تمثل (أ) نقط نهايات الأطراف اليمنى للفترات الجزئية (ب) نقط نهايات الأطراف اليسرى للفترات الجزئية (ج) نقط منتصفات الفترات الجزئية.

٢٤– استخدم نفس الاختيار للفترات الجزئية والنقط كما فى المسألة ٢٣ (أ) لتحسب $\int_1^4 x\,dx$ و $\int_1^4 (x^2+x)\,dx$,

وأثبت أن $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

٢٥– احسب قيمة $\int_1^2 x^2\,dx$ وقيمة $\int_2^4 x^2\,dx$، ثم قارن المجموع بنتيجة المسألة ٢٣ لتثبت أن

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$ عندما $a < c < b$

٢٦– احسب $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1.$

إرشاد: $S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{k\,\Delta x}\,\Delta x = e^{\Delta x}(e-1)\dfrac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$ والنهاية $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$

هي صيغة غير محددة من النمط $0/0$.

٢٧– برهن خاصتي التكامل المحدود ؛ ٥ ، ٥ :

٢٨– استخدم النظرية الأساسية لتحسب :

(ا) $\int_0^2 (2+x)\,dx = 6$

(ب) $\int_0^2 (2-x)^2\,dx = 8/3$

(جـ) $\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx = 9$

(د) $\int_{-1}^2 (1-t^2)t\,dt = -9/4$

(هـ) $\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = -116/15$

(و) $\int_0^5 \sqrt{1+3x}\,dx = 26$

(ز) $\int_3^4 \dfrac{dx}{25-x^2} = \dfrac{1}{5}\ln\dfrac{3}{2}$

(ح) $\int_{-1/2}^{0} \dfrac{x^2\,dx}{x^2+x+1} = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{9} - \dfrac{5}{8}$

(ط) $\int_2^4 \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx = 4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}$

(ى) $\int_8^{27} \dfrac{dx}{x-x^{1/3}} = \dfrac{3}{2}\ln\dfrac{8}{3}$

(ك) $\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx = 40/3$

(ل) $\int_0^3 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2$

(م) $\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx = 1/30$

(ن) $\int_4^8 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}} = 6$

(س) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{4}a^2\pi$

(ع) $\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(ف) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \ln 2 + \frac{1}{2}\pi - 2$

(ص) $\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}t\,dt = 4$

(ق) $\int_0^{\pi/3} x^2 \sin 3x\,dx = \frac{1}{27}(\pi^2-4)$

(ر) $\int_0^{\pi/2} \dfrac{dx}{3+\cos 2x} = \dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{8}$

٢٩– بين أن : $\int_{-5}^{-3} \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int_3^5 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$

٣٠– احسب قيمة $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y\,dx = 3\pi,$ بفرض أن $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta.$

٣١– احسب $\int_1^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{15}{2} + \frac{1}{2}\ln 2,$ بفرض أن $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x.$

٣٢– احسب $\int_2^3 \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{2}\,e^2(e-1),$ بفرض أن $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t.$

٣٣ – استخدم صيغ الاختزال المناسبة (الفصل ٢٦) كي تبرهن صيغة واليس :

(إذا كان n عدداً زوجياً وأكبر من الصفر) .

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(n-3)(n-1)}{2\cdot 4\ldots(n-2)n}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(وإذا كان n عدداً فردياً وأكبر من الواحد) .

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(n-3)(n-1)}{1\cdot 3\ldots(n-2)n}$$

(إذا كان كل من m و n زوجيين وأكبر من الصفر) .

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x\cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(m-1)\cdot 1\cdot 3\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots(m+n-2)(m+n)}\cdot\frac{\pi}{2}$$

(إذا كان m عدداً فردياً وأكبر من الواحد) .

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(m-3)(m-1)}{(n+1)(n+3)\ldots(n+m)}$$

(إذا كان n عدداً فردياً وأكبر من الواحد) .

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(n-3)(n-1)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+n)}$$

٣٤ــ احسب :

(ا) $\int_3^{11}\sqrt{2x+3}\,dx = 98/3$

(ب) $\int_0^{\pi/4}\frac{\cos 2x-1}{\cos 2x+1}\,dx = \frac{1}{4}\pi - 1$

(جـ) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-5\cos x+4} = \frac{1}{3}\ln\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$

(د) $\int_{-2}^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx = \ln\frac{3-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{15}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{15}$

(هـ) $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin 2x} = \ln\sqrt{3}$

(و) $\int_1^3 \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx = 3\ln(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}$

(ز) $\int_{-1}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln(\sqrt{2}-1)$

(ح) $\int_{1/4}^{3/4}\frac{(x+1)\,dx}{x^2(x-1)} = 4\ln\frac{1}{3} - \frac{8}{3}$

(ط) $\int_4^9\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 4\ln\frac{3}{4} - 1$

(ى) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}(e^2+1)$

(ك) $\int_{-5}^{-3}\frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

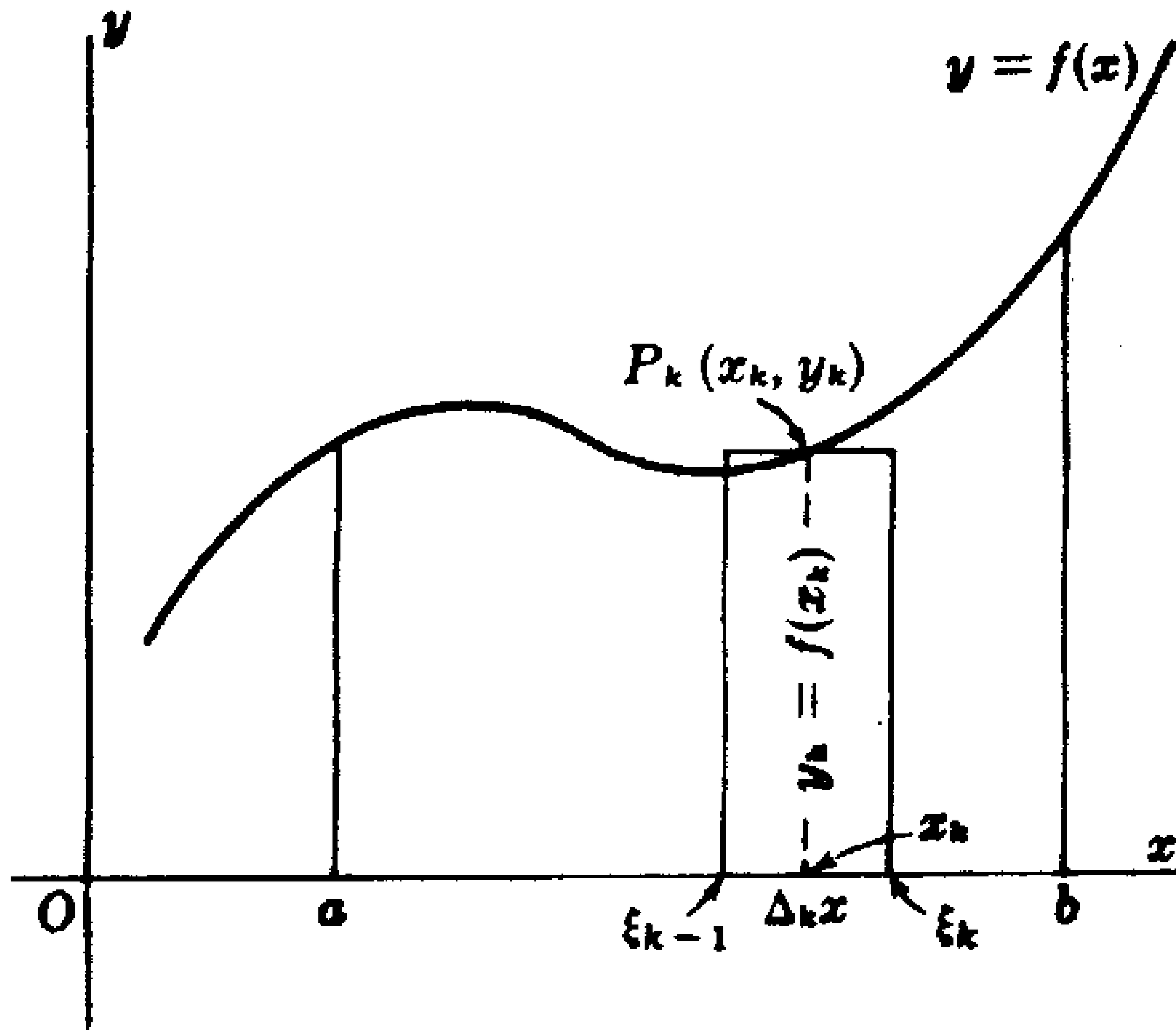
(ل) $\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{2+\tan x} = \frac{1}{5}\ln\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{10}$

الفصل الرابع والثلاثون

حساب المساحات المستوية بالتكامل

المساحات كنهاية مجموع : إذا كانت $f(x)$ متصلة وغير سالبة فى الفترة $a \leq x \leq b$ ، فإنه يمكن إعطاء التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$ تفسيراً هندسياً . لنفرض أن الفترة $a \leq x \leq b$ قسمت إلى فترات جزئية وأننا اخترنا نقطاً x_k كما فى الفصل السابق . لنرفع على المحور x أعمدة كل من أطراف الفترات الجزئية $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n = b$

فينقسم بذلك الجزء المستوى المحدود من أعلى بالمنحنى $y = f(x)$ ومن أسفل بالمحور x ومن الجانبين بالمستقيمين $x = b$ و $x = a$ إلى n شريحة . لنقرب كل شريحة إلى مستطيل قاعدته القاعدة السفلى للشريحة وارتفاعه يساوى الاحداثى الصادى المقام على النقطة x_k فى الفترة الجزئية ، وتكون مساحة المستطيل الموضح فى الشكل ٣٤ — ١ مساوية $f(x_k)\,\Delta_k x$ وتمثل عندئذ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$ مجموع مساحات المستطيلات الـ n .



شكل ٣٤ — ١

ونهاية هذا المجموع $\int_a^b f(x)\,dx,$ ، أى عندما يزداد عدد الشرائح إلى مالا نهاية وفق الأسلوب الموصوف فى الفصل ٣٣ تساوى حسب التعريف مساحة قطعة المستوى المشار إليها أعلاه أو اختصاراً هى المساحة تحت المنحنى من $x = a$ إلى $x = b$

أنظر المسألتين ١ — ٢

وبالمثل : إذا كانت $x = g(y)$ متصلة وغير سالبة فى الفترة $c \leq y \leq d$ فإن التكامل المحدد $\int_c^d g(y)\,dy$ يمثل حسب التعريف مساحة قطعة السطح المستوى المحددة بالمنحنى $x = g(y)$ والمحور y والمستقيمين $y = d$ و $y = c$

أنظر المسألة ٣

وإذا كانت $y = f(x)$ متصلة وغير موجبة فى الفترة $a \leq x \leq b$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ يكون سالباً مشيراً بذلك إلى أن المساحة واقعة تحت المحور السينى . وبشكل مماثل إذا كانت $x = g(y)$ متصلة وغير موجبة فى الفترة $c \leq y \leq d$ ، فإن $\int_c^d g(y)\,dy$ يكون سالباً مشيراً بذلك إلى أن المساحة واقعة على يسار المحور الصادى .

أنظر المسألة ٤

وإذا غيرت $y = f(x)$ إشارتها فى الفترة $a \leq x \leq b$ أو إذا غيرت $x = g(y)$ إشارتها فى الفترة $c \leq y \leq d$ فإن المساحة تحت المنحنى تعطى بمجموع تكاملين محددين أو أكثر .

أنظر المسألة ٥

حساب المساحات بالتكامل : إن الخطوات الضرورية لتشكيل التكامل المحدود الذى يعطى المساحة المطلوبة هى :

١ – توضيح برسم تقريبي (ا) المساحة التي نبحث عنها (ب) تمثيل الشرائح (ج) المستطيل المقرب . سنميز ، كما هو متعارف ، الفترة الجزئية بطول يساوي Δx (أو Δy) والنقطة x_k (أو y_k) واقعة على هذه الفترة الجزئية في منتصفها .

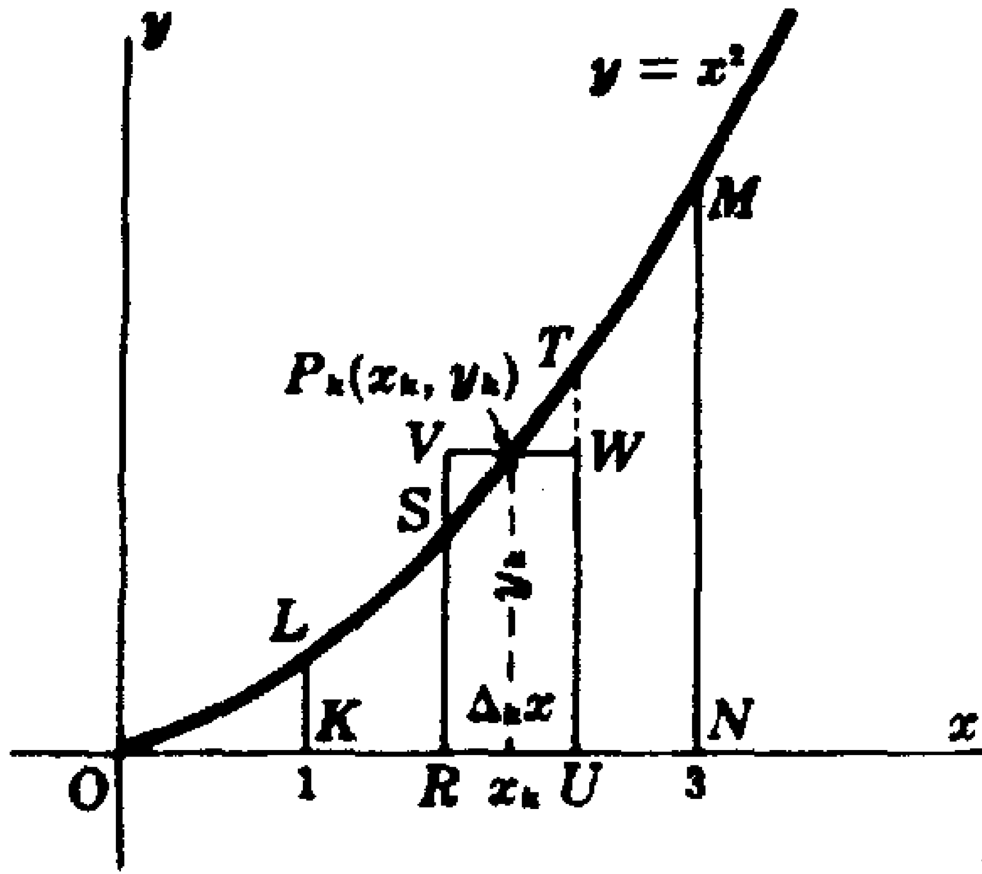
٢ – اكتب مساحة المستطيل المقرب وشكل مجموع المستطيلات الـ n .

٣ – نفرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى مالا نهاية ويمكن تطبيق النظرية الأساسية من الفصل السابق .

أنظر المسائل ٦ – ١٤

مسائل محلولة

١ – أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^2$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$.



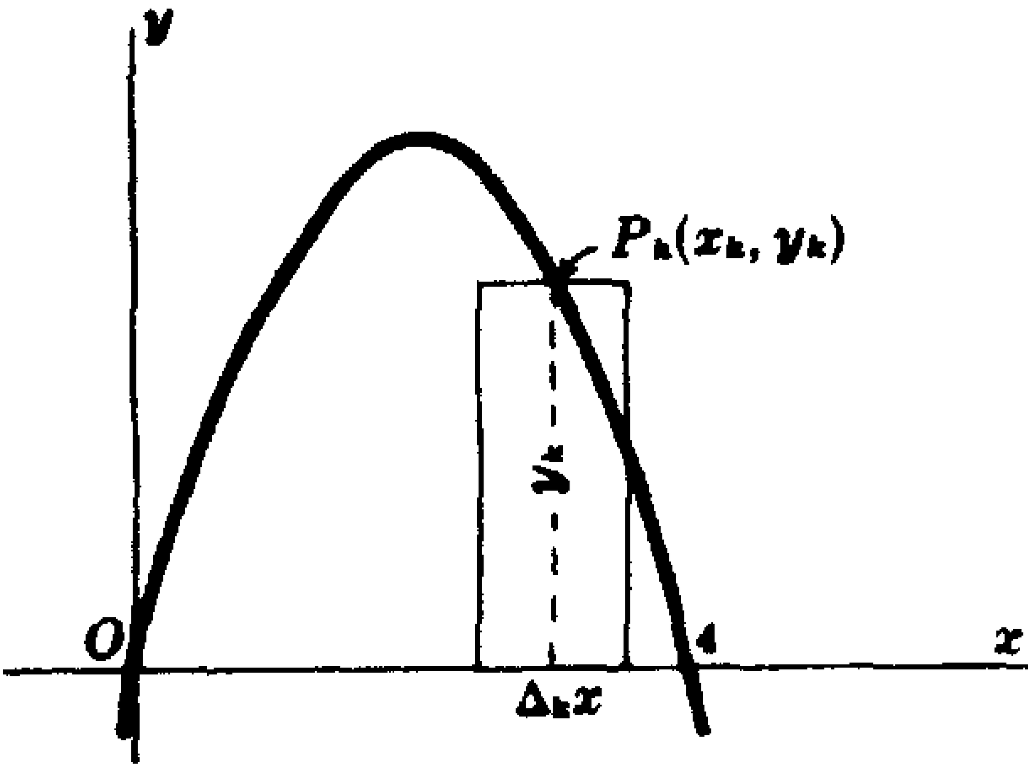
شكل ٣٤ – ٢

من الشكل ٣٤ – ٢ نجد أن المساحة التي نبحث عنها هي $KLMN$ والشريحة الممثلة هي $RSTU$ والمستطيل المقرب هو $RVWUF$ ، وقاعدة هذا المستطيل $\Delta_k x$ وارتفاعه $y_k = f(x_k) = x^2_k$ ومساحته $x^2_k \cdot \Delta_k x$ إذن :

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta_k x = \int_1^3 x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ sq}\cdot\text{un}.$$

٢ – أوجد المساحة الواقعة فوق المحور السيني وتحت القطع المكافىء . $y = 4x - x^2$



شكل ٣٤ – ٣

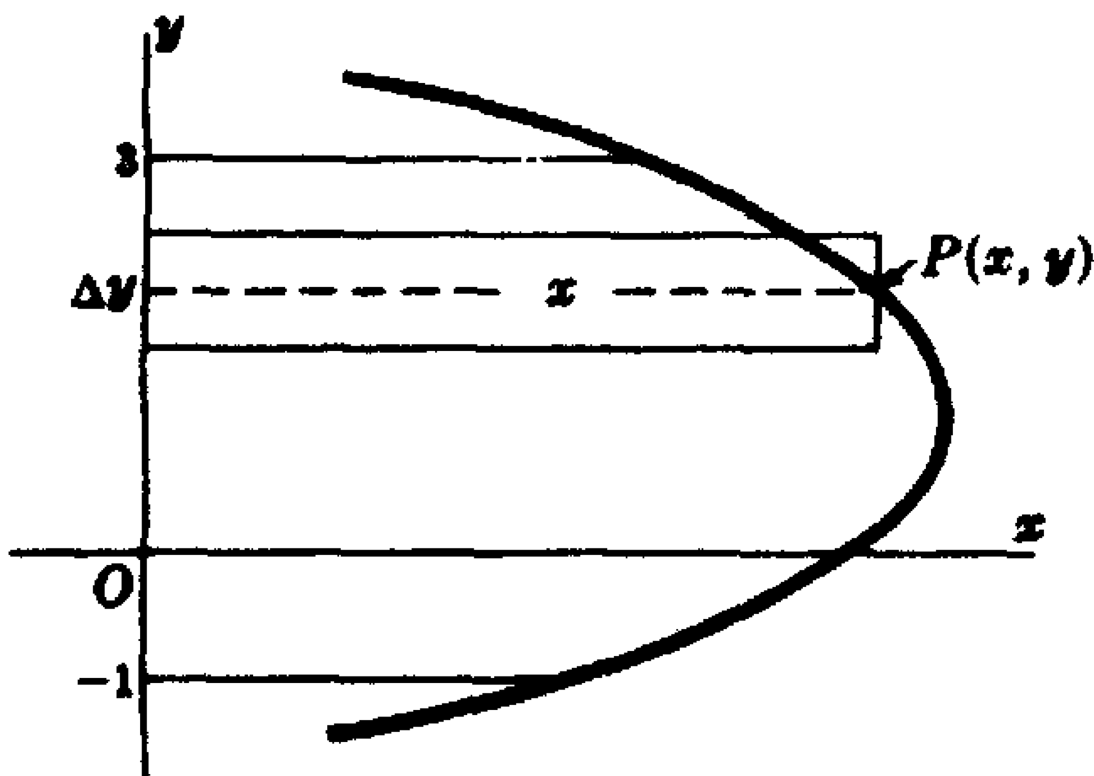
المنحنى المفروض يقطع المحور السيني عند $x = 0$ و $x = 4$ وعندما نستخدم الشرائح الرأسية تكون هاتان القيمتان حدى التكامل . وعرض المستطيل المقرب الموضح في الشكل ٣٤ – ٣ يساوي $\Delta_k x$ وارتفاعه $y_k = 4x_k - x^2_k$ ومساحته $(4x_k - x^2_k) \cdot \Delta_k x$ إذن :

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (4x_k - x_k^2)\, \Delta_k x = \int_0^4 (4x - x^2)\, dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 32/3 \text{ sq}\cdot\text{un}.$$

من الممكن اختصار الحسابات على أن لا يغيب أبداً عن بالنا الطريقة المشروحة أعلاه بكاملها ، فنرى أنه بالإمكان صياغة التكامل المحدود ، بغض النظر عن حدى التكامل ، بمجرد تشكيل مساحة المستطيل المقرب .

٣ – أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافىء $x = 8 + 2y - y^2$ والمحور الصادي والمستقيمان $y = 3$ و $y = -1$.

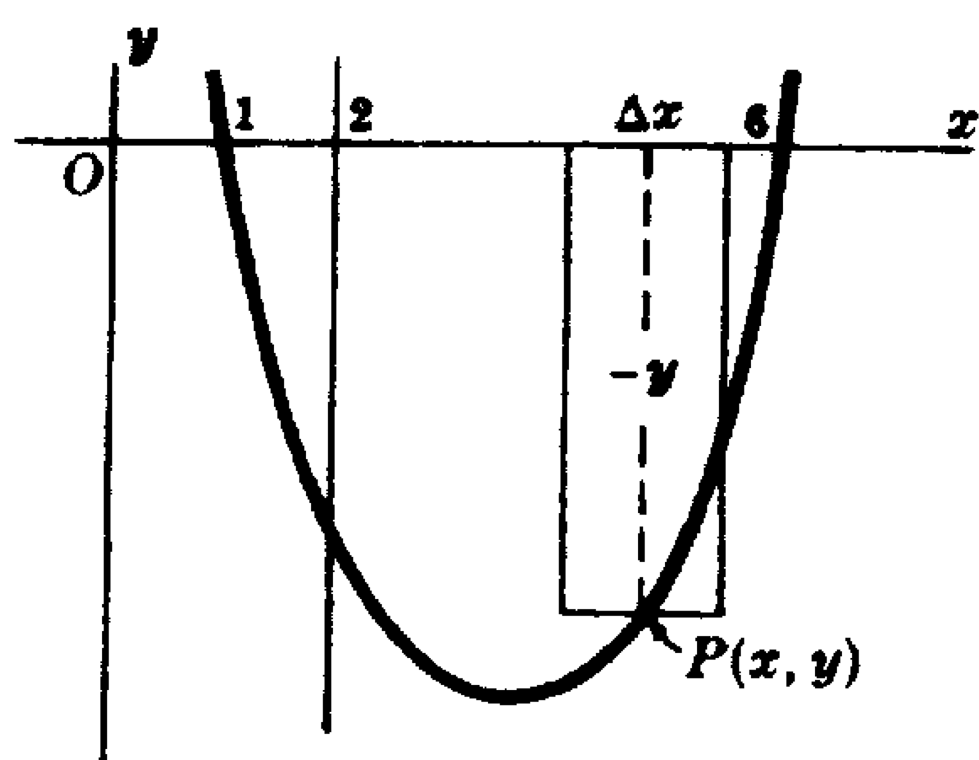


شكل ٣٤ – ٤

نقسم المساحة هنا إلى شرائح أفقية. فيكون عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٣٤ – ٤ هو Δy وطوله $x = 8 + 2y - y^2$ ومساحته هي $(8 + 2y - y^2)\, \Delta y$ والمساحة المطلوبة هي :

$$\int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\, dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{92}{3} \text{ sq. un.}$$

٤ – أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2 - 7x + 6$ والمحور السيني والمستقيمين $x = 2$ و $x = 6$.



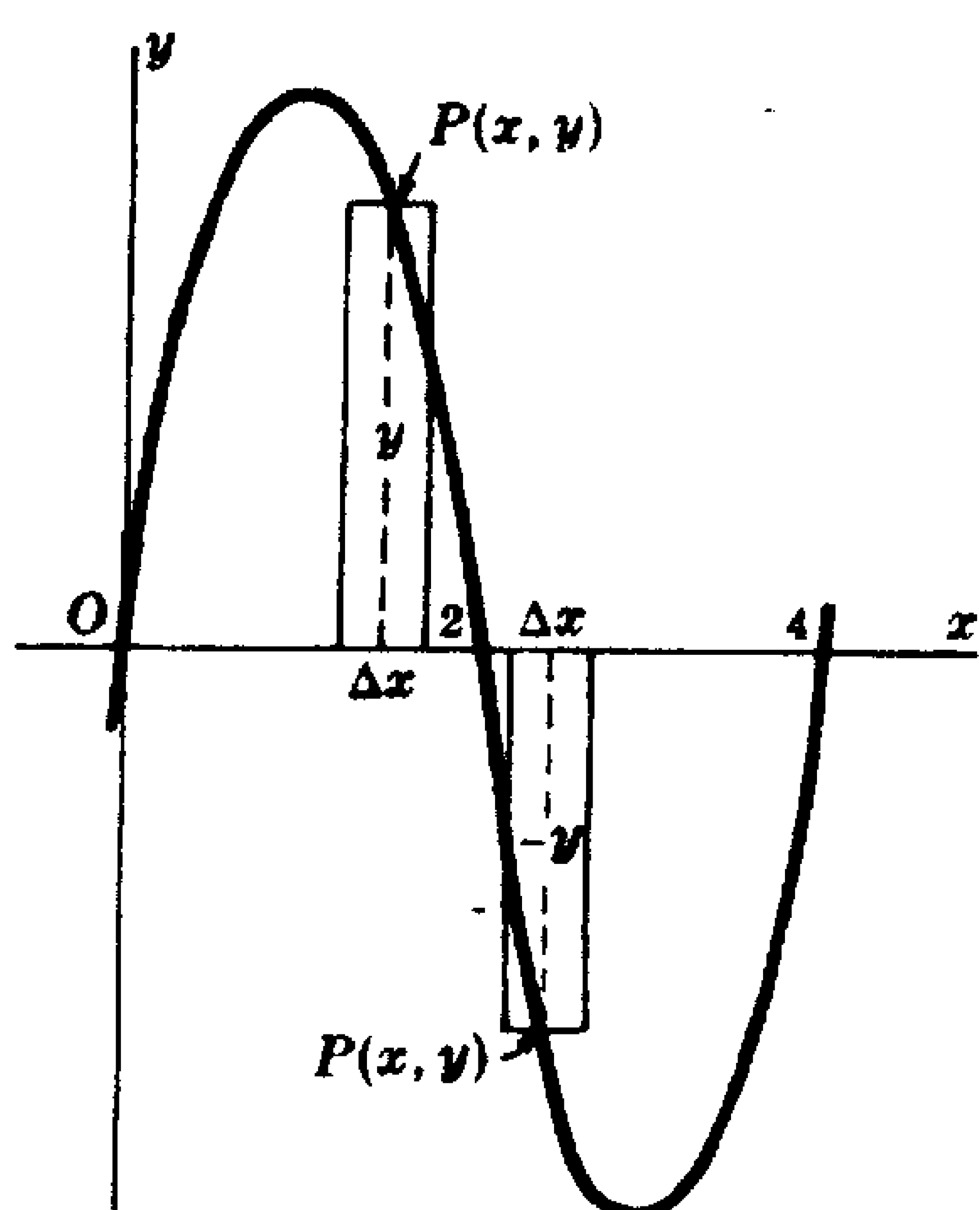
شكل ٣٤ — ٥

إن عرض المستطيل المقرب المبين بالشكل ٣٤ – ٥ يساوى Δx وارتفاعه $(x^2 - 7x + 6) - = y - $ ومساحته هى $-(x^2 - 7x + 6)\Delta x$ والمساحة المطلوبة إذن هى :

$$A = \int_2^6 -(x^2 - 7x + 6)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\Bigg]_2^6$$

$$= \frac{56}{3} \text{ square units}$$

٥ – أوجد المساحة بين المنحنى $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ والمحور السينى .



شكل ٣٤ — ٦

المنحنى يقطع المحور السينى عند $x = 0, x = 2, x = 4$ كما هو مبين فى الشكل ٣٤ – ٦ . باستخدام الشرائح الرأسية ، نرى أن مساحة المستطيل المقرب الذى تقع قاعدته فى الفترة $0 < x < 2$ تساوى $(x^3 - 6x^2 + 8x)\Delta x$. وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع فوق المحور السينى مساوية لـ $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. وأما مساحة المستطيل المقرب الذى تقع قاعدته فى الفترة $2 < x < 4$ فتساوى $-(x^3 - 6x^2 + 8x)\Delta x$ وبذلك تكون مساحة ذلك الجزء من السطح الواقع تحت المحور السينى مساوية $\int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. وهكذا تكون المساحة المطلوبة .

$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$$

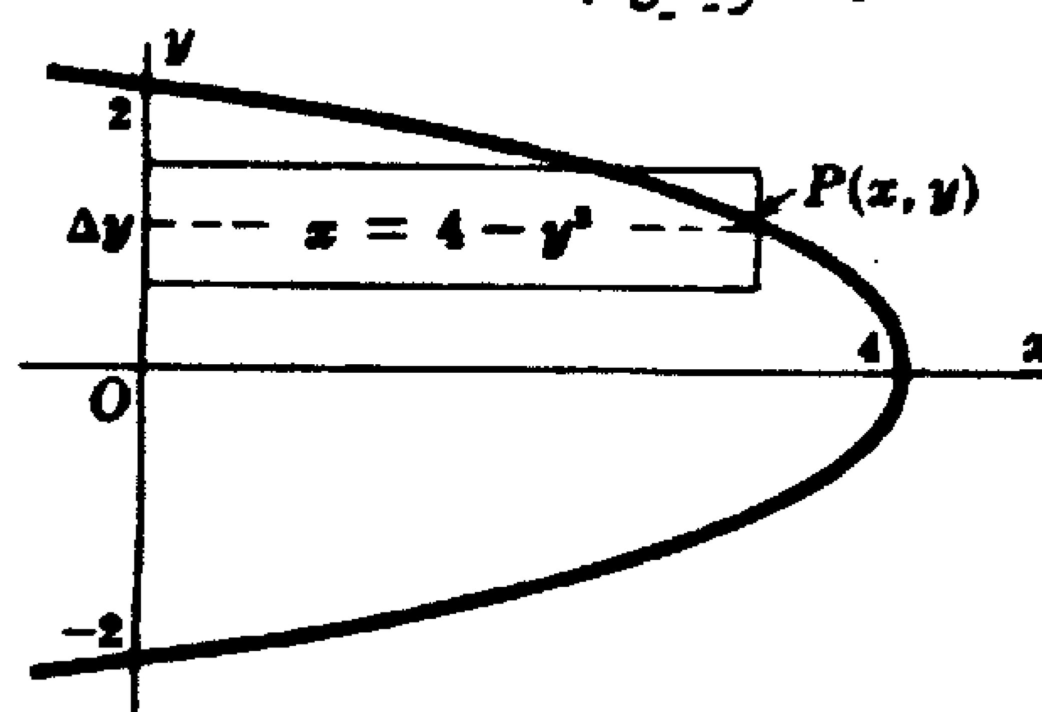
$$= 4 + 4 = 8 \text{ square units}$$

إن حساب المساحة بتكاملين محددين هنا ضرورى لأن دالة التكامل تغير إشارتها فى فترة التكامل .

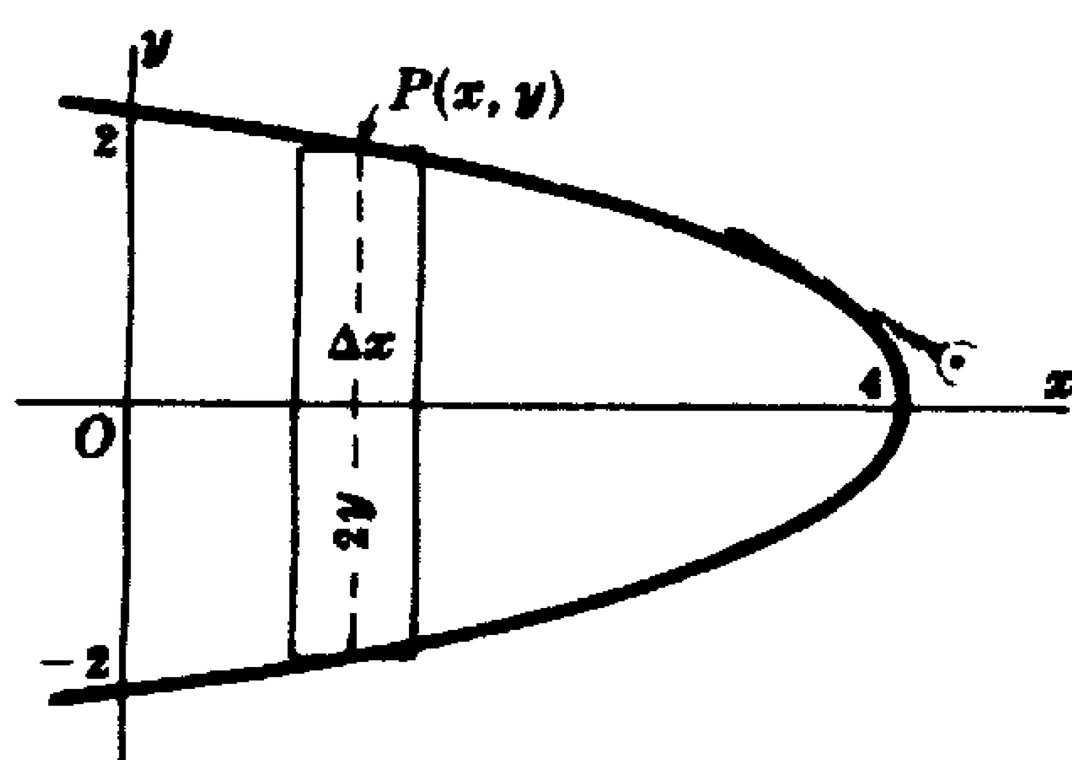
أما إذا فاتنا أن نلاحظ هذا الأمر فإننا نصل إلى النتيجة الخاطئة $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = 0$.

٦ – أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $x = 4 - y^2$ والمحور الصادى .

إن القطع المكافئ يقطع المحور السينى عند النقطة $(4, 0)$ والمحور الصادى عند النقطتين $(0, 2)$ و $(0, -2)$ ولحل المسألة سنسلك طريقين :



شكل ٣٤ — ٧ (أ)



شكل ٣٤ — ٧ (ب)

طريقة الشرائح الأفقية : أن عرض المستطيل المقرب الموضح فى الشكل ٣٤-٧ (ا) يساوى Δy وطوله $4-y^2$ ومساحته $(4-y^2)\Delta y$. وأما حدى التكامل فهما $y=-2$ و $y=4$ ويلاحظ من ناحية أخرى ، أن المساحة الواقعة فوق المحور السينى مساوية للمساحة الواقعة تحت نفس المحور . وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة هى :

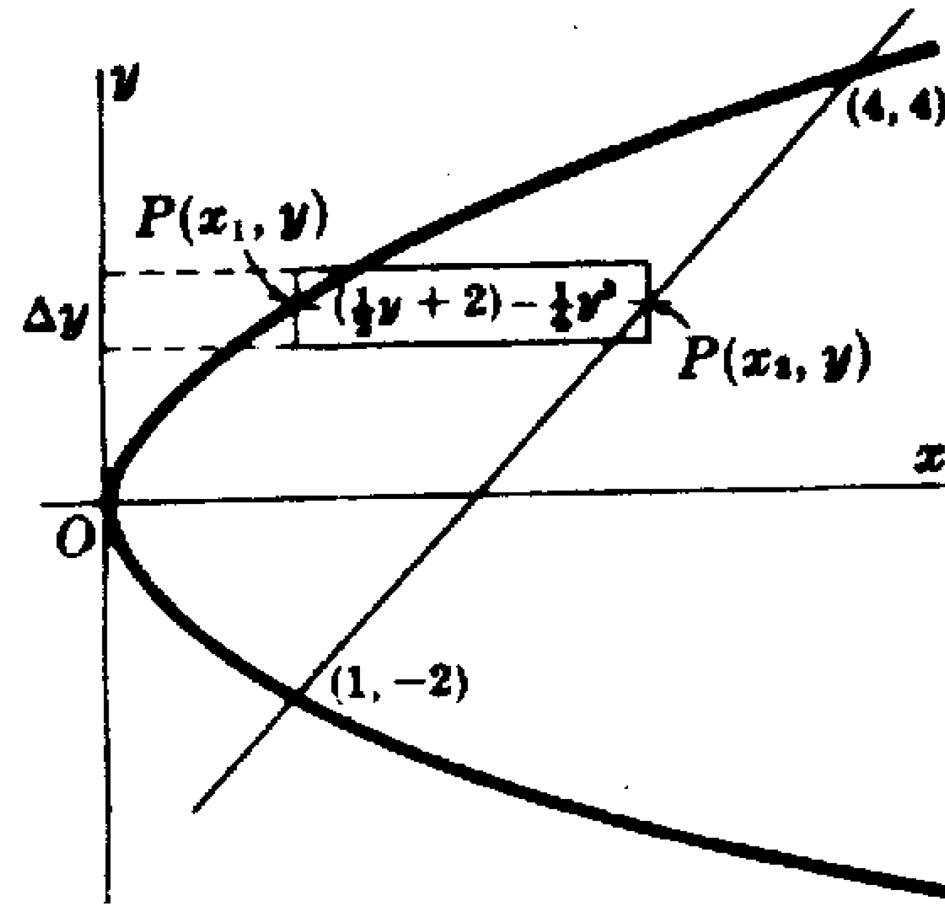
$$\int_{-2}^{2}(4-y^2)\,dy = 2\int_{0}^{2}(4-y^2)\,dy = 2\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Big]_0^2 = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

طريقة الشرائح الرأسية : إن عرض المستطيل المقرب الموضح فى الشكل ٣٤ - ٧ (ب) يساوى Δx وارتفاعه $2y = 2\sqrt{4-x}$ ومساحته $2\sqrt{4-x}\,\Delta x$. وأما حدى التكامل فهما $x=0$ و $x=4$ ولذلك فإن المساحة المطلوبة هى :

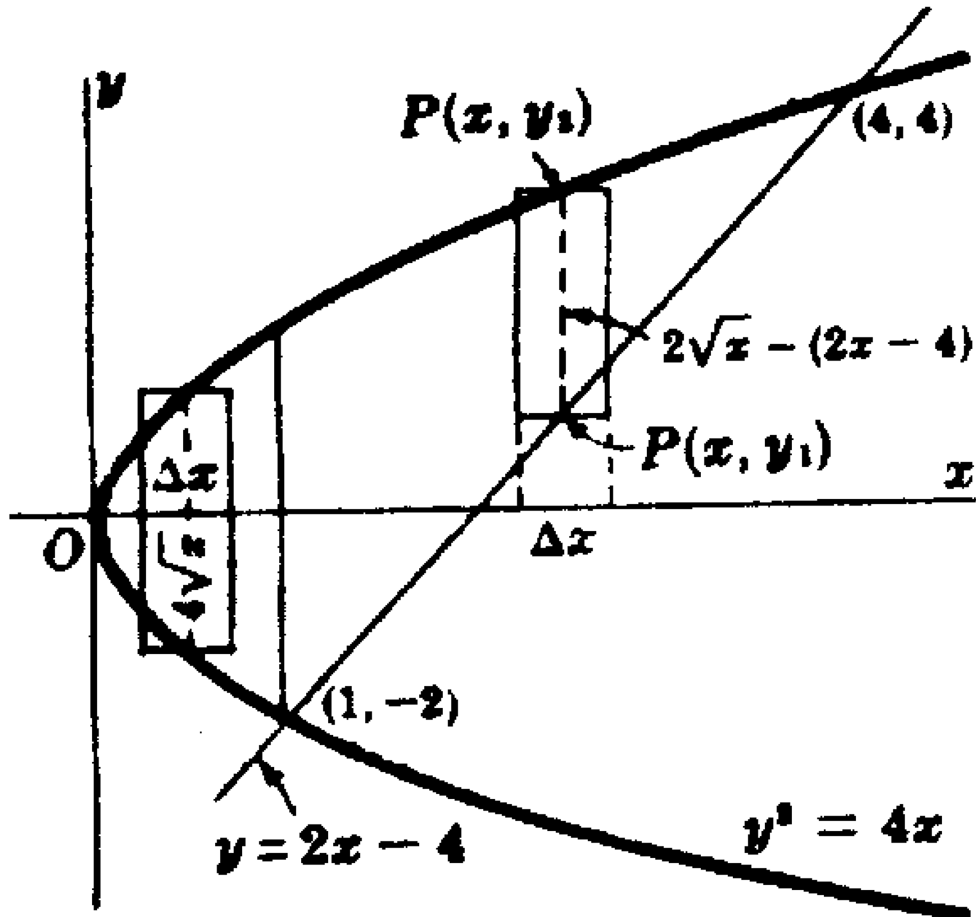
$$\int_{0}^{4} 2\sqrt{4-x}\,dx = -\frac{4}{3}(4-x)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{32}{3} \text{ square units}$$

٧ - أوجد المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 4x$ والمستقيم $y = 2x-4$.

يقطع المستقيم المفروض القطع المكافئ عند النقطتين $(1,-2)$ و $(4,4)$ ويلاحظ من الشكلين التاليين أنه عندما نستخدم الشرائح الرأسية فإن بعض هذه الشرائح ينطلق من المستقيم إلى القطع والبعض الآخر ينطلق من أحد فرعى القطع إلى الفرع الآخر ، فى حين إذا استخدمنا الشرائح الأفقية فإن كل شريحة تنطلق من القطع إلى المستقيم . سنقدم فيما يلى الحل بالطريقتين لنبين أفضلية أحدهما على الآخر ولنبين أنه ينبغى قبل البدء فى تكوين التكامل المحدد أن نمعن النظر فى طريقتى التجزئة إلى شرائح .



شكل ٣٤ ـ ٨ (ا)



شكل ٣٤ ـ ٨ (ب)

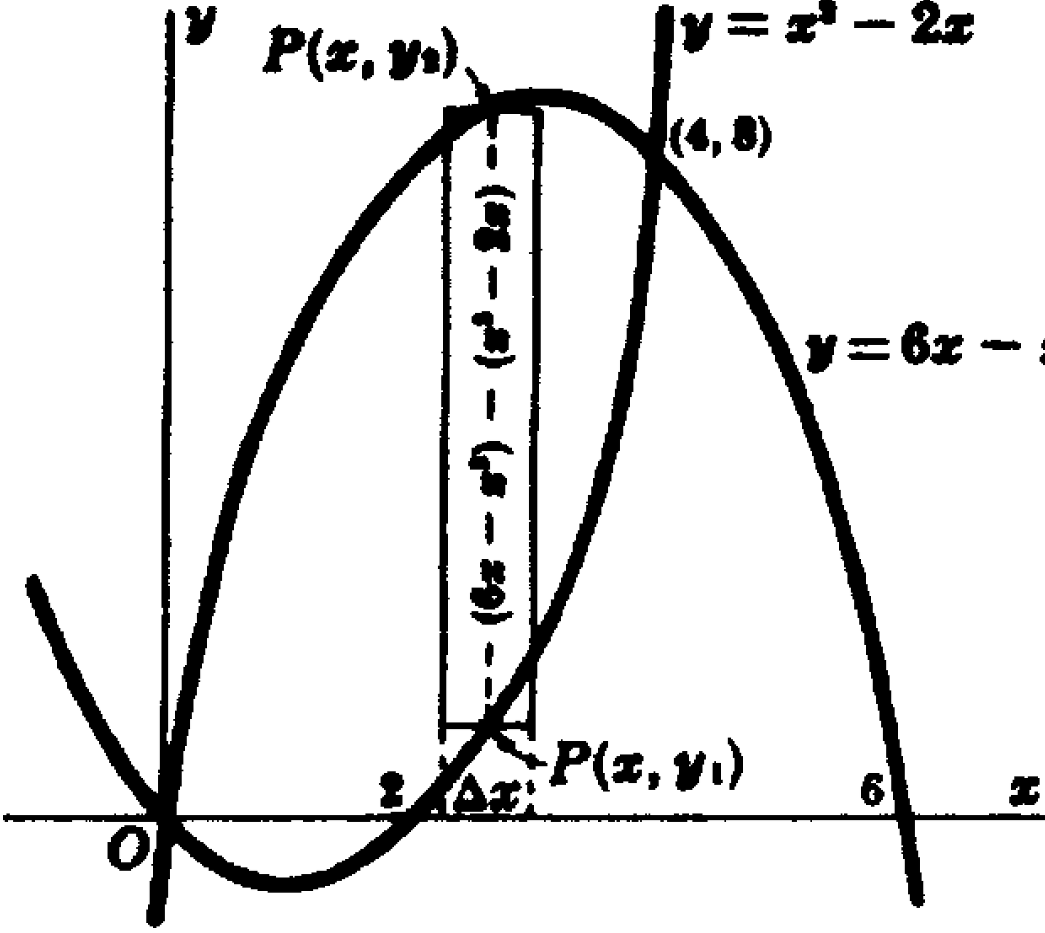
طريقة الشرائح الأفقية : بالنظر إلى الشكل ٣٤-٨ (ا) نجد أن عرض المستطيل المقرب الموضح فى الشكل يساوى Δy وطوله يساوى (قيمة x على المستقيم) - (قيمة x على القطع المكافئ) = $(1/2\,y+2)-1/4\,y^2 = 2+1/2\,y-1/4\,y^2$ ومساحته تساوى $(2+{}^1/_2\,y-{}^1/_4\,y^2)\Delta y$ والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_{-2}^{4}\left(2+\tfrac12 y-\tfrac14 y^2\right)dy = \left[2y+\frac{y^2}{4}-\frac{y^3}{12}\right]_{-2}^{4} = 9 \text{ squaro units}$$

طريقة الشرائح الرأسية : بالنظر إلى الشكل ٣٤ - ٨ (ب) . وبتقسيم المساحة بالمستقيم $x = 1$ فيكون عرض المستطيل المقرب على يسار هذا المستقيم Δx وطوله (باستخدام التناظر) يساوى $2y = 4\sqrt{x}$ ، ومساحته $4\sqrt{x}\,\Delta x$ ويكون عرض المستطيل المقرب على يمين المستقيم المذكور Δx وطوله $2\sqrt{x}-(2x-4) = 2\sqrt{x}-2x+4$ ومساحته $(2\sqrt{x}-2x+4)\Delta x$ والمساحة المطلوبة تساوى :

$$\int_{0}^{1}4\sqrt{x}\,dx + \int_{1}^{4}(2\sqrt{x}-2x+4)\,dx = \left[\frac{8}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2}-x^2+4x\right]_1^4 = \frac{8}{3}+\frac{19}{3} = 9 \text{ sq. un.}$$

٨ – أوجد المساحة المحددة بالقطعين المكافئين $y = 6x - x^2$ و
$y = x^2 - 2x.$



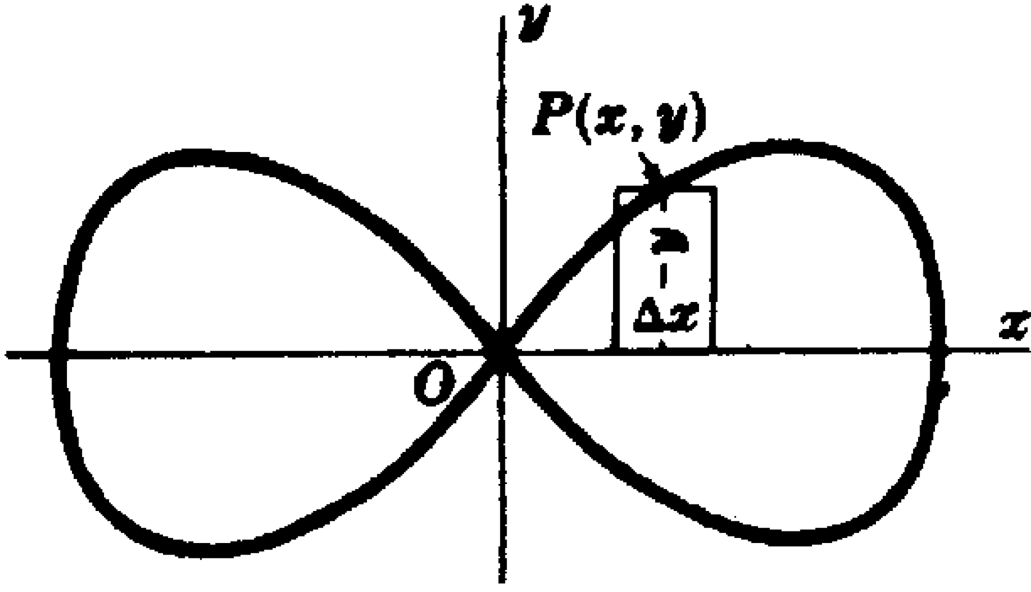
شكل ٣٤ ـ ٩

يتقاطع القطعان عند النقطتين (0, 0) و (4, 8) ، ويلاحظ مقدما أن الشرائح الرأسية هي التي تعطينا الحل الأسهل .

إن عرض المستطيل المقرب Δx وارتفاعه يساوى (قيمة y على الحد الأعلى) - (قيمة y على الحد الأدنى) .
$(6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$.
ومساحته تساوى $(8x - 2x^2)\,\Delta x$ والمساحة المطلوبة هي

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 = \frac{64}{3} \text{ square units}$$

٩ – أوجد المساحة الواقعة داخل المنحنى $y^2 = x^2 - x^4$.



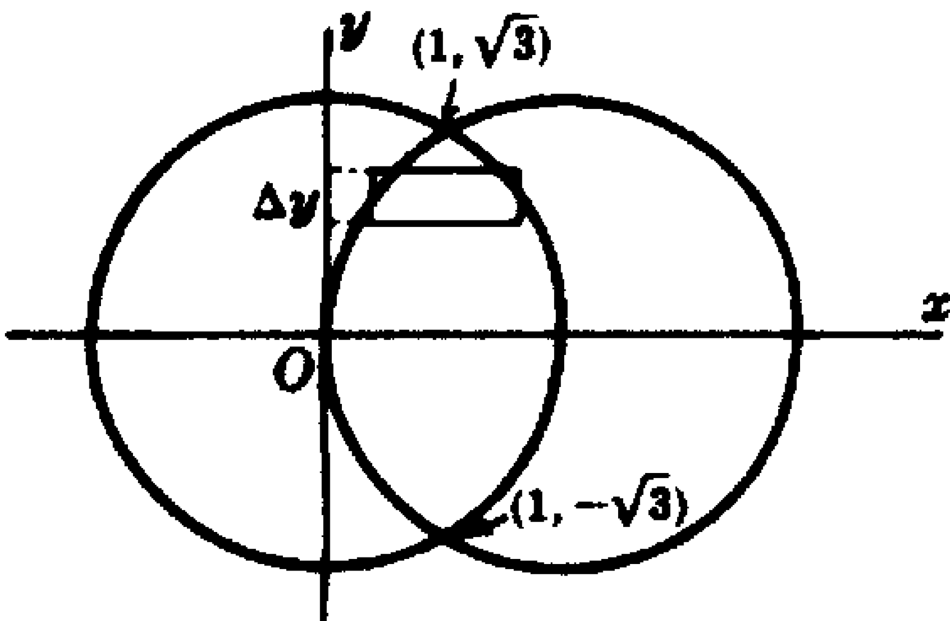
شكل ٣٤ ـ ١٠

إن المنحنى متناظر بالنسبة للمحورين الاحداثيين وعلى هذا فإن المساحة المطلوبة تساوى أربع مرات مساحة الجزء الواقع فى الربع الأول . وعرض المستطيل المقرب يساوى Δx وارتفاعه $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$، ومساحته $x\sqrt{1 - x^2}\,\Delta x$ والمساحة المطلوبة هي

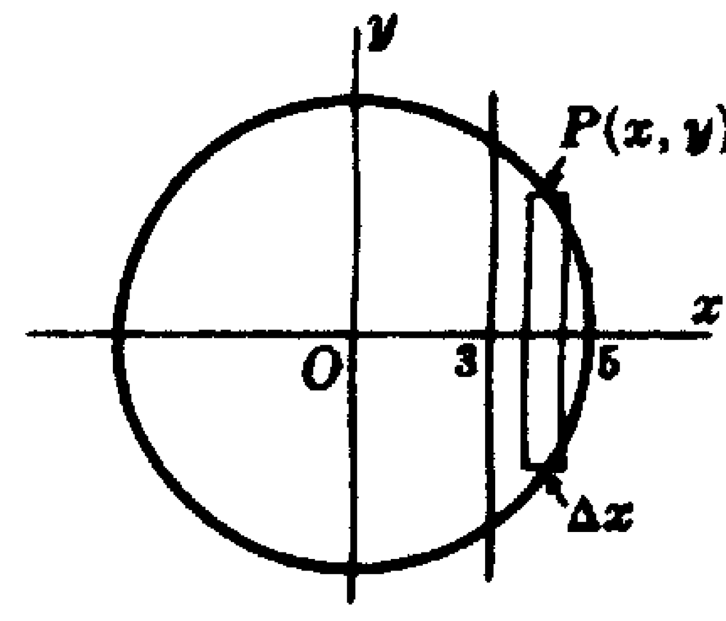
$$4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx = \left[-\frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \frac{4}{3} \text{ square units}$$

١٠ – أوجد مساحة القطعة الصغرى الواقعة بين الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ والمستقيم $x = 3$. أنظر الشكل ٣٤ – ١١ .

$$A = \int_3^5 2y\,dx = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2}\arcsin\frac{x}{5}\right]_3^5$$
$$= \left(\frac{25}{2}\pi - 12 - 25\arcsin\frac{3}{5}\right) \text{square units}$$



شكل ٣٤ ـ ١٢



شكل ٣٤ ـ ١١

١١ – أوجد مساحة الجزء المشترك بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4x$ و $x^2 + y^2 = 4$. أنظر الشكل ٣٤–١٢ .
تتقاطع الدائرتان عند النقطتين. ($1 \pm \sqrt{3}$) ويمتد المستطيل المقرب من $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ إلى $x = \sqrt{4 - y^2}$.
ولذلك فإن :

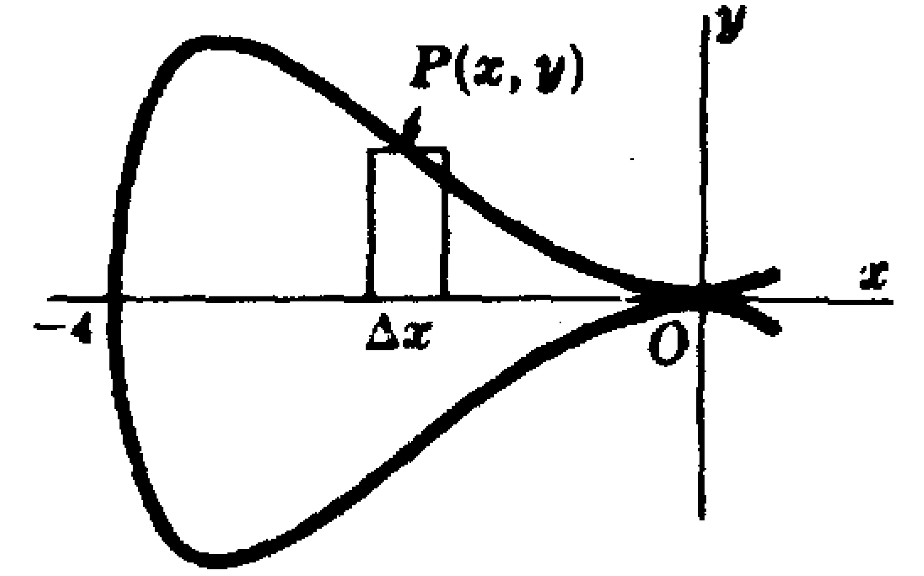
$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \{\sqrt{4-y^2} - (2-\sqrt{4-y^2})\}\,dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1)\,dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\arcsin\frac{1}{2}y - y\right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right) \text{ square units}$$

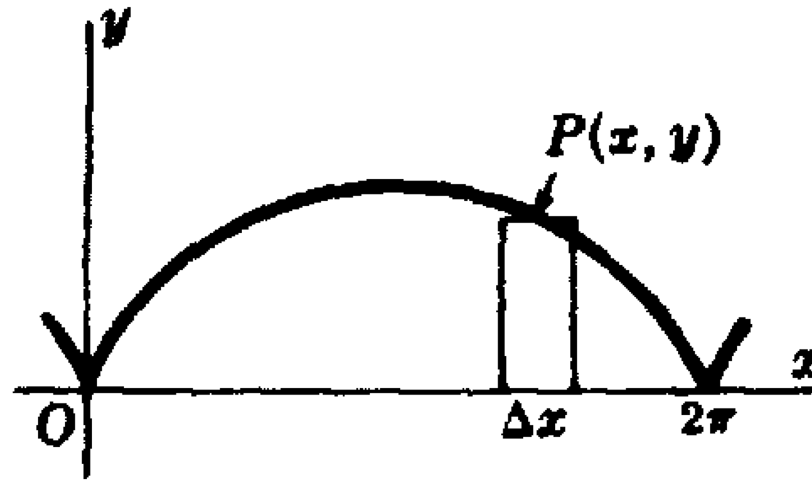
١٢ – أوجد مساحة عروة المنحنى $y^2 = x^2(4+x)$. أنظر الشكل ٣٤ – ١٣ .

$$A = \int_{-4}^{0} 2y\,dx = 2\int_{-4}^{0} x^2\sqrt{4+x}\,dx. \quad \text{Let } 4+x = z^2;$$

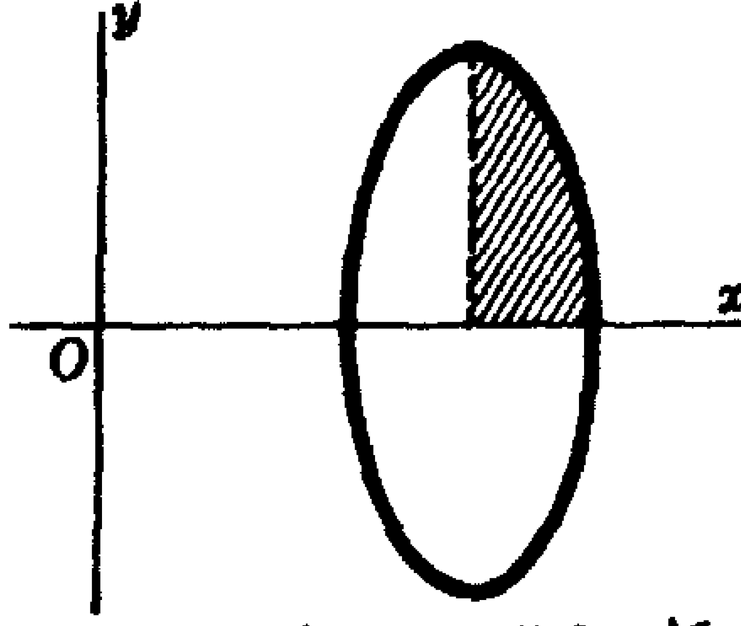
ومنه :
$$A = 4\int_0^2 (z^2-4)^2 z^2\,dz = 4\left[\frac{z^7}{7} - \frac{8z^5}{5} + \frac{16z^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4096}{105} \text{ square units}$$



شكل ٣٤ — ١٣



شكل ٣٤ — ١٤



شكل ٣٤ — ١٥

١٣ – أوجد المساحة الواقعة تحت عقد المنحنى الدويرى (السيكلوئيد) $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$. أنظر الشكل ٣٤ – ١٤ .

يرسم العقد عندما تتغير θ من 0 إلى 2π إذن $dx = (1-\cos\theta)\,d\theta$ والمساحة هي :

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi \text{ square units}$$

١٤ – أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $x = 3+\cos\theta,\ y = 4\sin\theta$. أنظر الشكل ٣٤ – ١٥ .

ترسم المساحة المظللة فى الشكل ($\frac{1}{4}$ المساحة المطلوبة) عندما تتغير θ من 0 إلى $\pi/2$ ولذلك فإن :

$$A = -4\int_0^{\pi/2}(4\sin\theta)(-\sin\theta)\,d\theta = 16\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 8\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi \text{ square units}$$

مسائل اضافية

١٥ – أوجد المساحة المحددة بما يلى :

(ا) $y = x^2,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 5$

(ب) $y = x^3,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

(جـ) $y = 4x - x^2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 3$

(د) $x = 1 + y^2,\ x = 10$

(هـ) $x = 3y^2 - 9,\ x = 0,\ y = 0,\ y = 1$

(و) $x = y^2 + 4y,\ x = 0$

(ز) $y = 9 - x^2,\ y = x + 3$

(ح) $y = 2 - x^2,\ y = -x$

(ط) $y = \tan x,\ x = 0,\ x = \frac{1}{4}\pi$

(ط) $y = x^2 - 4,\ y = 8 - 2x^2$

(ى) $y = x^4 - 4x^2,\ y = 4x^2$

(ك) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

(ل) عقدة المنحنى $9ay^2 = x(3a - x)^2$

(م) عقدة المنحنى $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 0,\ x = 2$

(ن) $y = e^{x/a} + e^{-x/a},\ y = 0,\ x = \pm a$

(س) $xy = 12,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e^2$

(ع) $y = 1/(1+x^2),\ y = 0,\ x = \pm 1$

(ص) قطاع دائرى نصف قطره r وزاويته a .
(ق) قطع ناقص $x = a\cos t,\ y = b\sin t.$
(ر) $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta - 1,\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta.$
(ش) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$
(ت) العقد الأول من $y = e^{-ax}\sin ax.$
(ث) $y = xe^{-x^2},\ y = 0,$ والاحداثى الصادى الأكبر.
(خ) الفرعين $(2x-y)^2 = x^3$ و $x = 4$.
(ذ) داخل $y = 25 - x^2,\ 256x = 3y^2,\ 16y = 9x^2.$

الأجوبة :

(ا) 39 square units	(ب) 20,	(جـ) 22/3,	(د) 36,
(هـ) 8,	(و) 32/3,	(ز) 125/6,	(ح) 9/2,
(ف) 32,	(ط) $512\sqrt{2}/15,$	(ى) $2a^2/3,$	(ك) $8\sqrt{3}\,a^2/5,$
(ل) $(e^2+1/e^2-2),$	(م) $2a(e-1/e),$	(ن) 24,	(س) $^1/_2\,\pi,$
(ع) $^1/_2 \ln 2,$	(ص) $^1/_2\, r^2 a,$	(ق) $\pi a b,$	(ر) $6\pi,$
(ش) $3\pi a^2/8,$	(ت) $(1+1/e^{\pi})/2a$	(ث) $^1/_2(1-1/\sqrt{e}),$	(خ) 128/5,
(ذ) 98/3, square units			

نقصد بمتوسط الاحداثى الصادى للمنحنى $y = f(x)$ فى الفترة $a \le x \le b$

الكمية :

$$\frac{\text{المساحة}}{\text{القاعدة}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

١٦ – أوجد متوسط الاحداثى الصادى لـ (ا) نصف دائرة (ب) القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ من $x = -2$ إلى $x = 2$.

ج (ا) $\pi r/4$ (ب) $8/3$

١٧ – (ا) أوجد متوسط الاحداثى الصادى لقطعة من الدويرى (السيكلوئيد) $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ وذلك بالنسبة لـ x .

(ب) نفس الشيء بالنسبة لـ θ .

ج : (ا) $\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{3a}{2},$ (ب) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\,d\theta = a$

١٨ – المعادلات الآتية بالنسبة لجسم يسقط سقوطا حرا $s = \frac{1}{2}gt^2$ و $v = gt = \sqrt{2gs}.$
(ا) بين أن القيمة المتوسطة لـ v بالنسبة لـ t فى الفترة $0 \le t \le t_1$ تساوى نصف السرعة النهائية .
(ب) بين أن القيمة المتوسطة لـ v بالنسبة لـ s فى الفترة $0 \le s \le s_1$ تساوى ثلثى السرعة النهائية .

الفصل الخامس والثلاثون

حجوم اجسام دورانية

يتولد الجسم الدورانى عن دوران قطعة سطح مستوية حول مستقيم واقع فى مستواها ونسميه محور الدوران . ويمكن إيجاد حجم الجسم الدورانى باستخدام إحدى الطريقتين التاليتين :

طريقة القرص :

أ – عندما يكون محور الدوران جزءا من حدود قطعة السطح .

(١) نرسم شكلا تقريبيا يبين قطعة السطح وشريحة ممثلة عموديا على محور الدوران ، والمستطيل المقرب كما فى الفصل السابق .

(٢) اكتب حجم القرص (الاسطوانة) الناتج من دوران المستطيل المقرب حول محور الدوران وشكل مجموع الحجوم الناتجة عن دوران المستطيلات الـ n .

(٣) افرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لا نهاية واستخدم النظرية الأساسية .

أنظر المسألتين ١ – ٢

ب – عندما لا يكون محور الدوران جزءا من حدود قطعة السطح .

(١) كما فى (١) أعلاه .

(٢) مد أضلاع المستطيل المقرب $ABCD$ لتقطع محور الدوران فى E و F كما فى الشكل ٣٥ – ٣ فى المسألة ٣ . وعندما يدور المستطيل المقرب حول محور الدوران تتكون حلقة يساوى حجمها الفرق بين الحجمين المولدين بدوران المستطيلين $EABF$ و $ECDF$ حول المحور . اكتب الفرق بين هذين الحجمين ثم يتبع كما فى (٢) أعلاه .

(٣) كما فى (٣) أعلاه .

أنظر المسألتين ٣ – ٤

طريقة القشرة :

(١) بين برسم تقريبى قطعة السطح وشريحة ممثلة موازية لمحور الدوران والمستطيل المقرب .

(٢) اكتب حجم القشرة الاسطوانية الناتجة من دوران المستطيل المقرب حول محور الدوران (وهو يساوى متوسط المحيط × الارتفاع × السمك) ثم اجمع بالنسبة للمستطيلات الـ n .

(٣) افرض أن عدد المستطيلات يزداد إلى ما لانهاية وطبق النظرية الأساسية .

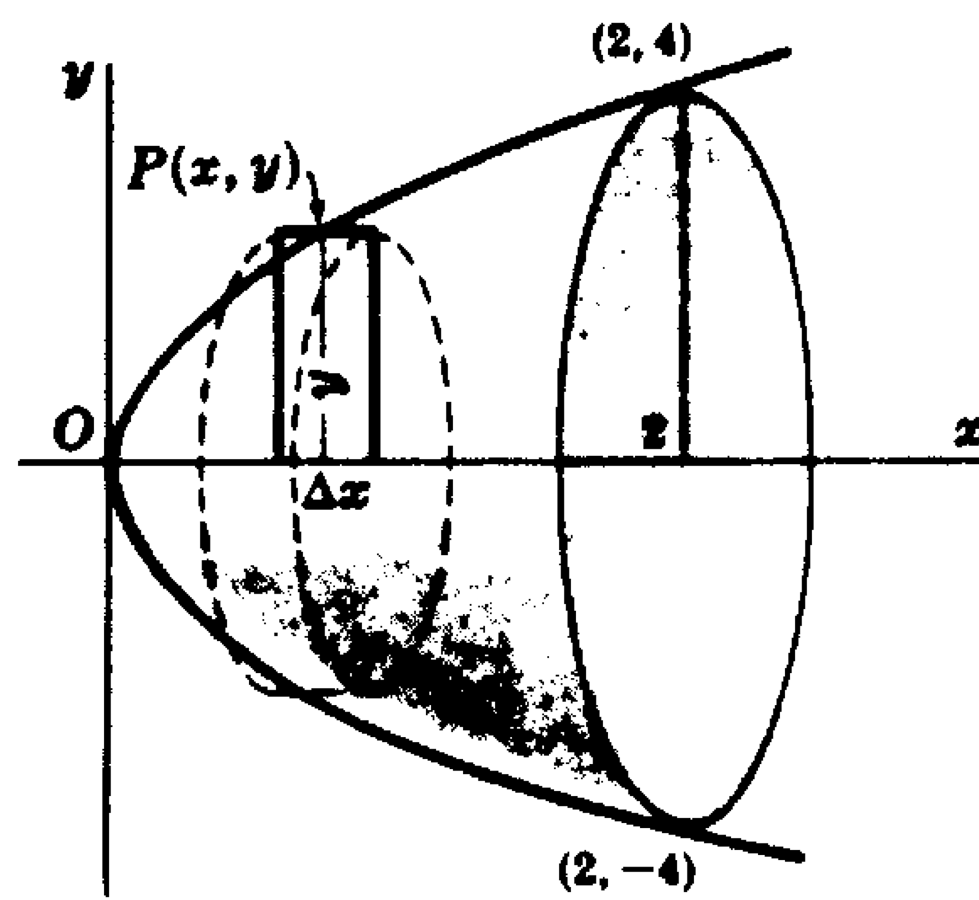
أنظر المسائل ٥ – ٨

مسائل محلولة

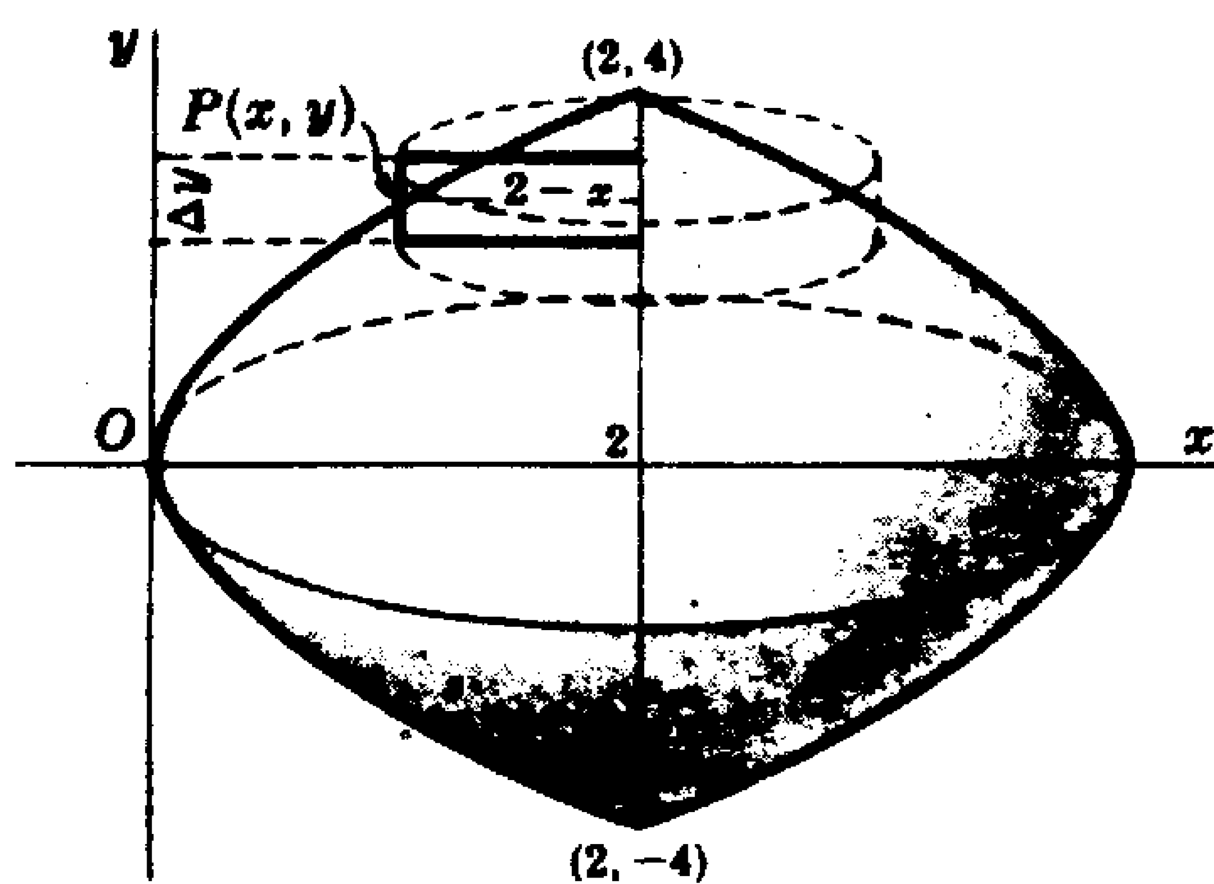
١ — أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح الواقعة فى الربع الأول حول المحور السينى علما بأن القطعة محددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والوتر البؤرى العمودى ($x = 2$) .

بالإشارة إلى الشكل ٣٥ — ١ . نقسم المساحة إلى شرائح رأسية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين فى الشكل ٣٥ — ١ حول المحور السينى ينتج قرص نصف قطره y وارتفاعه Δx وحجمه $\pi y^2 \Delta x$ ومجموع حجوم الـ n قرصا الموافقة للمستطيلات الـ n يساوى $\Sigma \pi y^2 \Delta x$ والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_0^b dV = \int_0^2 \pi y^2\, dx = \pi \int_0^2 8x\, dx = 4\pi x^2 \Big]_0^2 = 16\pi \text{ cubic units}$$



شكل ٣٥ — ١



شكل ٣٥ — ٢

٢ — أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والوتر البؤرى العمودى ($x = 2$) ، حول الوتر البؤرى العمودى المذكور .

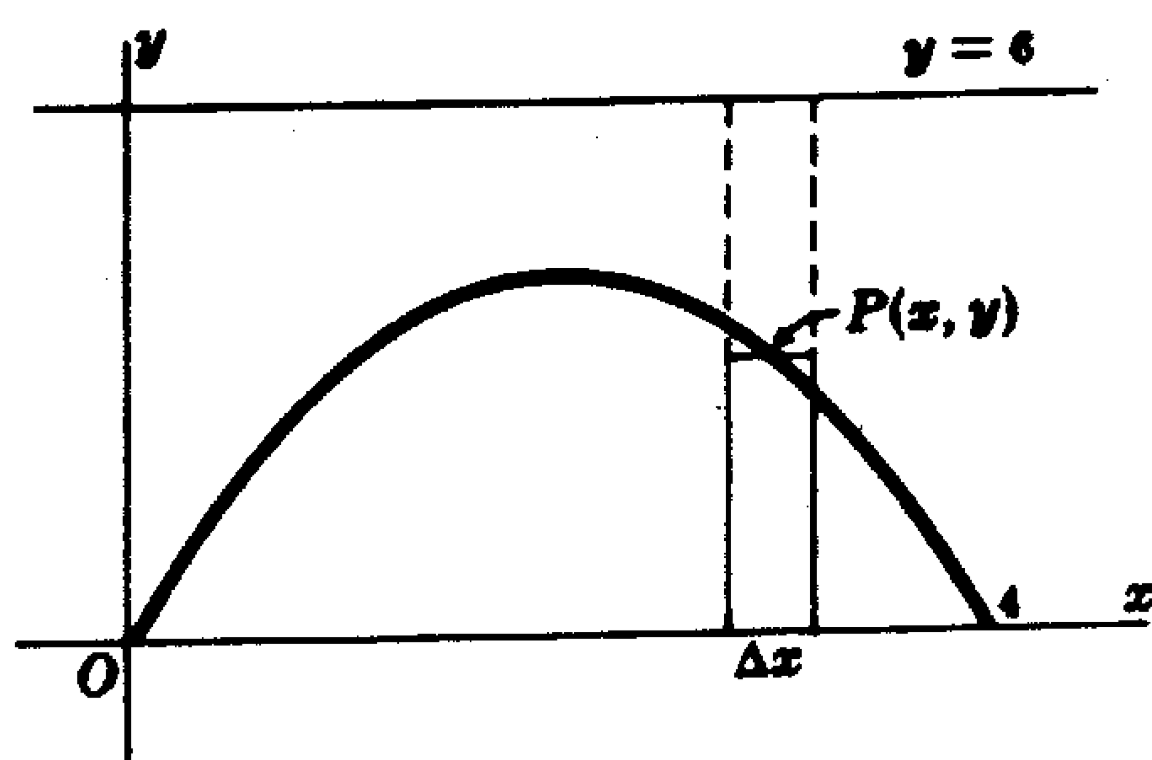
بالإشارة إلى الشكل ٣٥—٢ . نقسم المساحة إلى شرائح أفقية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين فى الشكل ٣٥—٢ حول الوتر البؤرى المذكور ينتج قرص نصف قطره $2 - x$ وارتفاعه Δy وحجمه $\pi (2 - x)^2$ والحجم المطلوب يساوى .

$$V = \int_{-4}^{4} \pi(2-x)^2\, dy = 2\pi \int_0^4 (2-x)^2\, dy = 2\pi \int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256}{15}\pi \text{ cubic units}$$

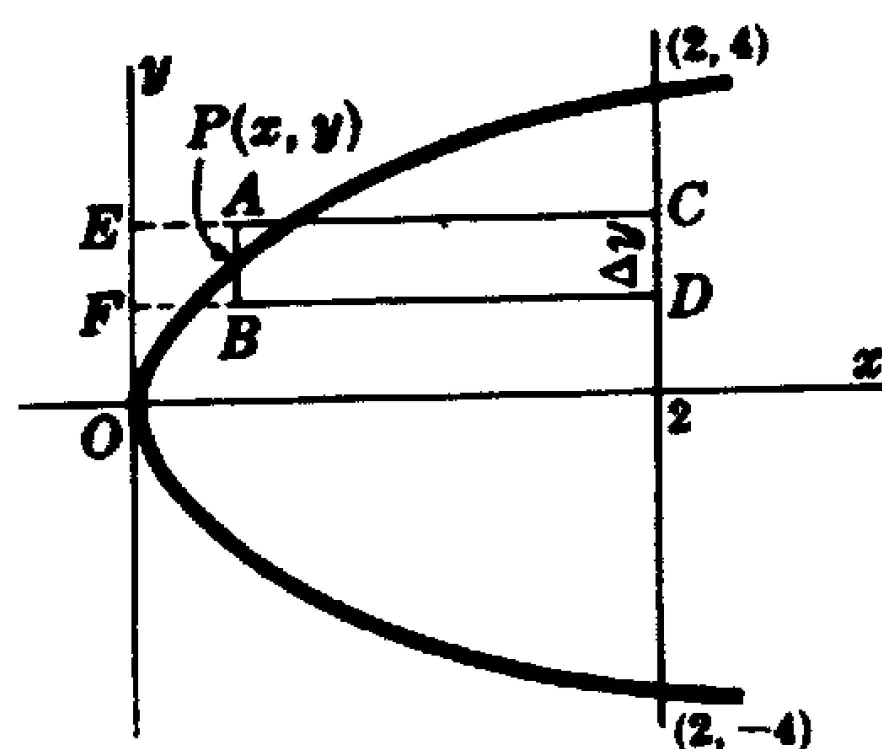
٣ — أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والوتر البؤرى العمودى ($x = 2$) ، حول المحور الصادى .

بالإشارة إلى الشكل ٣٥ — ٣ . نقسم المساحة إلى شرائح أفقية . وعندما يدور المستطيل المقرب المبين فى الشكل ٣٥ — ٣ حول المحور تنتج حلقة يساوى حجمها الفرق بين الحجمين الناتجين من دوران المستطيل $ECDF$ (بعداه 2 ، Δy) ودوران المستطيل $EABF$ (بعداه x ، Δy) حول المحور الصادى أى أن هـذا الحجم يساوى $\pi (2)^2 \Delta y - \pi (x)^2 \Delta y$ والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_{-4}^{4} 4\pi\, dy - \int_{-4}^{4} \pi x^2\, dy = 2\pi \int_0^4 (4 - x^2)\, dy = 2\pi \int_0^4 \left(4 - \frac{y^4}{64}\right) dy = \frac{128}{5}\pi \text{ cubic units}$$



شكل ٣٥ — ٤



شكل ٣٥ — ٣

٤ — أوجد الحجم الناتج من دوران قطعة السطح المقتطعة من القطع المكافىء $y = 4x - x^2$ بالمحور السينى حول المستقيم $y = 6$.

بالإشارة إلى الشكل ٣٥ — ٤ . نقسم المساحة بشرائح رأسية . إن الجسم الناتج من دوران المستطيل المقرب حول المستقيم $y = 6$ هو حلقة حجمها $\pi(6)^2\Delta x - \pi(6-y)^2\Delta x$. والحجم المطلوب هو :

$$V = \pi\int_0^4 \{(6)^2 - (6-y)^2\}\, dx = \pi\int_0^4 (12y - y^2)\, dx$$

$$= \pi\int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4)\, dx = \frac{1408\pi}{15} \text{ cubic units}$$

٥ — بالإشارة إلى الشكل ٣٥ — ٥ لنفرض أن الحجم المطلوب ينتج بالدوران حول المحور الصادى لقطعة السطح الواقعة فى الربع الأول تحت المنحنى $y = f(x)$ من $x = a$ إلى $x = b$. لنقسم هذه المساحة إلى n شريحة ولنقرب كل شريحة إلى مستطيل ، فعندما تدور الشريحة الممثلة حول المحور الصادى ينتج قشرة اسطوانية ارتفاعها y_k ونصف قطرها الداخلى ξ_{k-1} والخارجى ξ_k وحجمها :

$$\Delta_k V = \pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2)y_k \qquad \text{(i)}$$

واستنادا إلى نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات يكون :

$$\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2 = \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=x'_k} \cdot (\xi_k - \xi_{k-1}) = 2x'_k\Delta_k x \qquad \text{(ii)}$$

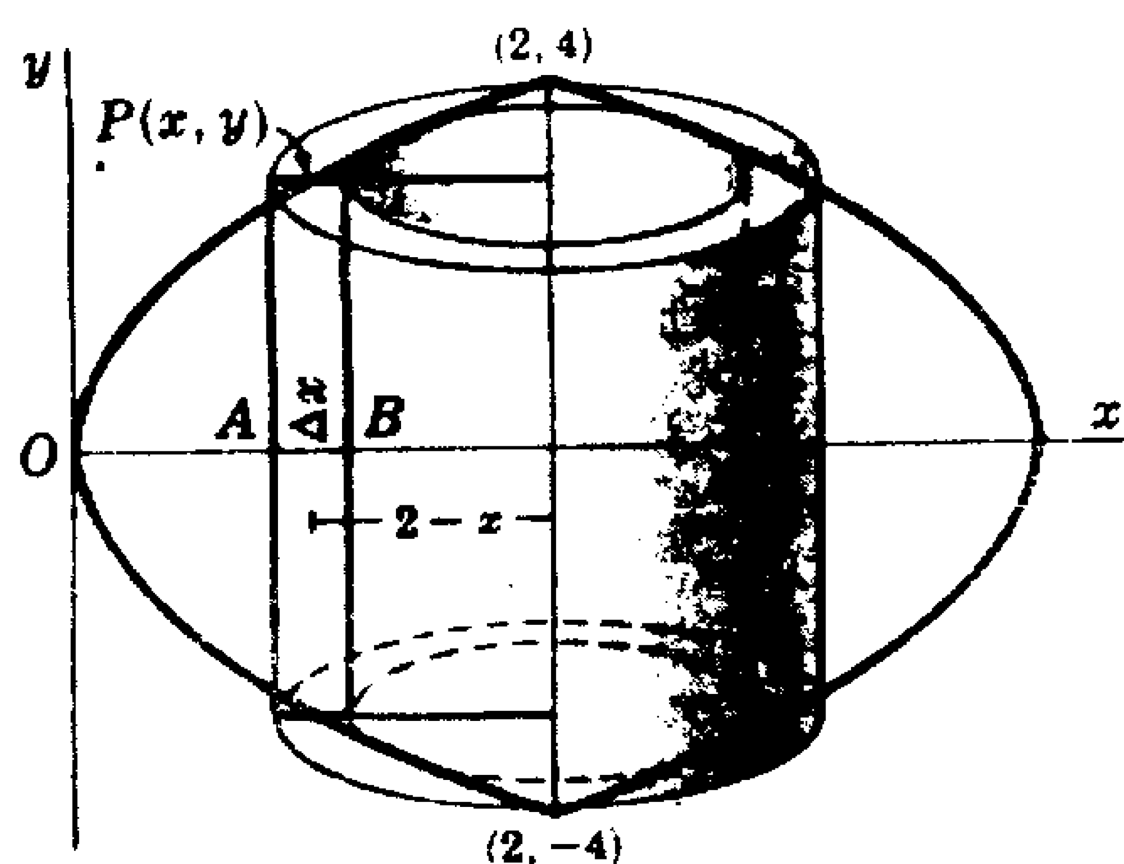
حيث $\xi_{k-1} < x'_k < \xi_k$. وعلى هذا تأخذ المعادلة (i) الشكل :

$$\Delta_k V = 2\pi\, x'_k y_k \Delta_k x = 2\pi\, x'_k f(x_k)\, \Delta_k x$$

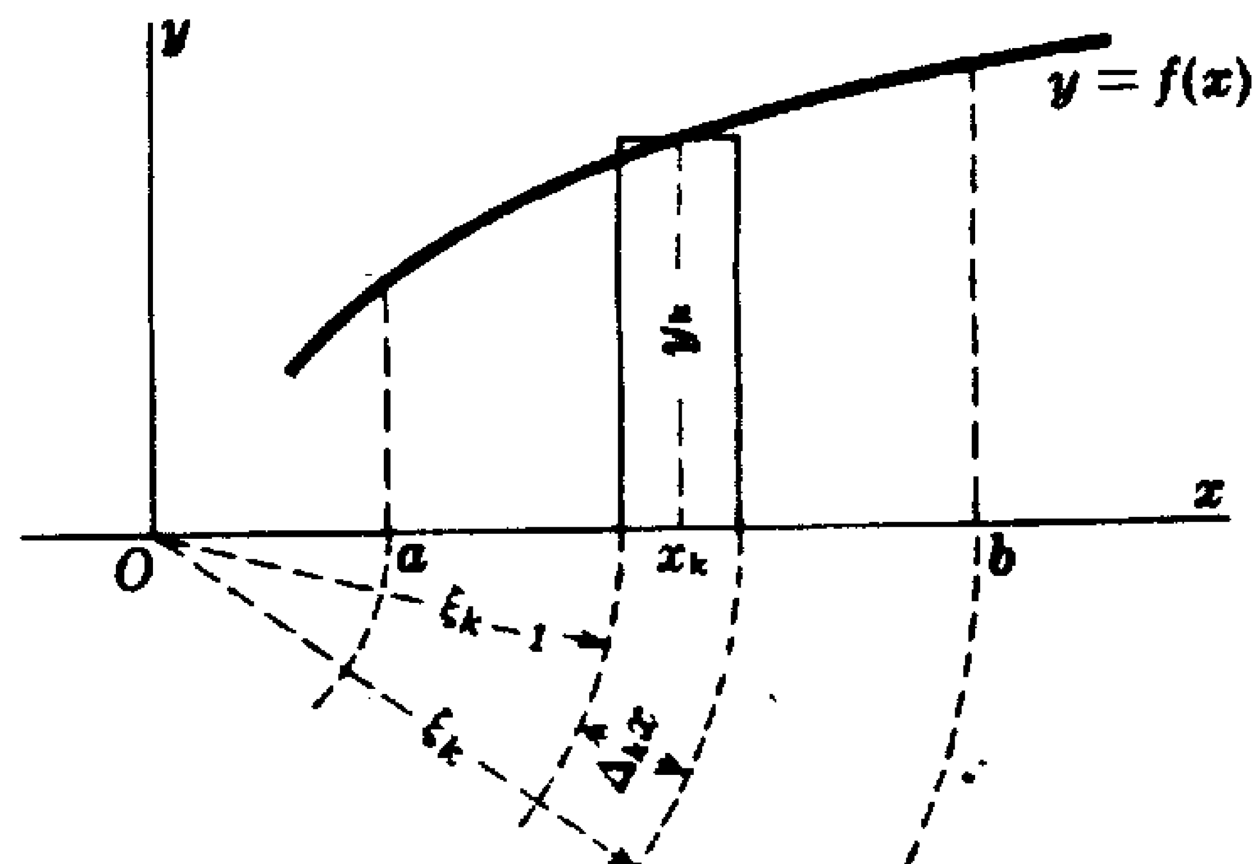
ومن استنادا إلى نظرية بليس يكون :

$$V = 2\pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x'_k f(x_k)\, \Delta_k x = 2\pi\int_a^b x\, f(x)\, dx$$

ملاحظــة : لو أننا اخترنا النقط x_k فى منتصفات الفترات الجزئية ، المستخدمة فى الفصل السابق ، فإننا لا نحتاج إلى تطبيق نظرية بليس لأن x'_k المعرفة بـ (ii) تكون استنادا إلى المسألة ١٧ (ب) فى الفصل ٢١ ، $x'_k = \frac{1}{2}(\xi_k + \xi_{k-1}) = x_k$. وهكذا يكون الحجم الناتج من دوران المستطيلات الـ n حول المحور الصادى هو $\sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k f(x_k)\, \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, \Delta_k x$ من النمط (i) من الفصل ٣٣ .



شكل ٣٥ — ٦



شكل ٣٥ — ٥

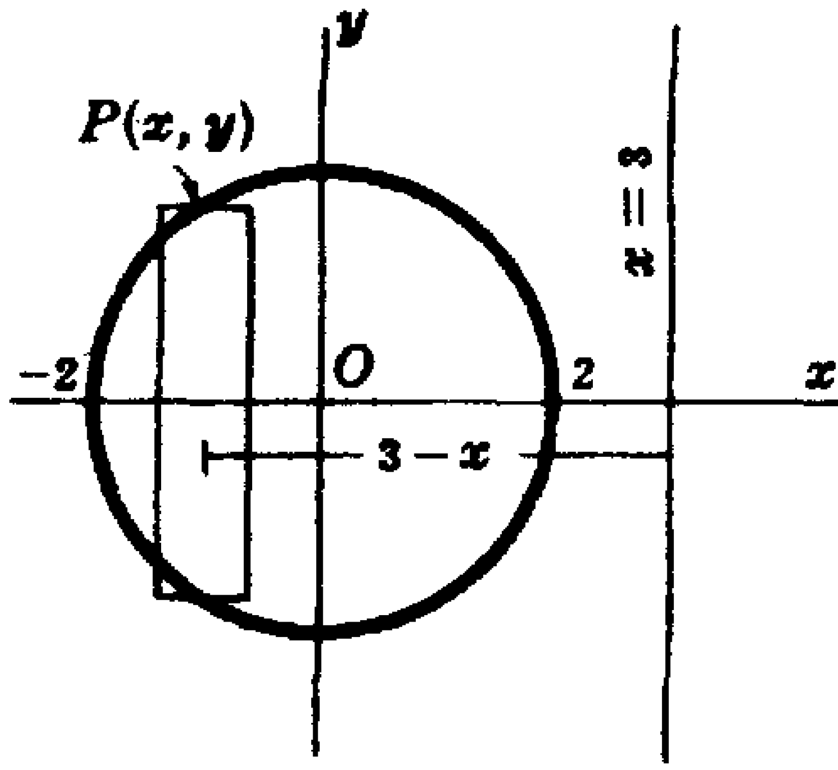
٦ — أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافىء $y^2 = 8x$ والمستقيم $x = 2$ حول المستقيم $x = 2$.
استخدم طريقة القشرة (أنظر المسألة ٢) .

لننظر فى الشكل ٣٥ — ٦ ونقسم المساحة إلى شرائح رأسية وللسهولة نختار النقطة P بحيث تكون x لهذه النقطة فى منتصف القطعة AB .

إن ارتفاع المستطيل المقرب المبين بالشكل ٣٥ — ٦ يساوى $2y = 4\sqrt{2x}$ وعرضه Δx ، وبعده المتوسط عن الوتر البؤرى يساوى $2 - x$. وعندما يدور المستطيل حول الوتر البؤرى العمودى تنتج قشرة اسطوانية حجمها $2\pi(2-x)\cdot 4\sqrt{2x}\,\Delta x$. والحجم المطلوب هو :

$$V = 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2-x)\sqrt{x}\,dx = 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2x^{1/2} - x^{3/2})\,dx = \frac{256\pi}{15} \text{ cubic units}$$

٧ — أوجد الحجم الناتج بدوران الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ حول المستقيم $x = 3$.

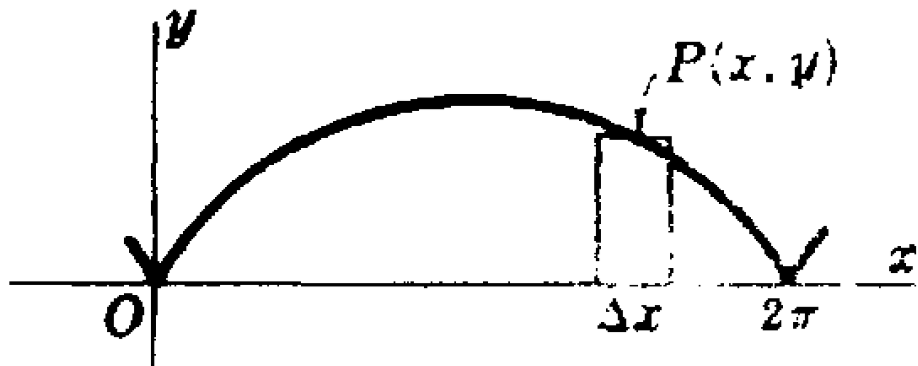


شكل ٣٥ — ٧

سنستخدم طريقة القشرة . نلاحظ أن ارتفاع المستطيل المقرب هو $2y$ وسمكه Δx والبعد المتوسط عن محور الدوران يساوى $3 - x$ ، والحجم المطلوب هو :

$$V = 2\pi\int_{-2}^{2} 2y(3-x)\,dx = 4\pi\int_{-2}^{2} (3-x)\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$= 12\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx - 4\pi\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$= \left[12\pi\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right) + \frac{4\pi}{3}(4-x^2)^{3/2}\right]_{-2}^{2}$$
$$= 24\pi^2 \text{ cubic units}$$

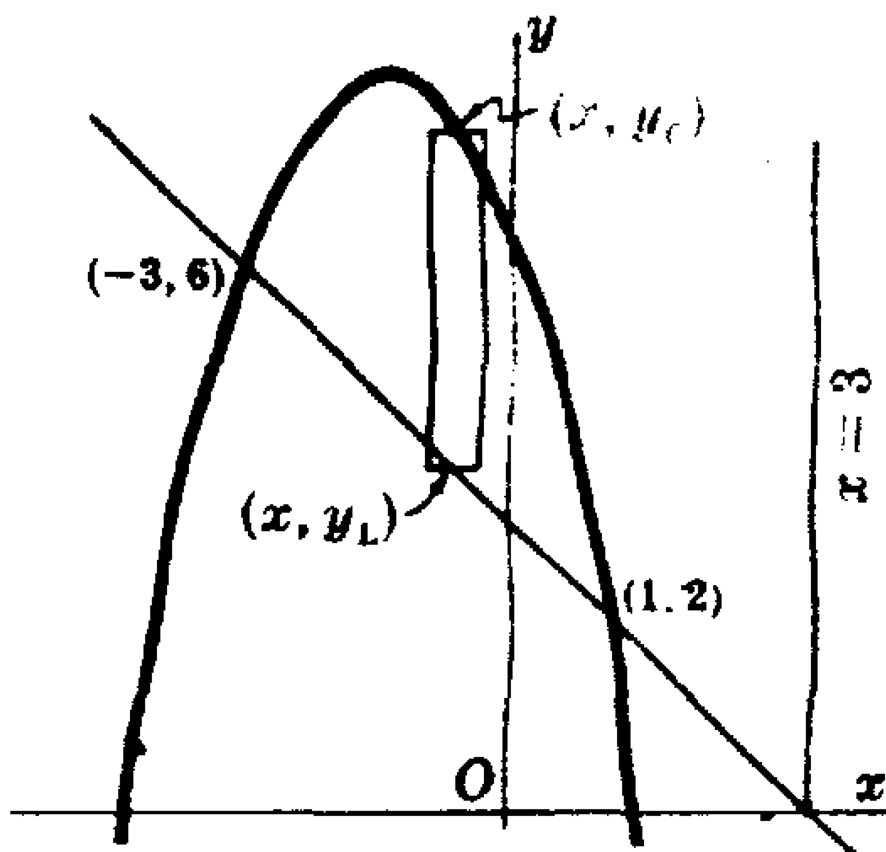
٨ — أوجد حجم الجسم الناتج عن الدوران حول المحور الصادى لقطعة السطح الواقعة بين العقد الأول للمنحنى الدويرى (السيكلوئيد) $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ والمحور السينى .
استخدم طريقة القشرة .



شكل ٣٥ — ٨

$$V = 2\pi\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} xy\,dx = 2\pi\int_0^{2\pi}(\theta - \sin\theta)(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta$$
$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(\theta - 2\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta - \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta\sin\theta)\,d\theta$$
$$= 2\pi\Big[\tfrac{3}{4}\theta^2 - 2(\theta\sin\theta + \cos\theta) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\theta\sin 2\theta + \tfrac{1}{4}\cos 2\theta) + \cos\theta - \sin^2\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{2\pi} = 6\pi^3 \text{ cu. un.}$$

٩ — أوجد الحجم الناتج عن دوران قطعة السطح الواقعة بين $y = -x^2 - 3x + 6$ و $x + y - 3 = 0$ حول (ا) $x = 3$ (ب) $y = 0$.



شكل ٣٥ — ٩

(ا)
$$V = 2\pi\int_{-3}^{1}(y_C - y_L)(3-x)\,dx$$
$$= 2\pi\int_{-3}^{1}(x^3 - x^2 - 9x + 9)\,dx = 256\pi/3 \text{ cubic units}$$

(ب)
$$V = \pi\int_{-3}^{1}\{(y_C)^2 - (y_L)^2\}\,dx$$
$$= \pi\int_{-3}^{1}(x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27)\,dx = 1792\pi/15 \text{ cu. un}$$

مســـــائل اضـــافية

أوجد فى المسائل ١٠ – ١٩ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما طريقة القرص (ا) (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

١٠ – $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5;$ حول المحور x ج: 2500π

١١ – $x^2 - y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 8;$ حول المحور x ج: $256\pi/3$

١٢ – $y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16;$ حول المحور y ج: 32π

١٣ – $y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16;\ y = 16$ حول $y = 16$ ج: $4096\pi/15$

١٤ – $y^2 = x^3,\ y = 0,\ x = 2;$ حول المحور x ج: 4π

١٥ – $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2;\ x = 2$ $x = 2$ ج: $16\pi/5$

١٦ – $y^2 = x^4(1 - x^2);$ حول المحور x ج: $4\pi/35$

١٧ – $4x^2 + 9y^2 = 36;$ حول المحور x ج: 16π

١٨ – $4x^2 + 9y^2 = 36,$ حول المحور y ج: 24π

١٩ – داخل $x = 9 - y^2$ بين $x - y - 7 = 0,$ و $x = 0$ حول المحور y ج $963\pi/5$

أوجد فى المسائل ٢٠ – ٢٦ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما طريقة القرص (ب) (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

٢٠ – $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5;$ حول المحور y ج: 625π

٢١ – $x^2 - y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 8;$ حول المحور y ج: $128\sqrt{3}\,\pi$

٢٢ – $y = 4x^2,\ x = 0,\ y = 16;$ حول المحور x ج: $2048\pi/5$

٢٣ – $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8;$ حول $x = 2$ ج: $144\pi/5$

٢٤ – $y = x^2,\ y = 4x - x^2;$ حول المحور x ج: $32\pi/3$

٢٥ – $y = x^2,\ y = 4x - x^2;$ حول $y = 6$ ج: $64\pi/3$

٢٦ – $x = 9 - y^2,\ x - y - 7 = 0;$ حول $x = 4$ ج: $153\pi/5$

أوجد فى المسائل ٢٧ – ٣٢ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما طريقة القشرة (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

٢٧ – $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5;$ حول المحور y

٢٨ – $y = 2x^2,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 5;$ حول $x = 6$

٢٩ – $y = x^3,\ y = 0,\ x = 2;$ حول $y = 8$

٣٠ – $y = x^2,\ y = 4x - x^2;$ حول $x = 5$

٣١ – $y = x^2 - 5x + 6,\ y = 0;$ حول المحور y

٣٢ – داخل $x = 9 - y^2,$ بين $x - y - 7 = 0,\ x = 0;$ حول $y = 3$

ج: (٢٧) 625π ، (٢٨) 375π ، (٢٩) $320\pi/7$ ، (٣٠) $64\pi/3$ ، (٣١) $5\pi/6$ ، (٣٢) $369\pi/2$.

أوجد فى المسائل ٣٣ – ٣٩ الحجم الناتج بدوران قطعة السطح المستوية المفروضة حول المستقيم المفروض مستخدما الطريقة المناسبة (الأجوبة بالوحدات المكعبة) .

٣٣ – $y = e^{-x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1;$ حول المحور y ج: $\pi(1 - 1/e)$

٣٤ – عقد $y = \sin 2x$ حول المحور x ج: $\frac{1}{4}\pi^2$

٣٥ – العقد الأول من $y = e^x \sin x$ حول المحور x ج: $\pi(e^{2\pi} - 1)/8$

٣٦ – العقد الأول من $y = e^x \sin x$ حول المحور y ج: $\pi\,[(\pi - 1)\,e^{\pi} - 1]$

٣٧ – العقد الأول من $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta;$ حول المحور x ج: $5\pi^2$

٣٨ – المنحنى القلبى $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta - 1,\ \ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta;$ حول المحور x ج: $64\pi/3$

٣٩ – $y = 2x^2,\ 2x - y + 4 = 0;$ حول $x = 2$ ج: 27π

٤٠ – أوجد حجم المخروط الذى نصف قطر قاعدته السفلى R ونصف قطر قاعدته العليا r وارتفاعه h .

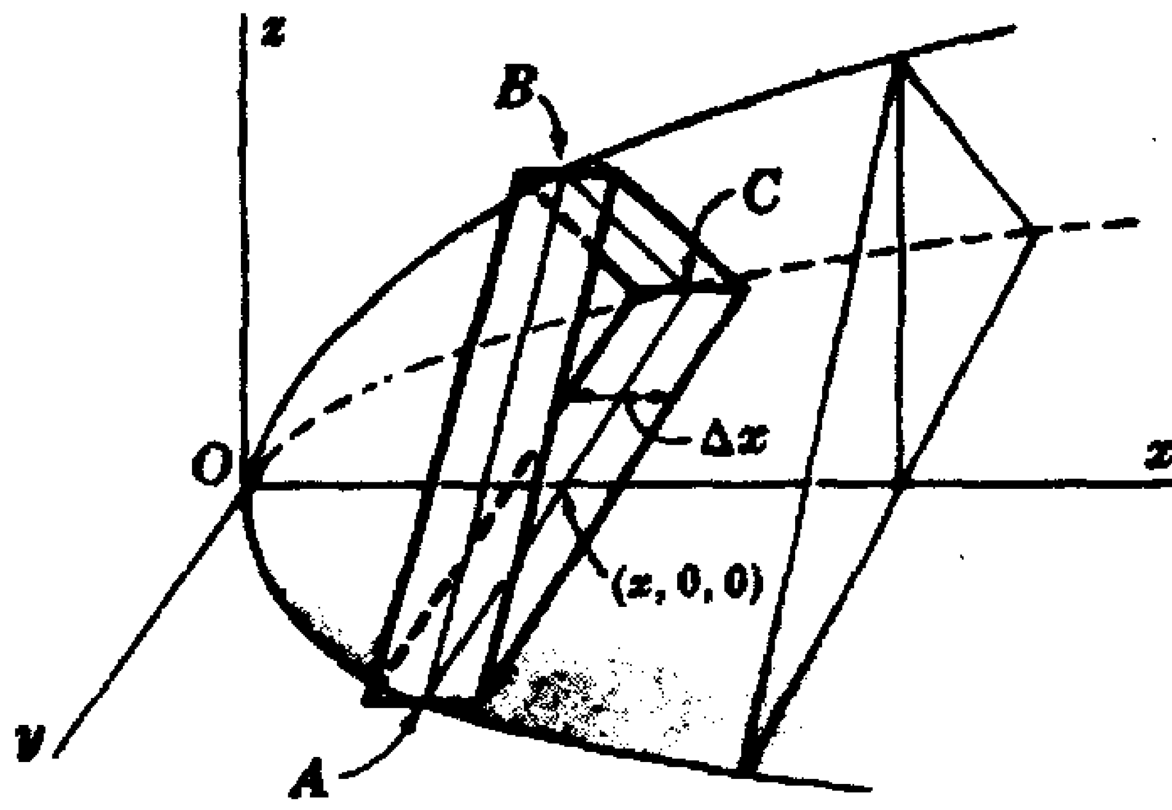
ج: $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$ cubic units

الفصل السادس والثلاثون

حجوم الأجسام ذات المقاطع المعلومة

حجم الجسم الدوراني : الناتج عن الدوران حول المحور السينى لقطعة سطح مستوية محددة بالمنحنى $y = f(x)$ والمحور السينى والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ يعطى بـ $\int_a^b \pi y^2 \, dx.$

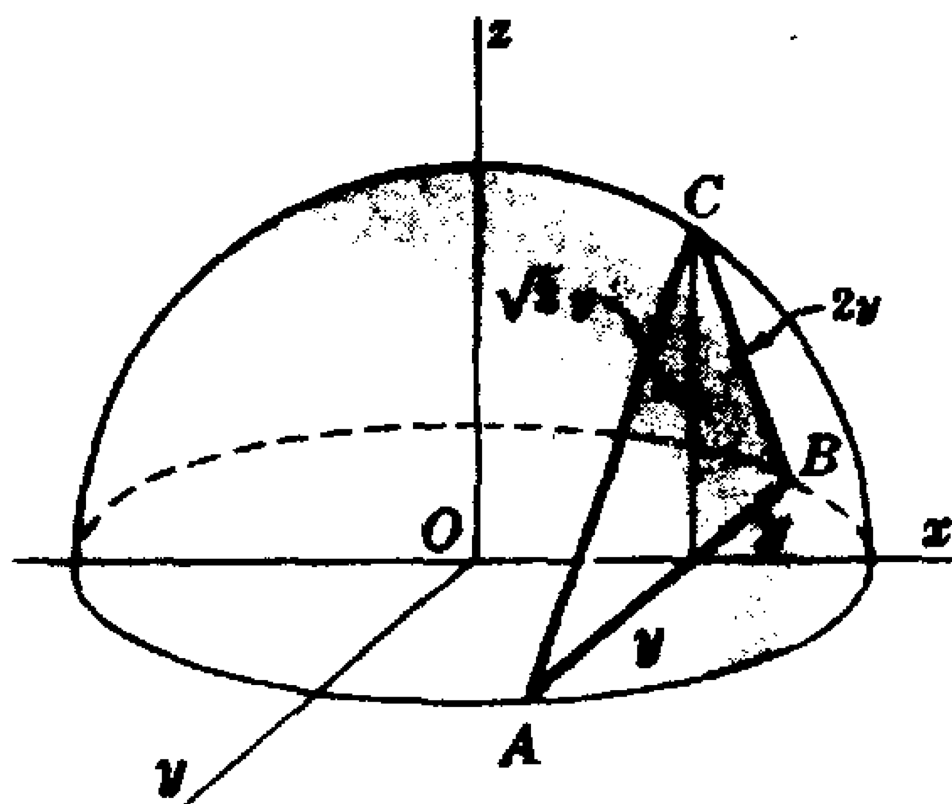
ويمكن تفسير دالة التكامل $\pi y^2 = \pi\{f(x)\}^2$ على أنها مساحة مقطع الجسم بمستوى عمودى على المحور السينى على بعد x من نقطة الأصل .



شكل ٣٦ — ١

وبالعكس إذا كان من الممكن التعبير عن مساحة المقطع ABC للجسم بمستوى عمودى على المحور السينى واقع على بعد x من نقطة الأصل على شكل دالة $A(x)$ فى x فإن حجم الجسم يعطى بـ $V = \int_\alpha^\beta A(x) \, dx.$

مســـــائل محـــــلولة



شكل ٣٦ — ٢

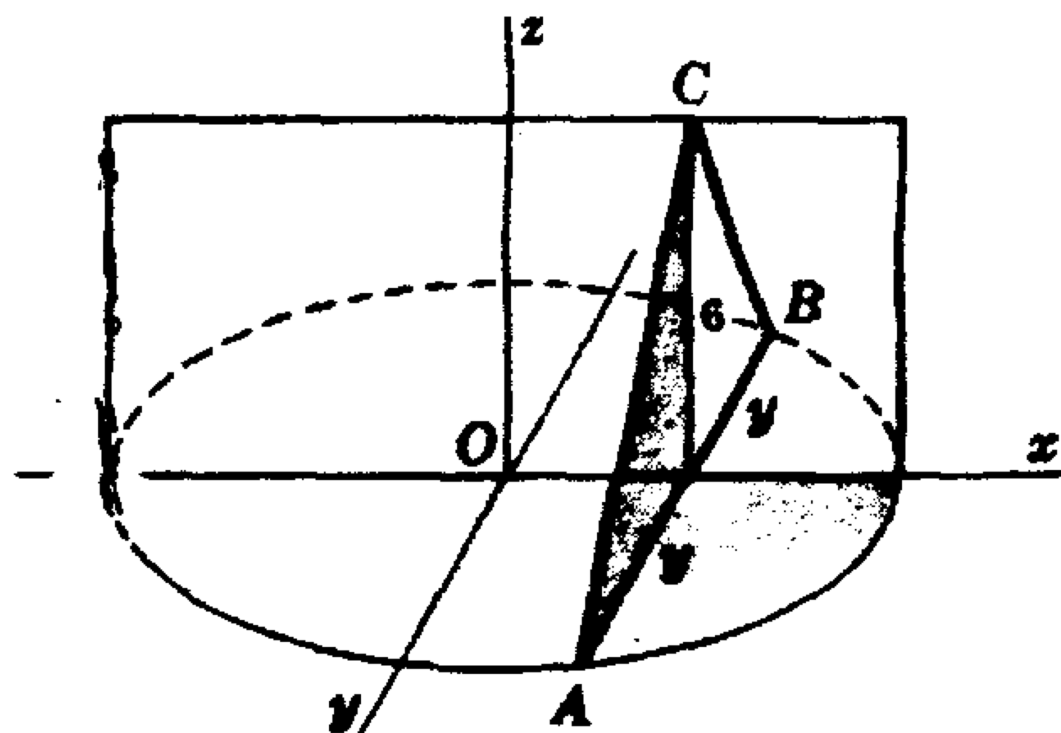
١ – لجسم قاعدته دائرية نصف قطرها 4 units . أوجد حجم هذا الجسم إذا كان مقطع الجسم بمستوى عمودى على قطر ثابت هو مثلث متساوى الأضلاع .

اعتبر الدائرة الموضحة فى الشكل ٣٦–٢ ولنفرض أن المحور السينى هو القطر الثابت . إذن معادلة الدائرة هى، $x^2+y^2=16$.

والمقطع ABC هو مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه $2y$ ومساحته $A(x) = \sqrt{3}\, y^2 = \sqrt{3} \quad (16 - x^2).$ والحجم المطلوب هو :

$$V = \int_\alpha^\beta A(x) \, dx = \sqrt{3} \int_{-4}^{4} (16 - x^2) \, dx$$

$$= \sqrt{3} \left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \frac{256}{3} \sqrt{3} \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ — ٣

٢ – قاعدة جسم على شكل قطع ناقص طول محوره الأكبر 10 وطول محوره الأصغر 8 . أوجد حجم هذا الجسم إذا كان كل مقطع عمودى له مع المحور الأكبر هو مثلث متساوى الساقين وارتفاعه 6 .

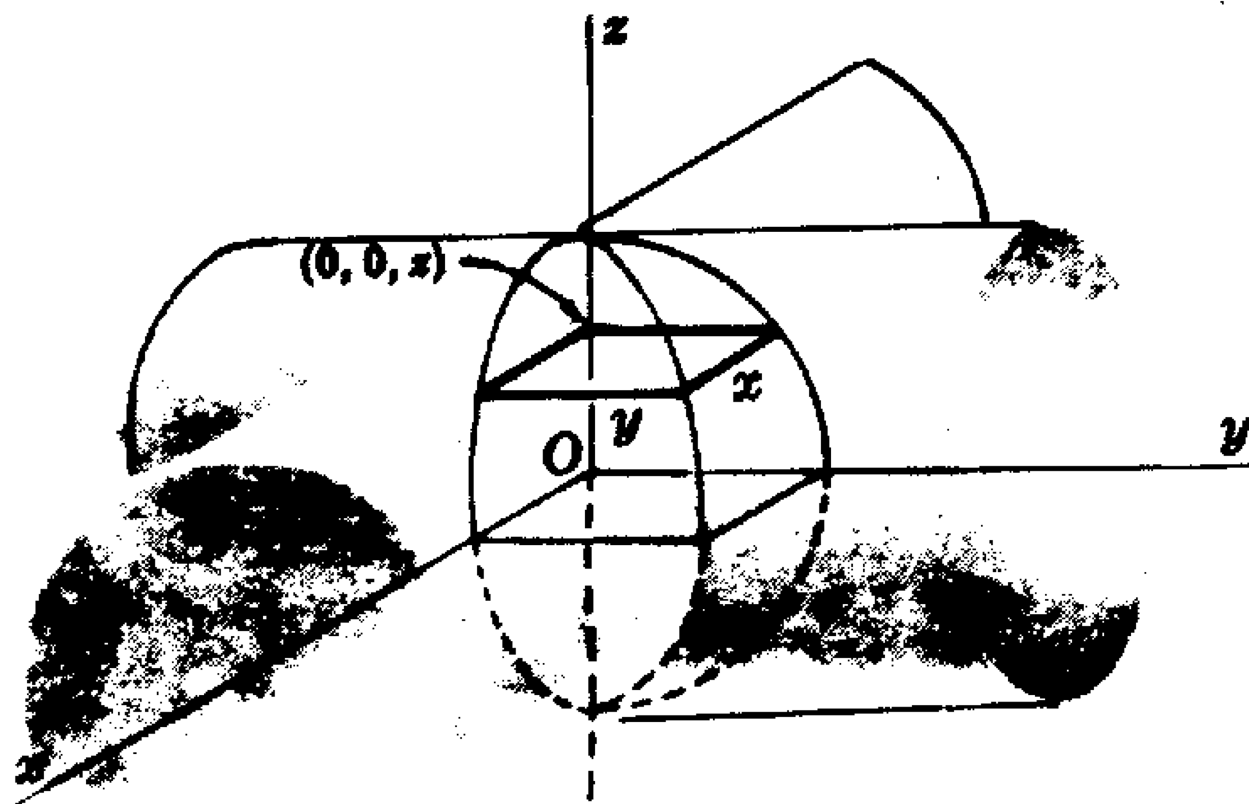
اعتبر القطع الناقص المبين فى الشكل ٣٦ – ٣ والذى معادلته $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1.$ إن المقطع ABC مثلث متساوى الساقين قاعدته $2y$ وارتفاعه 6 ومساحته $A(x) = 6y = 6 \cdot \frac{4}{5}\sqrt{25 - x^2}.$ والحجم المطلوب هو :

$$V = \frac{24}{5} \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2} \, dx = 60\pi \text{ cubic units}$$

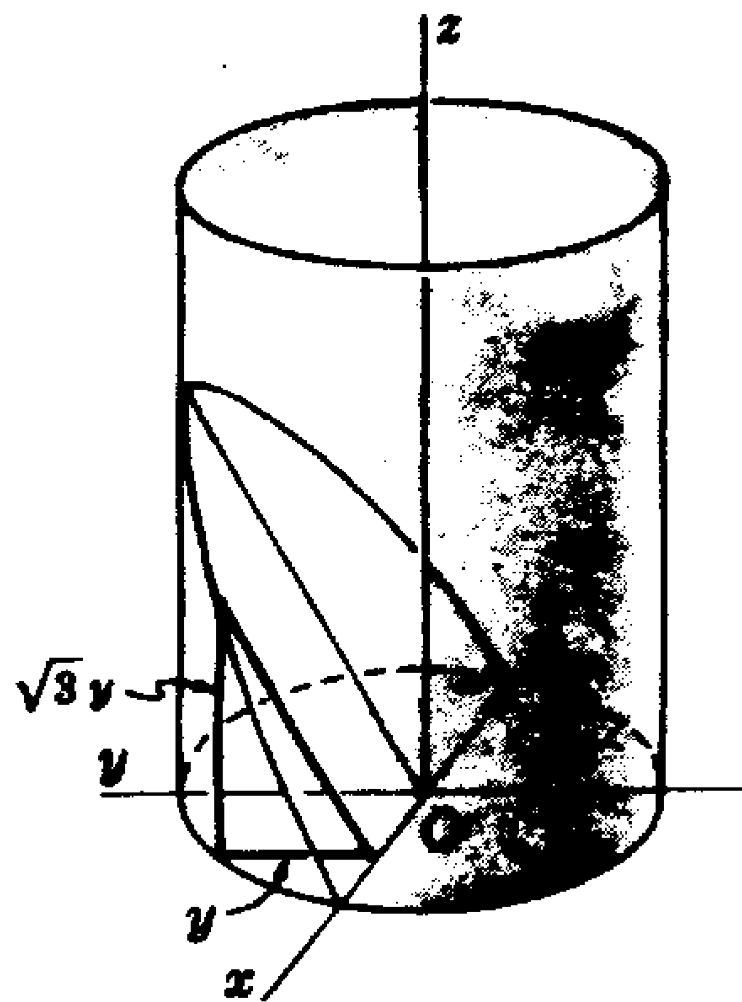
٣ – أوجد حجم القطعة المقطوعة من الجسم المكافيء الدوراني $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25}$ بالمستوى $z = 10$.

بالإشارة إلى الشكل ٣٦ – ٤ . نجد أن مقطع الجسم بمستوى موازى للمستوى xOy على بعد z من نقطة الأصل هو قطع ناقص مساحته $\pi xy = \pi(4\sqrt{z})(5\sqrt{z}) = 20\pi z$. وبالتالى فإن .

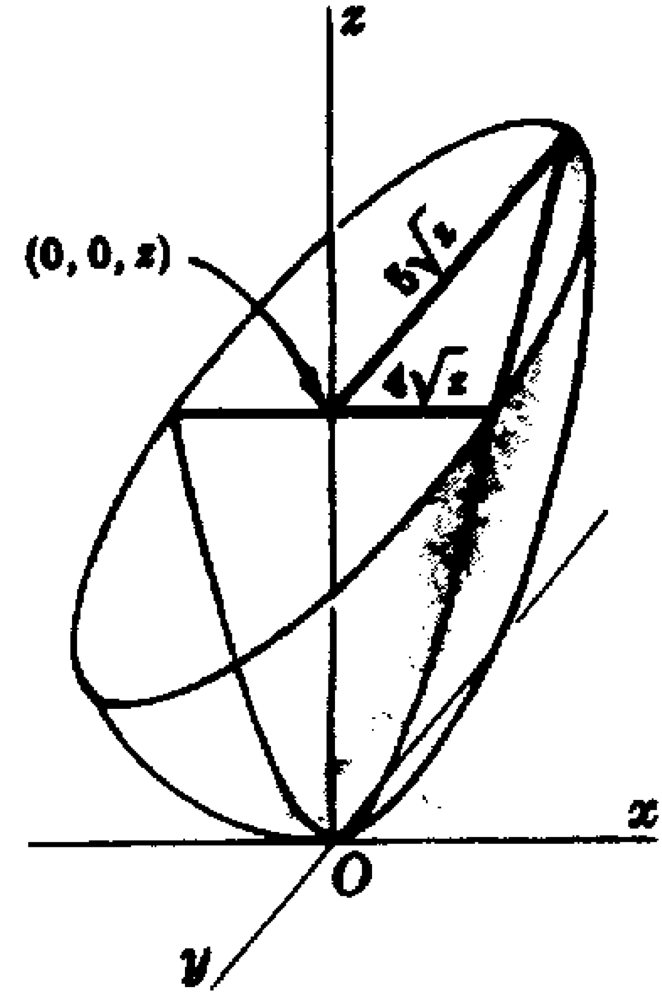
$$V = 20\pi \int_0^{10} z\, dz = 1000\pi \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ — ٦



شكل ٣٦ — ٥



شكل ٣٦ — ٤

٤ – احدث مقطعين فى قطعة خشبية دائرية نصف قطرها 8 cm ، أحد المقطعين عمودى على محور القطعة والآخر يميل على الأول بزاوية 60^0 . فإذا تقابل المقطعان على مستقيم يمر بالمركز . فأوجد حجم قطعة الخشب المقتطعة .

بالإشارة إلى الشكل ٣٦– ٥ نأخذ نقطة الأصل فى مركز القطعة الخشبية والمحور السينى على الخط المشترك المقطعين . ولنأخذ الجانب الموجب للمحور الصادى على وجه المقطع الأول . إن شكل المقطع المتولد بالمستوى العمودى على المحور السينى هو مثلث قائم إحدى زواياه 60^0 ، وطول الضلع المجاور لهذه الزاوية y وطول الضلع الآخر $y\sqrt{3}$ ، ومساحة المقطع إذن هى $\frac{1}{2}\sqrt{3}\, y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(64 - x^2)$. وبالتالى فإن :

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3}\int_{-8}^{8} (64 - x^2)\, dx = \frac{1024}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^3$$

٥ – يتقاطع محوراً اسطوانتين دائريتين نصف قطريهما متساويان r ، بزاوية قائمة . أوجد حجم المشترك بين الاسطوانتين .

أنظر إلى الشكل ٣٦ – ٦ ولنفرض أن معادلتى الاسطوانتين هما $x^2 + z^2 = r^2$ و $y^2 + z^2 = r^2$. شكل مقطع الحجم المطلوب بمستوى عمودى على المحور z هو مربع طول ضلعه $2x = 2y = 2\sqrt{r^2 - z^2}$ ومساحته $4(r^2 - z^2)$.

وبالتالى فإن : $V = 4\int_{-r}^{r} (r^2 - z^2)\, dz = \frac{16r^3}{3}$ culic units

٦ – أوجد حجم المخروط القائم الذى ارتفاعه h وقاعدته قطع ناقص طول محوره الأكبر $2a$ وطول محوره الأصغر $2b$.

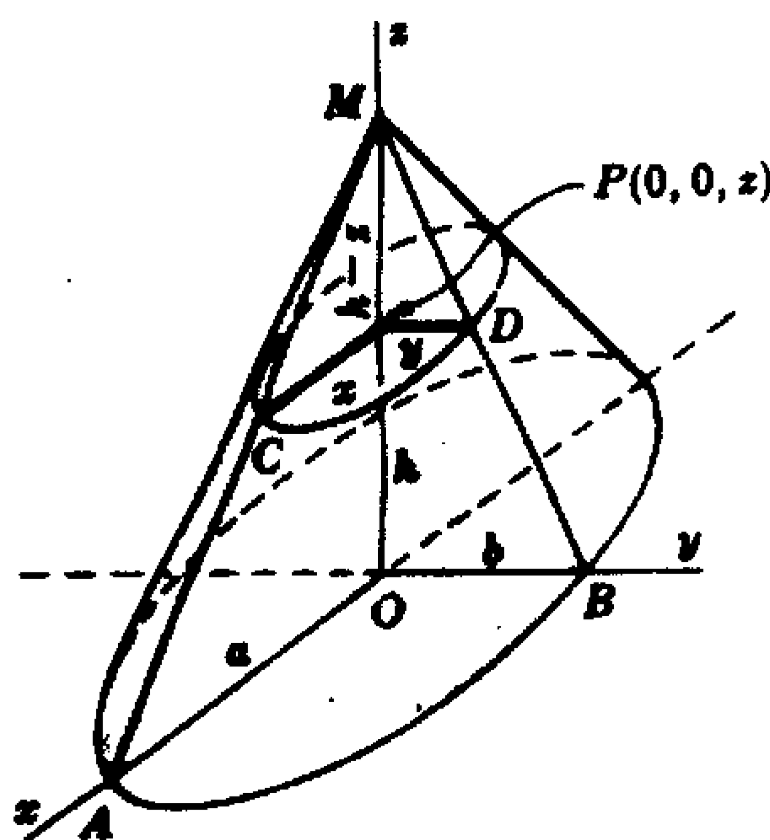
(أنظر إلى الشكل ٣٦ – ٧) . إن شكل مقطع المخروط بمستوى موازى لقاعدته هو قطع ناقص طول محوره الأكبر $2x$ وطول الأصغر $2y$.

ومن المثلثات المتشابهة فى الشكل المرافق ٣٦ – ٧ نجد أن :

$\frac{PC}{OA} = \frac{PM}{OM}$ أو $\frac{x}{a} = \frac{h - z}{h}$; كذلك $\frac{PD}{OB} = \frac{PM}{OM}$ أو $\frac{y}{b} = \frac{h - z}{h}$

ومساحة المقطع تساوى $\pi xy = \frac{\pi ab(h - z)^2}{h^2}$. وبالتالى فإن :

$$V = \frac{\pi ab}{h^2}\int_0^{h} (h - z)^2\, dz = \frac{1}{3}\pi abh \text{ cubic units}$$



شكل ٣٦ — ٧

مسـائل اضـافية

٧ – جسم قاعدته دائرية الشكل نصف قطرها 4 units وحدات . أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع للجسم عمودى على قطر ثابت (المحور x فى شكل المسألة ١) هو (أ) نصف دائرة (ب) مربع (جـ) مثلث قائم متساوى الساقين يقع وتره فى مستوى القاعدة .

ج : (أ) $128\pi/3$، (ب) $1024/3$، (جـ) $256/3$ cubic units

٨ – جسم قاعدته على شكل قطع ناقص طول محوره الأكبر 10 ومحوره الأصغر 8 . أوجد حجم هذا الجسم إذا علمت أن شكل كل مقطع للجسم عمودى على المحور الأكبر هو مثلث قائم متساوى الساقين يقع أحد ساقيه فى مستوى القاعدة .

ج : 640/3 cubic units

٩ – جسم قاعدته القطعة الواقعة بين القطع المكافىء $y^2 = 12x$ والمستقيم $x = 3$ وشكل كل مقطع للجسم عمودى على محور القطع هو مربع . أوجد حجمه . ج : 216 cubic units

١٠ – تقع قاعدة جسم فى الربع الأول بين المستقيم $4x + 5y = 20$ والمحورين الاحداثيين . أوجد حجمه إذا علمت أن شكل كل مقطع له عمودى على المحور x هو نصف دائرة . ج : $10\pi/3$ cubic units

١١ – جسم قاعدته على شكل دائرة $x^2 + y^2 = 16x$, وشكل كل مقطع له عمودى على المحور مستطيل ارتفاعه ضعفا بعد المستوى القاطع عن نقطة الأصل . أوجد حجمه ج : 1024π cubic units

١٢ – جسم على شكل بوق يتولد من حركة دائرة يستند طرفا أحد أقطارها الواقع فى الربع الأول على القطعين المكافئين $y^2 + 8x = 64$ و $y^2 + 16x = 64$, بحيث تبقى موازية للمستوى xz . أوجد حجم الجسم . ج : $256\pi/15$ cubic units

١٣ – رأس مخروط فى النقطة $(a, 0, 0)$ وقاعدته الدائرة $y^2 + z^2 - 2by = 0,\ x = 0$. أوجد حجمه .

ج : $\frac{1}{3}\pi ab^2$ cubic units

١٤ – اوجد حجم الجسم الواقع بين الجسم المكافىء الدورانى $x = y^2 + 4z^2$ والمستوى $x = 4$.

ج : 4π cubic units

١٥ – برميل على شكل مجسم قطع ناقص دورانى قطعت منه قطعتان متساويتان من الطرفين . أوجد حجمه إذا علمت أن ارتفاعه 1.5 m وأن نصف قطر مقطعه الأوسط 0.75 m وأن نصف قطر نهايته 0.5 m .

ج : $11\pi/16 m^3$.

١٦ – مقطع جسم بمستوى عمودى على المحور x هو دائرة يستند طرفا أحد اقطارها على القطعين المكافئين $y^2 = 9x$ و $x^2 = 9y$. أوجد حجمه .

ج : $6561\pi/280$ cubic units

١٧ – مقطع جسم بمستوى عمودى على المحور x هو مربع يستند طرفا أحد قطريه على القطعين المكافئين $y^2 = 4x$ و $x^2 = 4y$. أوجد حجمه . ج : 144/35 cubic units .

١٨ – حفر ثقب دائرى نصف قطره 1 cm فى كرة نصف قطرها 3 cm بحيث ينطبق محور الثقب على أحد أقطار الكرة . أوجد حجم الجزء المتبقى من الكرة . ج : $64\pi\sqrt{2}/3\ cm^3$

الفصل السابع والثلاثون

المراكز المتوسطة للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة

كتلة جسم فيزيائى : هى قياس لكية المادة فى الجسم ، بينما حجم الجسم هو قياس للفراغ الذى يشغله . إذا كانت كتلة وحدة الحجوم من جسم هى نفسها فى كل موضع منه فإننا نقول عن الجسم إنه متجانس أو أن كثافته ثابتة .

وأنه من المرغوب فيه جداً فى الفيزياء والميكانيكا أن نعتبر كتلة معينة متمركزة فى نقطة ، نسميها مركز الكتلة (مركز ثقل الجسم) . وإذا كان الجسم متجانساً فإن هذه النقطة تنطبق على مركزه الهندسى أو مركزه المتوسط . فمركز الكتلة لكرة مطاطية متجانسة مثلا ينطبق على المركز المتوسط (المركز) للكرة باعتبارها كرة هندسية صلبة .

المركز المتوسط لصفيحة مستطيلة الشكل من الورق يقع فى منتصف المسافة بين وجهيها ولكن يمكن أن نعتبره على أحد الوجهين عند نقطة تقاطع القطرين . ومركز الكتلة لصفيحة رقيقة يمكن اعتباره منطبقاً على مركزها المتوسط باعتبارها صفيحة مستوية .

ستقصر الدراسة فى هذا الفصل والفصل الذى يليه على السطوح المستوية وعلى الأجسام الدورانية . أما دراسة الأجسام الأخرى وأقواس المنحنيات (قطع أسلاك متجانسة رفيعة) والكتل غير المتجانسة فتؤجل إلى فصول اخرى .

العزم (الأول) M_L لسطح مستو بالنسبة لمستقيم ماهو حاصل ضرب مساحته فى البعد الموجه لمركزه المتوسط عن المستقيم . وعزم سطح مركب بالنسبة لمستقيم هو مجموع عزوم السطوح المكونة له بالنسبة لنفس المستقيم .

ويمكن الحصول على سطح مستو بالنسبة للمحاور الاحداثية كما يلى :

١ – نبين برسم تقريبى المساحة وشريطاً ممثلا ونبين المستطيل المقرب .

٢ – نشكل حاصل ضرب مساحة المستطيل فى بعد مركزه المتوسط عن المحور ونشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣ – بفرض أن عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية نطبق النظرية الأساسية ، وإذا كان المركز المتوسط لسطح مستو (x و y) وكانت مساحته A وعزماه بالنسبة للمحورين x و y هما M_x و M_y فإن :

$$A\bar{y} = M_x \quad , \quad A\bar{x} = M_y$$

انظر المسائل ١ – ٨

العزم (الأول) لجسم صلب حجمه V ينتج عن دوران سطح مستو حول محور إحداثى ، بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور ، فإنه يمكن حسابه كما يلى :

١ – بين برسم تقريبى السطح وشريطاً ممثلا والمستطيل المقرب .

٢ – شكل حاصل ضرب الحجم ، القرص أو القشرة ، الناتج عن دوران المستطيل حول محور الدوران فى بعد المركز المتوسط للمستطيل عن المستوى ثم شكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣ – بفرض أن عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية نطبق النظرية الأساسية . عندما يدور الجسم حول المحور x فإن مركزه المتوسط (x و y) يقع على المحور . وإذا كان M_{yz} عزم الجسم بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور فإن :

$$V\bar{x} = M_{yz}, \quad \bar{y} = 0$$

وبشكل مماثل عندما يدور الجسم حول المحور y فإن مركزه المتوسط (x , y) يقع على المحور . وإذا كان M_{xz} عزم الجسم بالنسبة لمستوى مار بنقطة الأصل وعمودى على المحور y فإن :

$$V\bar{y} = M_{xz}, \quad \bar{x} = 0$$

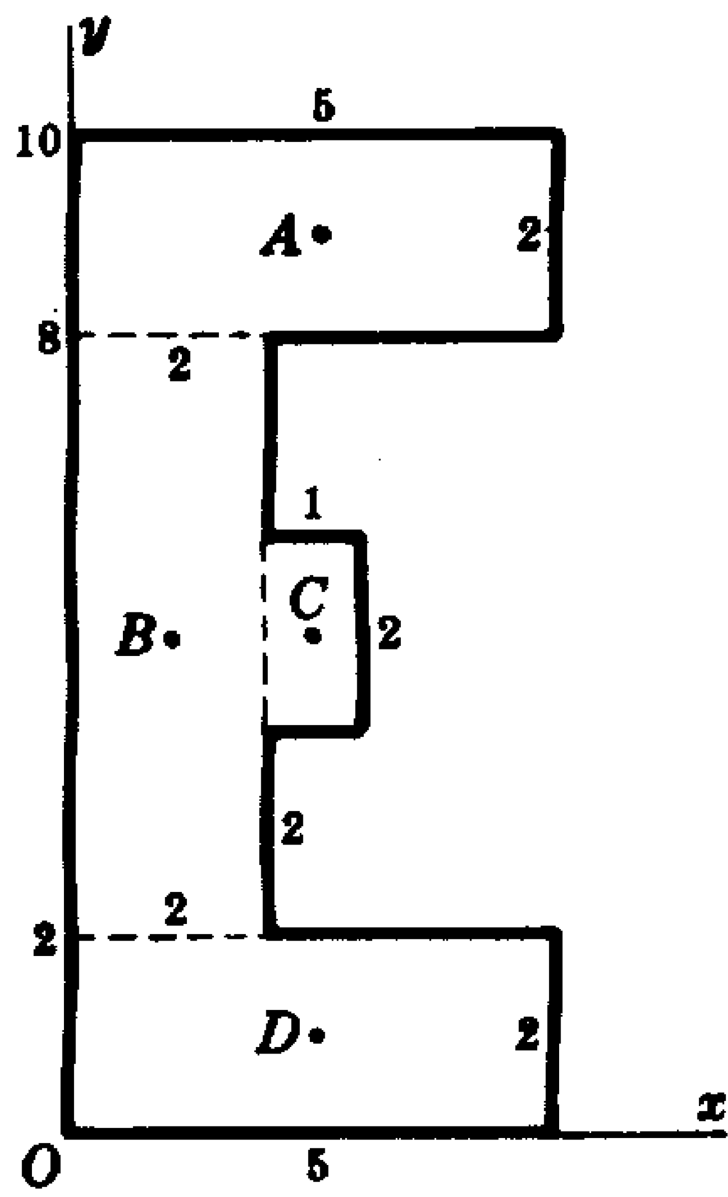
انظر المسائل ٩ – ١٢

نظرية بابوس الأول : إذا دار سطح مستو حول محور فى مستواه وغير قاطع له فإن حجم الجسم الناتج يساوى حاصل ضرب مساحة السطح فى طول المسار الذى يرسمه مركزه المتوسط .

انظر المسائل ١٣ – ١٥

مســائل محــلولة

١ – المساحة المستوية المبينة أوجد (ا) العزم بالنسبة للمحورين الاحداثيين (ب) احداثيى المركز المتوسط ($\bar{x}, \bar{y}$)



شكل ٣٧ — ١

(ا) إن مساحة المستطيل العلوى 10 units $= 2 \times 5$. ومركزه المتوسط هو $A(2.5, 9)$.

وبالمثل فإن مساحات المستطيلات الأخرى ومراكزها المتوسطة هى : 12 units ، $B(1, 5)$ ، 2 units $C(2.5, 5)$ و 10 units $D(2.5, 1)$.

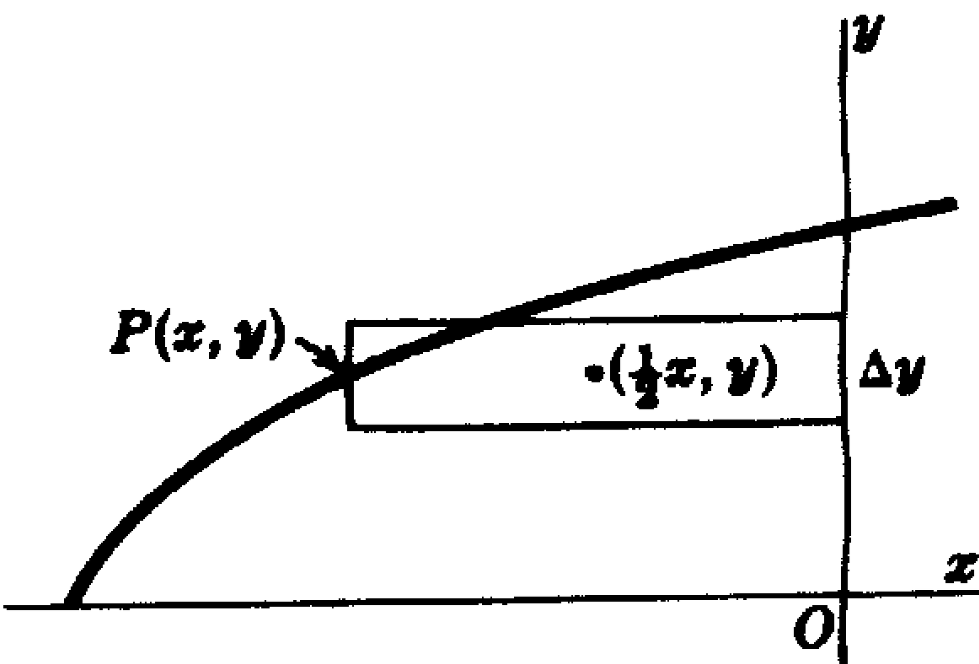
إذن عزوم المستطيلات بالنسبة للمحور x هى $10(9), 12(5), 2(5), 10(1)$
وبالتالى فإن عزم المساحة المستوية المبينة بالشكل بالنسبة للمحور y هو :

$$M_x = 10(9) + 12(5) + 2(5) + 10(1) = 170$$

وبالمثل نجد أن عزم المساحه المبينة بالشكل بالنسبه للمحو y هو :

$$M_y = 10(2.5) + 12(1) + 2(2.5) + 10(2.5) = 67$$

(ب) إن مساحة القطعة الموضحة بالشكل هى $A = 10 + 12 + 2 + 10 = 34$ وحيث أن $A\bar{x} = M_y$ فإن $34\bar{x} = 67$ وبالتالى $\bar{x} = 67/34$ وبما أن $A\bar{y} = M_x$ فإن $34\bar{y} = 170$ وبالتالى $\bar{y} = 5$ و النقطة $(67/34, 5)$ هى المركز المتوسط .



شكل ٣٧ — ٢

٢ – أوجد العزمين حول المحورين الاحداثيين لسطح مستو محدد بالمنحنى $x = y^2 - 9$ وواقع فى الربع الثانى .

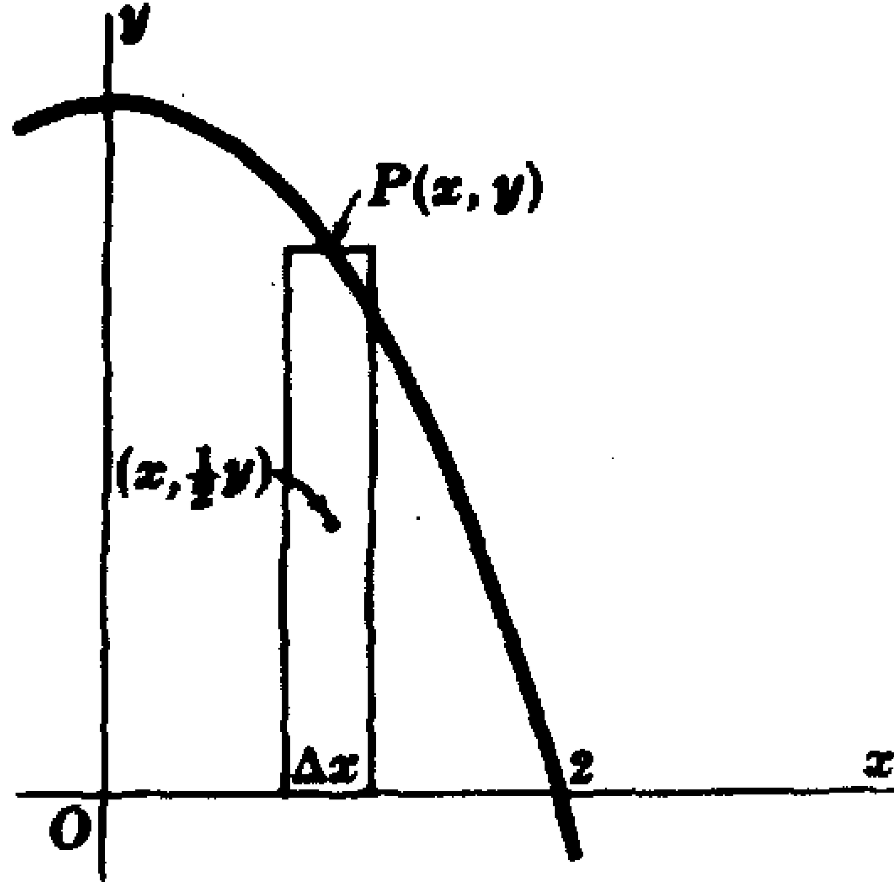
باستخدام المستطيل المقرب المبين بالشكل . والذى مساحته $-x . \Delta y$ ومركزه المتوسط $(\frac{1}{2}x, y)$ وعزمه بالنسبة للمحور x هو $y(-x\Delta y)$ إذن

$$M_x = -\int_0^3 y \cdot x\, dy = -\int_0^3 y(y^2 - 9)\, dy = \frac{81}{4}$$

و بالمثل فإن عزم المستطيل المقرب بالنسبة للمحور y هو $(y\ \Delta\ x.\ x-)\ x\frac{1}{2}$ إذن :

$$M_y = -\frac{1}{2}\int_0^3 x^2\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^3 (y^2-9)^2\,dy = -\frac{324}{5}$$

٣ ـ عين المركز المتوسط لسطح مستو فى الربع الأول ومحدد بالقطع المكافىء $y = 4 - x^2$.



شكل ٣٧ ـ ٣

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو $(x, \frac{1}{2}y)$ وإن :

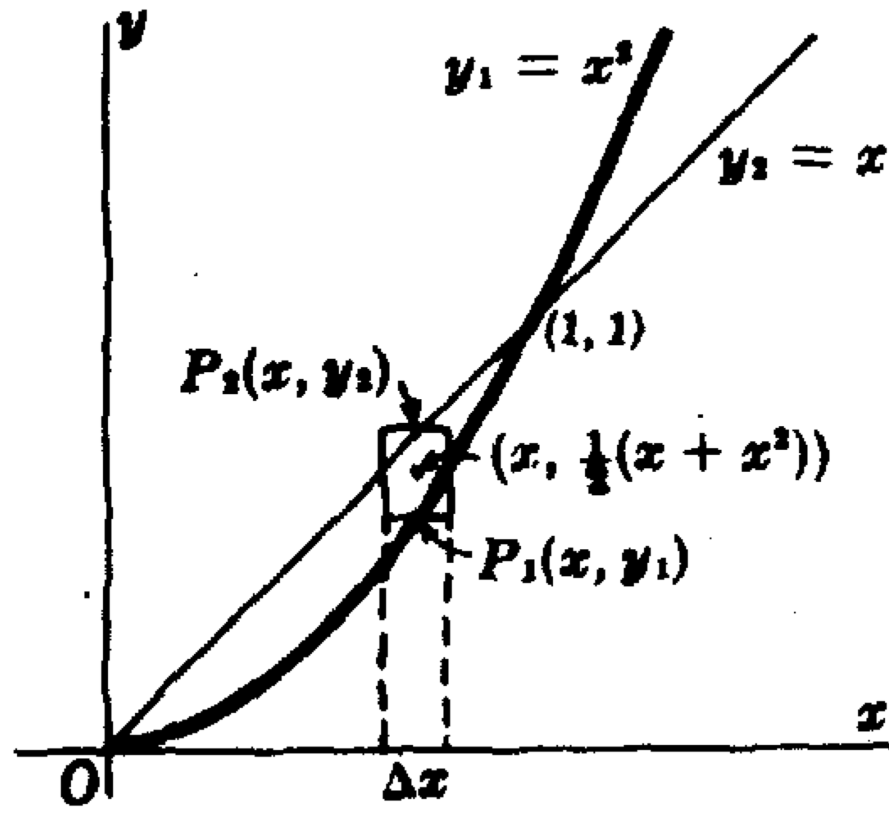
$$A = \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 (4-x^2)\,dx = 16/3$$

$$M_x = \int_0^2 \tfrac{1}{2}y\cdot y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)^2\,dx = 128/15$$

$$M_y = \int_0^2 x\cdot y\,dx = \int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 4$$

إذن $\bar{x} = M_y/A = 3/4,\ \bar{y} = M_x/A = 8/5,$ و احداثى المركز المتوسط هـ $(3/4, 8/5)$.

٤ ـ عين المركز المتوسط لسطح فى الربع الأول ومحدد بالقطع المكافىء $y = x^2$ والمستقيم $y = x$.



شكل ٣٧ ـ ٤

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو $[x, \frac{1}{2}(x + x^2)]$ وإن :

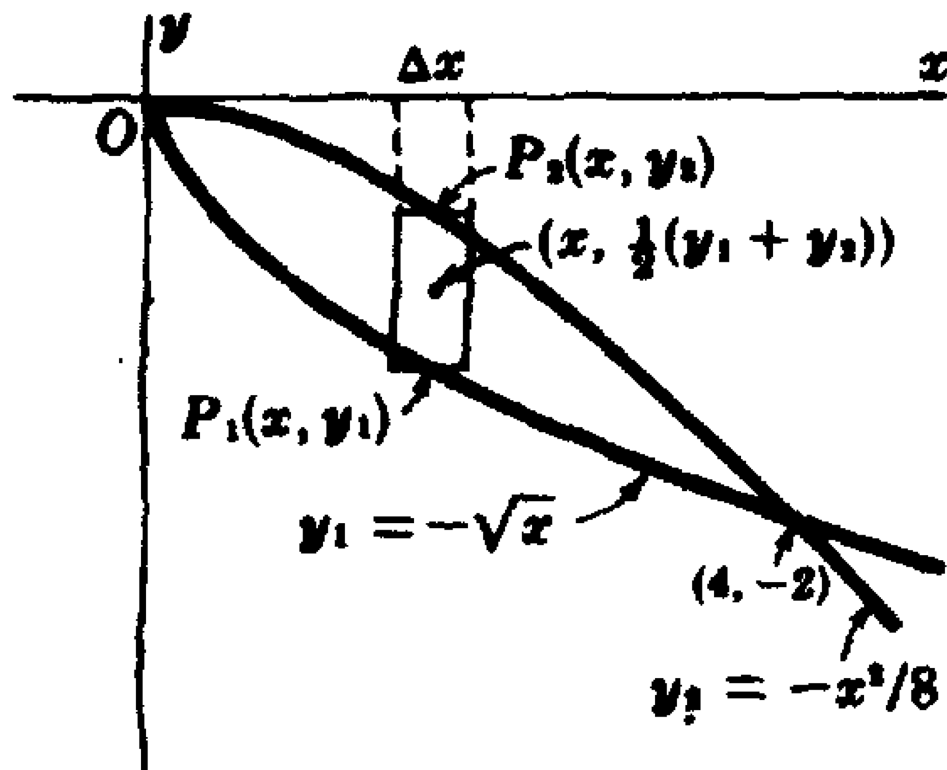
$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/6$$

$$M_x = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x+x^2)(x-x^2)\,dx = 1/15$$

$$M_y = \int_0^1 x(x-x^2)\,dx = 1/12$$

اذن $\bar{x} = M_y/A = 1/2,\ \bar{y} = M_x/A = 2/5,$ و احداثى المركز المتوسط هما $(1/2, 2/5)$.

٥ ـ عين المركز المتوسط للسطح المحدد بالقطعين المكافئين $x = y^2$ و $x^2 = -8y$.



شكل ٣٧ ـ ٥

إن المركز المتوسط للمستطيل المقرب هو $[x, \frac{1}{2}(-x^2/8 - \sqrt{x})]$ وإن :

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{8}{3}$$

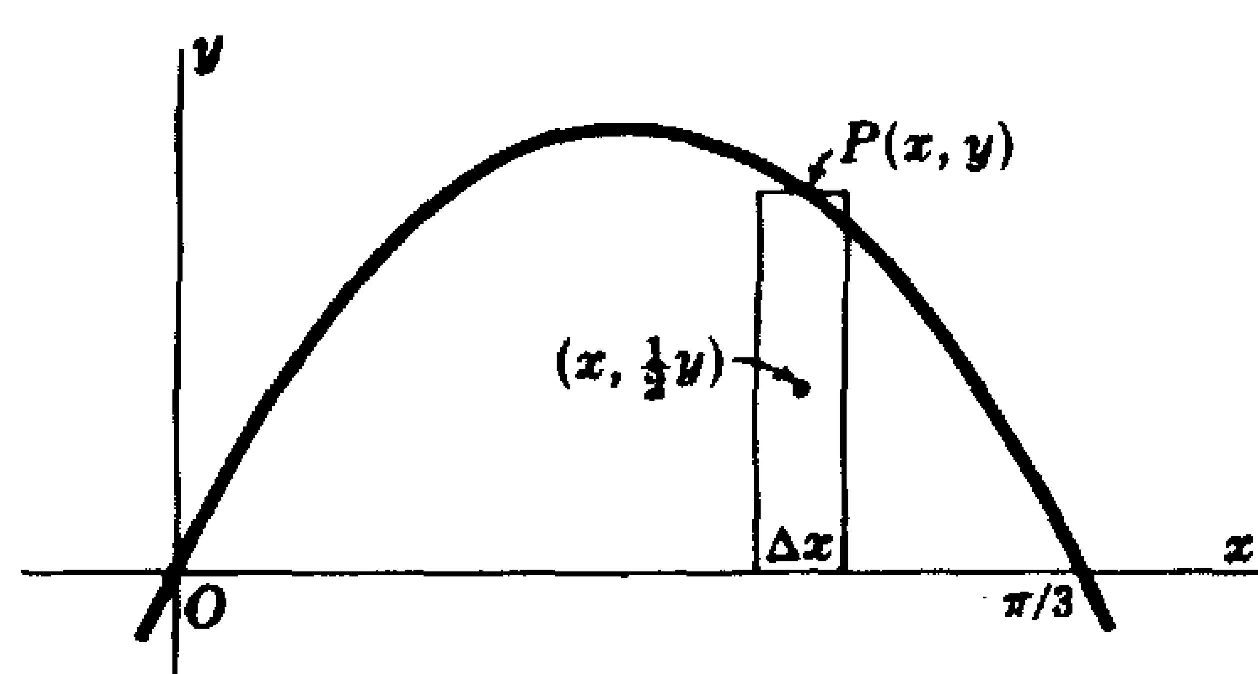
$$M_x = \int_0^4 \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{8} - \sqrt{x}\right)\left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = -\frac{12}{5}$$

$$M_y = \int_0^4 x\left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{24}{5}$$

والمركز المتوسط هو $(\bar{x}, \bar{y}) = (9/5, -9/10).$

٦ ـ عين المركز المتوسط للسطح الواقع تحت المنحنى $y = 2\sin 3x$ من $x = 0$ إلى $x = \pi/3$. أنظر الشكل ٣٧ـ٦ واستخدم المستطيل المقرب الموضح فى الشكل والذى مركزه المتوسط هو $(x, \frac{1}{2}y)$.

$$A = \int_0^{\pi/3} y\,dx = \int_0^{\pi/3} 2\sin 3x\,dx = -\frac{2}{3}\cos 3x\Big]_0^{\pi/3} = \frac{4}{3}$$

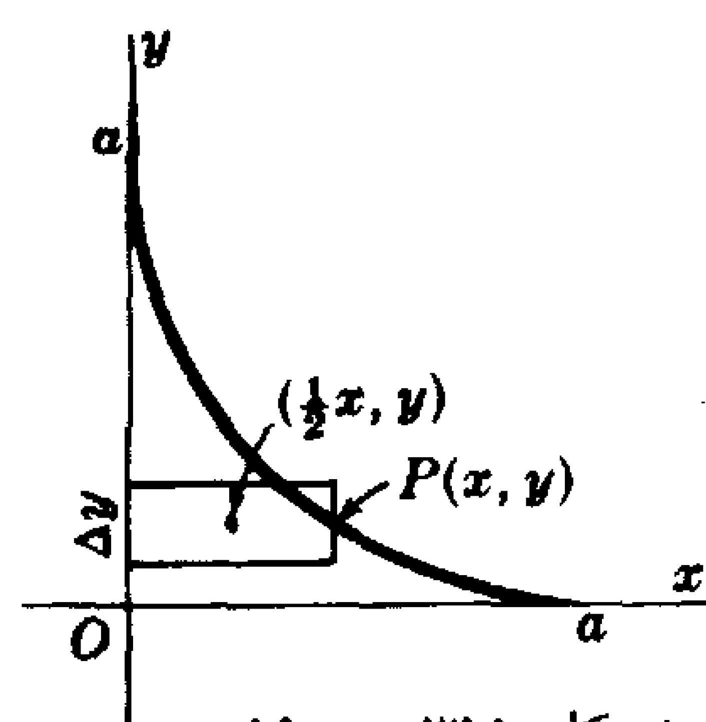


شكل ٣٧ — ٦

$$M_x = \int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}y\cdot y\,dx = 2\int_0^{\pi/3}\sin^2 3x\,dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x\right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}$$
$$M_y = \int_0^{\pi/3} x\cdot y\,dx = 2\int_0^{\pi/3} x\sin 3x\,dx$$
$$= \frac{2}{9}\left[\sin 3x - 3x\cos 3x\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{9}\pi$$

والمركز المتوسط هو النقطة $(M_y/A, M_x/A) = (\pi/6, \pi/4)$.

٧ — عين المركز المتوسط الواقع فى الربع الأول ومحدد بالمنحنى الدويرى $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$. التحنى . أنظر الشكل ٣٧ — ١ .



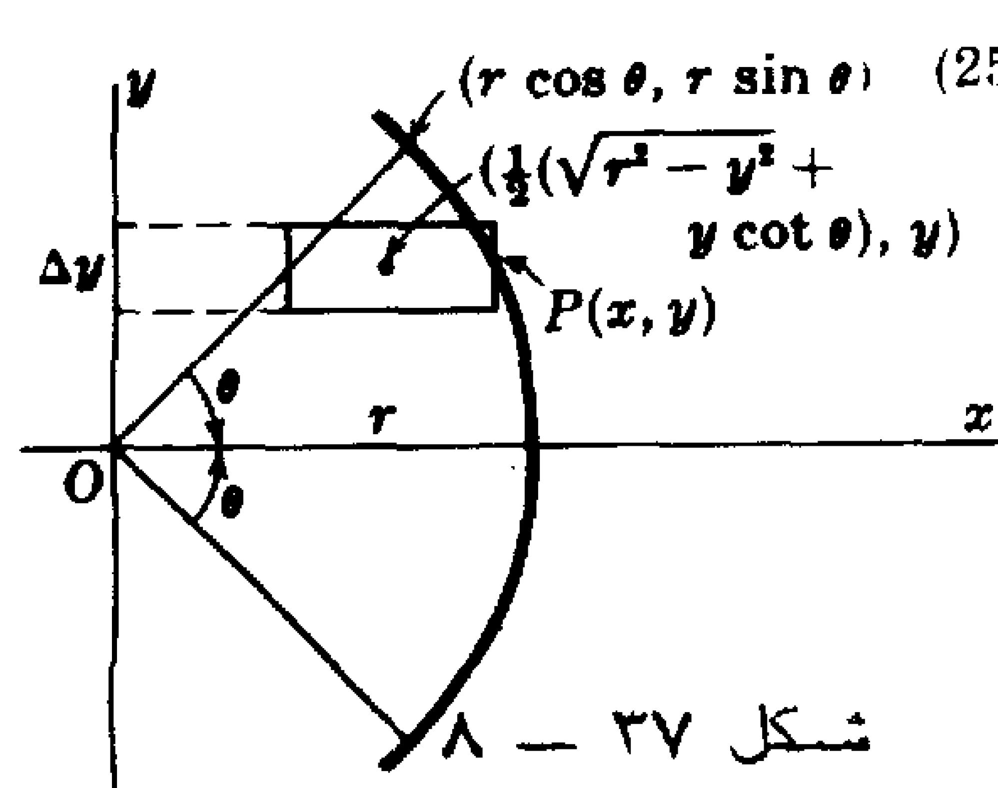
شكل ٣٧ — ٧

من التماثل نجد أن $\bar{y} = \bar{x}$ وأن

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} x\,dy = \int_0^{\pi/2} a\cos^3\theta\cdot 3a\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{3}{4}a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$= \frac{3}{8}a^2\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8}\sin 4\theta + \frac{1}{6}\sin^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{32}\pi a^2$$

$$M_x = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} y\cdot x\,dy = 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\sin^5\theta\,d\theta = 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)^2\sin\theta\,d\theta$$
$$= -3a^3\left[\frac{\cos^5\theta}{5} - \frac{2\cos^7\theta}{7} + \frac{\cos^9\theta}{9}\right]_0^{\pi/2} = \frac{24a^3}{315}$$

اذن $\bar{y} = M_x/A = 256a/315\pi$, والمركز المتوسط هو النقطة $(256a/315\pi, 256a/315\pi)$.



شكل ٣٧ — ٨

٨ — بين أن المركز المتوسط لقطاع دائرى نصف قطره r وزاويته 2θ يبعد $\dfrac{2r\sin\theta}{3\theta}$ عن مركز الدائرة .

لنأخذ القطاع الدائرى بحيث يقع مركزه المتوسط على المحور x . ومن التماثل نجد أن الاحداثى السينى للمركز المتوسط المطلوب هو نفسه المركز المتوسط للقطاع الدائرى الذى يقع فوق المحور x والمحدد بالدائرة والمستقيم $y = x\tan\theta$.

$$A = \int_0^{r\sin\theta}(\sqrt{r^2-y^2} - y\cot\theta)\,dy$$
$$= \left[\frac{1}{2}y\sqrt{r^2-y^2} + \frac{1}{2}r^2\arcsin\frac{y}{r} - \frac{1}{2}y^2\cot\theta\right]_0^{r\sin\theta} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$M_y = \int_0^{r\sin\theta}\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-y^2} + y\cot\theta)(\sqrt{r^2-y^2} - y\cot\theta)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{r\sin\theta}(r^2 - y^2 - y^2\cot^2\theta)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[r^2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^3\cot^2\theta\right]_0^{r\sin\theta} = \frac{1}{3}r^3\sin\theta, \qquad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{2r\sin\theta}{3\theta}$$

٩ – عين المركز المتوسط $(\bar{x}, 0)$ للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٣ حول المحور x . استخدم المستطيل المقرب الذى فى المسألة ٣ وطريقة القرص :

$$V = \pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2 (4-x^2)^2\,dx = 256\pi/15,$$

$$\bar{x} = M_{yz}/V = 5/8 \quad \text{و} \quad M_{yz} = \pi\int_0^2 x\cdot y^2\,dx = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2\,dx = 32\pi/3,$$

١٠ – عين المركز المتوسط $(0, \bar{y})$ للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٣ حول المحور y . استخدم المستطيل المقرب الذى فى المسألة ٣ وطريقة القشرة :

$$V = 2\pi\int_0^2 xy\,dx = 2\pi\int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 8\pi,$$

$$\bar{y} = M_{xz}/V = 4/3 \quad \text{و} \quad M_{xz} = 2\pi\int_0^2 \tfrac{1}{2}y\cdot xy\,dx = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2\,dx = 32\pi/3,$$

١١ – عين المركز المتوسط $(\bar{x}, 0)$ للجسم الناتج عن دوران قطعة سطح المسألة ٤ حول المحور x . استخدم المستطيل المقرب الذى فى المسألة ٤ وطريقة القرص .

$$\bar{x} = M_{yz}/V = 5/8. \quad \text{و} \quad V = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx = 2\pi/15, \quad M_{yz} = \pi\int_0^1 x(x^2-x^4)\,dx = \pi/12,$$

١٢ – عين المركز المتوسط $(0, \bar{y})$ للجسم الناتج عن دوران سطح المسألة ٤ حول المحور y .

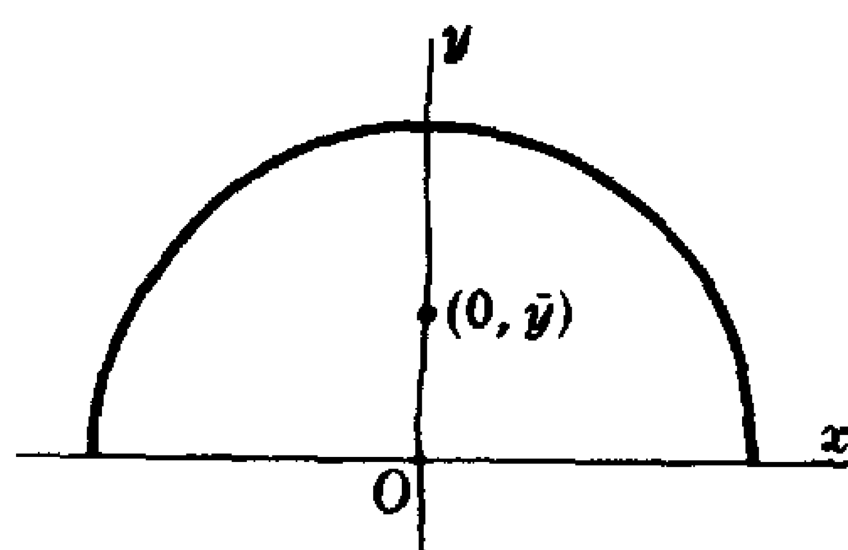
استخدم المستطيل المقرب الذى فى المسألة ٤ وطريقة القشرة .

$$V = 2\pi\int_0^1 x(x-x^2)\,dx = \pi/6,$$

$$\bar{y} = M_{xz}/V = 1/2 \quad \text{و} \quad M_{xz} = 2\pi\int_0^1 \tfrac{1}{2}(x+x^2)\cdot x(x-x^2)\,dx = \pi/12,$$

١٣ – عين المركز المتوسط لسطح على شكل نصف دائرة قطرها r .

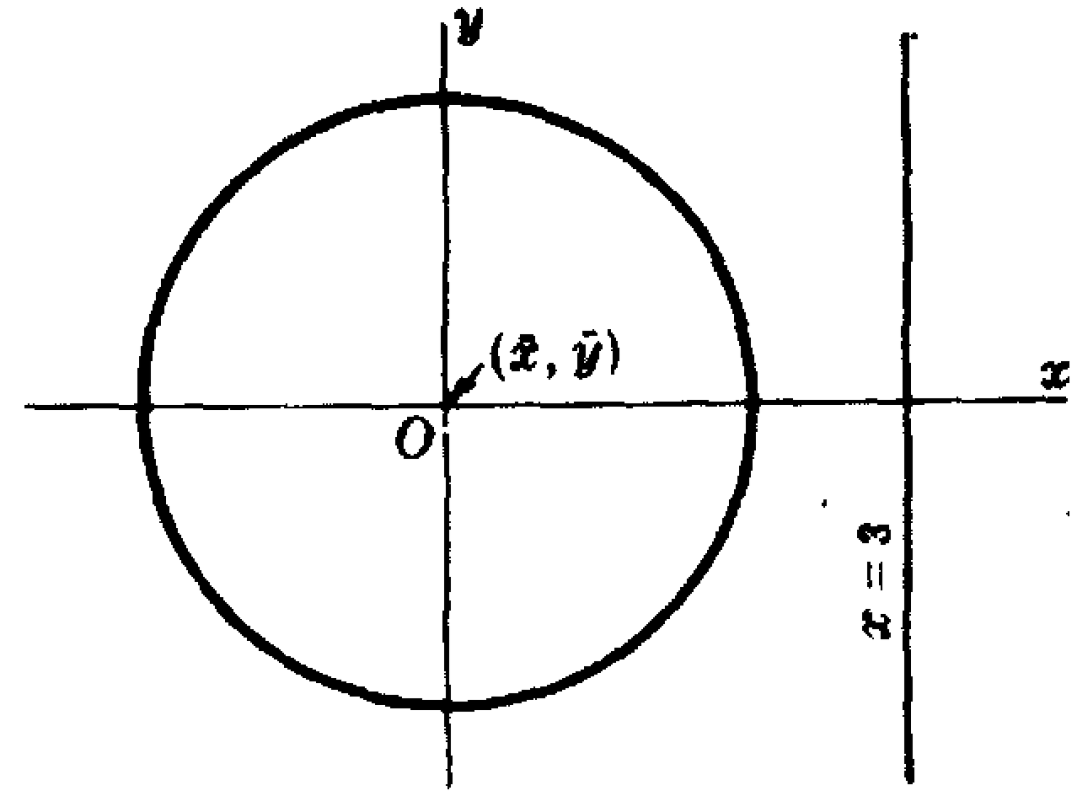
لتأخذ نصف الدائرة كما فى الشكل فيكون $x = 0$.



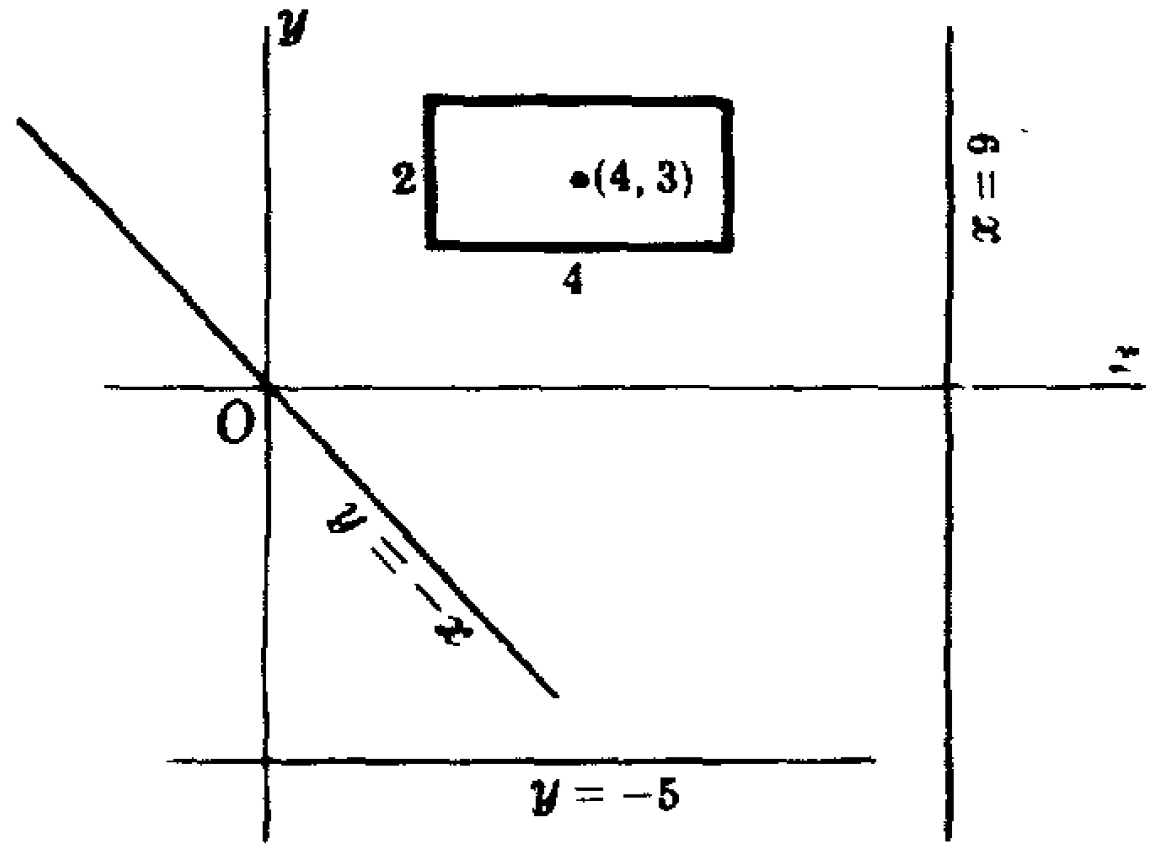
شكل ٣٧ — ٩

إن مساحة نصف الدائرة $\frac{1}{2}\pi r^2$ والجسم الناتج عن دورانه حول المحور x هو كرة حجمها $4/3\,\pi r^3$. أثناء هذا الدوران يرسم المركز المتوسط $(0, \bar{y})$ لنصف الدائرة دائرة نصف قطرها $\bar{y}$. وعلى هذا يكون استناداً إلى نظرية بابوس $\frac{1}{2}\pi r^2\cdot 2\pi\bar{y} = \frac{4}{3}\pi r^3$ ومنه $\bar{y} = 4r/3\pi$ والمركز المتوسط هو النقطة $(0, 4r/3\pi)$.

١٤ – عين حجم الجسم الناتج عن دوران الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ حول المستقيم $x = 3$. أنظر الشكل ٣٧ — ١٠ . يرسم المركز المتوسط للسطح الدائرى أثناء الدوران دائرة نصف قطرها 3 . وعلى هذا فإن $V = 4\pi\,(6\pi)$ أى أن الحجم المطلوب يساوى $24\pi^2$ cubic units .



شكل ٣٧ ــ ١٠



شكل ٣٧ ــ ١١

١٥ – أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران المستطيل الموضح فى الشكل ٣٧ – ١١ حول (١) المستقيم $x = 9$ ، (٢) المستقيم $y = -5$ ، (٣) المستقيم $y = -x$.

(١) يرسم المركز المتوسط (4,3) دائرة نصف قطرها 5 ولذلك فإن $V = 8(10\pi) = 80\pi$ cu. un.

(٢) يرسم المركز المتوسط دائرة نصف قطرها 8 ولذلك فإن $V = 8(16\pi) = 128\pi$ cubic units.

(٣) يرسم المركز المتوسط دائرة نصف قطرها $(4 + 3)/\sqrt{2}$ ولذلك فإن $V = 56\sqrt{2}\pi$ cubic units.

مســائل اضــافية

عين فى المسائل من ١٦ – ٢٦ المركز المتوسط للسطح المفروض :

١٦ – $y = x^2,\ y = 9$ ج : $(0, 27/5)$

١٧ – $y = 4x - x^2,\ y = 0$ ج : $(2, 8/5)$

١٨ – $y = 4x - x^2,\ y = x$ ج : $(3/2, 12/5)$

١٩ – $3y^2 = 4(3 - x),\ x = 0$ ج : $(6/5, 0)$

٢٠ – $x^2 = 8y,\ y = 0,\ x = 4$ ج : $(3, 3/5)$

٢١ – $y = x^2,\ 4y = x^3$ ج : $(12/5, 192/35)$

٢٢ – $x^2 - 8y + 4 = 0,\ x^2 = 4y,$ والربع الأول . ج : $(3/4, 2/5)$

٢٣ – الجزء الواقع فى الربع الأول من $x^2 + y^2 = a^2$. ج : $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$

٢٤ – الجزء الواقع فى الربع الأول من $9x^2 + 16y^2 = 144$. ج : $(16/3\pi, 4/\pi)$

٢٥ – العقدة اليمنى $y^2 = x^4(1 - x^2)$. ج : $(32/15\pi, 0)$

٢٦ – العقد الأول من $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$. ج : $(\pi, 5/6)$

٢٧ – بين أن بعد المركز المتوسط لمثلث عن قاعدته يساوى $1/3$ الارتفاع .

عين فى المسائل من ٢٨ إلى ٣٨ المركز المتوسط للجسم الناتج عن دوران السطح المفروض حول المستقيم المفروض .

٢٨ – $y = x^2,\ y = 9,\ x = 0;$ حول المحور y . ج : $\bar{y} = 6$

٢٩ – $y = x^2,\ y = 9,\ x = 0;$ حول المحور x . ج : $\bar{x} = 5/4$

٣٠ – $y = 4x - x^2,\ y = x;$ حول المحور x . ج : $\bar{x} = 27/16$

٣١ – $y = 4x - x^2,\ y = x;$ حول المحور y . ج : $\bar{y} = 27/10$

٣٢ – $x^2 - y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 8;$ حول المحور x . ج : $\bar{x} = 27/4$

٣٣ – $x^2 - y^2 = 16,\ y = 0,\ x = 8;$ حول المحور y . ج : $\bar{y} = 3\sqrt{3}/2$

٣٤ – $(x-2)y^2 = 4,\ y = 0,\ x = 3,\ x = 5;$ حول المحور x . ج : $= (2 + 2\ln 3)/(\ln 3)$

٣٥ – $x^2y = 16(4-y),\ x = 0,\ y = 0,\ x = 4;$ حول المحور y . ج : $\bar{y} = 1/(\ln 2)$

٣٦ – السطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بـ $y^2 = 12x$ والوتر البؤرى العمودى حول المحور x .

ج : $\bar{x} = 2$

٣٧ – سطح المسألة ٣٦ حول المحور y . ج : $\bar{y} = 5/2$

٣٨ – سطح المسألة ٣٦ حول دليل القطع المكافىء . ج : $\bar{y} = 75/32$

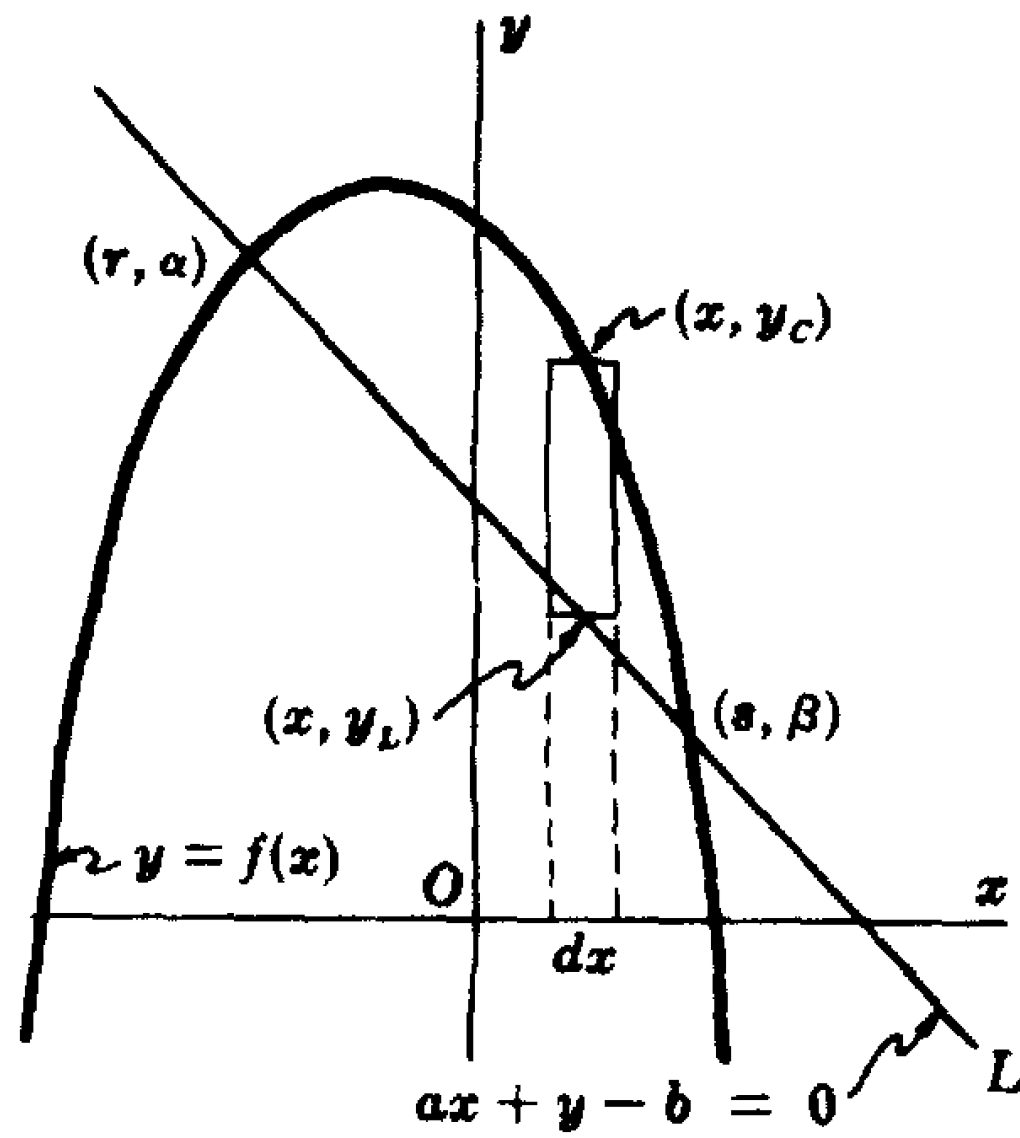
٣٩ – برهن نظرية بابوس فى هذا الفصل .

٤٠ – استخدم نظرية بابوس لإيجـــاد :

(أ) حجم مخروط دائرى قائم ارتفاعه a ونصف قطر قاعدته b .

(ب) الحلقة الناتجة عن دوران القطع الناقص $4(x-6)^2 + 9(y-5)^2 = 36$ حول المحور x .

ج : (أ) $\frac{1}{3}\pi ab^2$ c.u. (ب) $60\pi^2$ c.u.



شكل ٣٧ — ١٢،

٤١ – السطح A المحدد بـ $y = -x^2 - 3x + 6$ و $x + y - 3 = 0,$

عين (أ) المركز المتوسط (ب) الحجم الناتج عن دوران A حول المستقيم المحدد له .

ج : (أ) $(-1, 28/5)$, (ب) $2\pi\left(\frac{\bar{x} + \bar{y} - 3}{\sqrt{2}}\right) \cdot A = \frac{256\sqrt{2}}{15}\pi$ cu. un.

٤٢ – بين أنه إذا كان V الحجم الناتج عن دوران قطعة السطح A (المبينة فى الشكل ٣٧ – ٢١) حول المستقيم L ، فإن

$$V = 2\pi\left(\frac{a\bar{x} + \bar{y} - b}{\sqrt{a^2+1}}\right) \cdot A = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}(aM_y + M_x - bA)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}\int_r^s (y_C - y_L)^2\, dx$$

٤٣ – استخدم الصيغة الموجودة فى المسألة ٤٢ لحساب الحجم الناتج عن دوران السطح المفروض حول المستقيم المفروض :

(أ) $y = -x^2 - 3x + 6,\ x + y - 3 = 0$

(ب) $y = 2x^2,\ 2x - y + 4 = 0$

ج : (أ) انظر المسألة ٤١ (ب) $162\sqrt{5}\,\pi/25$ cu. un.

الفصل الثامن والثلاثون

عـــــزوم القصور الــــــذاتى
للسطوح المستوية والأجسام الدورانية الصلبة

يمكن ايجاد عزم القصور الذاتى I_L **لسطح مستو** A بالنسبة لمستقيم L واقع فى مستواه كما يلى :

١ – نبين برسم تقريبى السطح و شريطاً ممثلا موازياً للمستقيم و المستطيل المقرب .

٢ – نشكل حاصل ضرب مساحة المستطيل فى مربع بعد مركزه المتوسط عن المستقيم ثم نشكل المجموع بالنسبة لجميع – المستطيلات .

٣ – نجعل عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية و نطبق النظرية الأساسية .

أنظر المسائل ١ – ٤

لايجاد عزم القصور الذاتى I_L **لجسم حجمه** V يتولد عن دوران سطح مستوى حول مستقيم L واقع فى نفس المستوى بالنسبة لذلك المستقيم (محور الجسم) نتبع ما يلى :

١ – نبين برسم تقريبى شريحة ممثلة موازية للمحور وكذلك المستطيل المقرب .

٢ – نشكل حاصل ضرب الحجم الناتج عن دوران المستطيل حول المحور (القشرة) فى مربع بعد الوتر المتوسط للمستطيل عن المحور ثم نشكل المجموع بالنسبة لجميع المستطيلات .

٣ – نجعل عدد المستطيلات يؤول إلى مالا نهاية و نطبق النظرية الأساسية :

أنظر المسائل ٥ – ٨

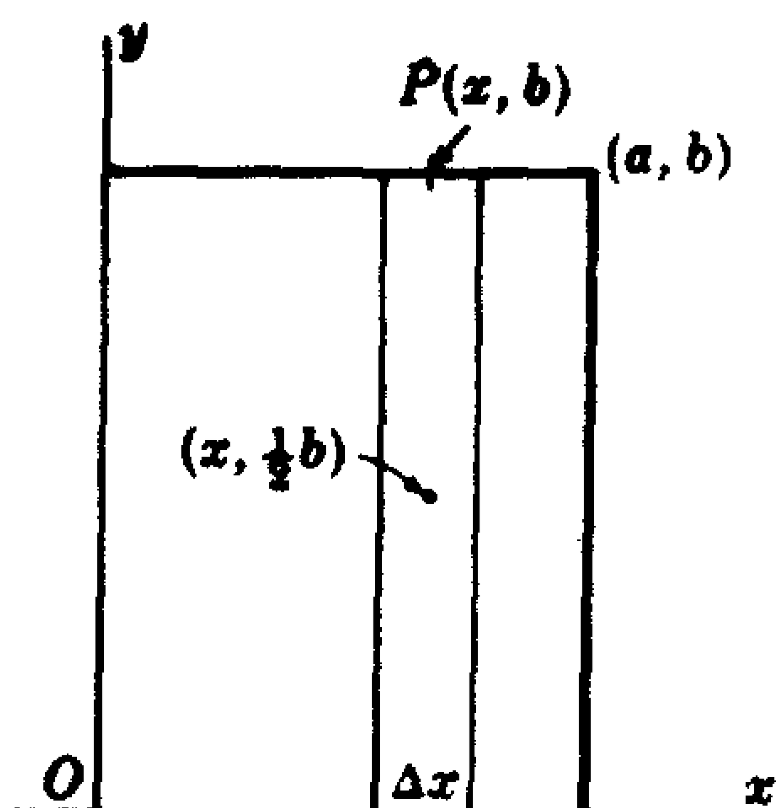
نصف قطـــر الدوران : نسمى العدد الموجب R المعرف بالعلاقة $I_L = AR^2$ فى حالة السطوح المستوية أو بالعلاقة $I_L = VR^2$ فى حالة الحجوم الدورانية ، بنصف قطر الدوران للسطح أو للحجم بالنسبة لـ L .

نظرية المحور الموازى : إن عزم القصور الذاتى لسطح أو لقوس منحن أو لحجم بالنسبة إلى محور يساوى عزم القصور الذاتى بالنسبة لمحور مواز للأول ومار بالمركز المتوسط مضافاً لذلك حاصل ضرب المساحة أو طول القوس أو الحجم فى مربع البعدين المحورين المتوازيين .

أنظر المسألتين ٩ – ١٠

مســـائل محـــلولة

١ – أوجد عزم القصور الذاتى لسطح مستطيل الشكل A بعداه a و b ذلك بالنسبة لأحد أضلاعه .



شكل ٣٨ – ١

لنأخذ المستطيل كما فى الشكل ولنفرض أن الضلع الذى نريد أن نحسب عزم القصور الذاتى بالنسبة له ينطبق على المحور y .

إن مساحة المستطيل المقرب تساوى $b.\Delta x$ والمركز المتوسط لها $(x, \frac{1}{2} b)$ وبالتالى فإن عنصر عزم القصور الذاتى له هو $x^2 b \Delta x$ إذن :

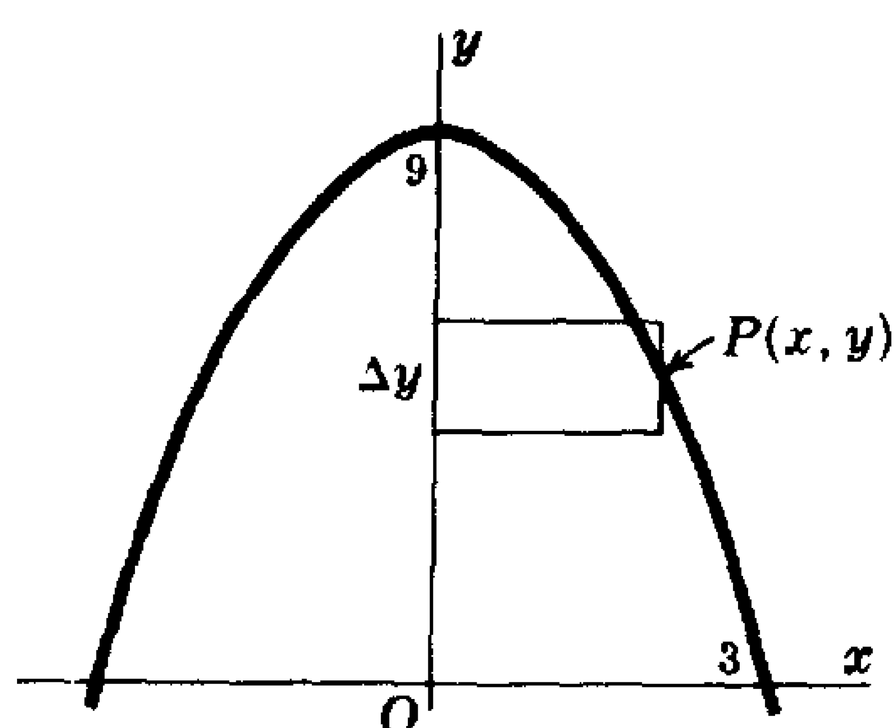
$$I_y = \int_0^a x^2 b\, dx = b\frac{x^3}{3}\Big]_0^a = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3}Aa^2$$

إذن فعزم القصور الذاتى لسطح مستطيل الشكل حول أحد أضلاعه يساوى $^1/_3$ حاصل ضرب مساحته فى طول الضلع الآخر.

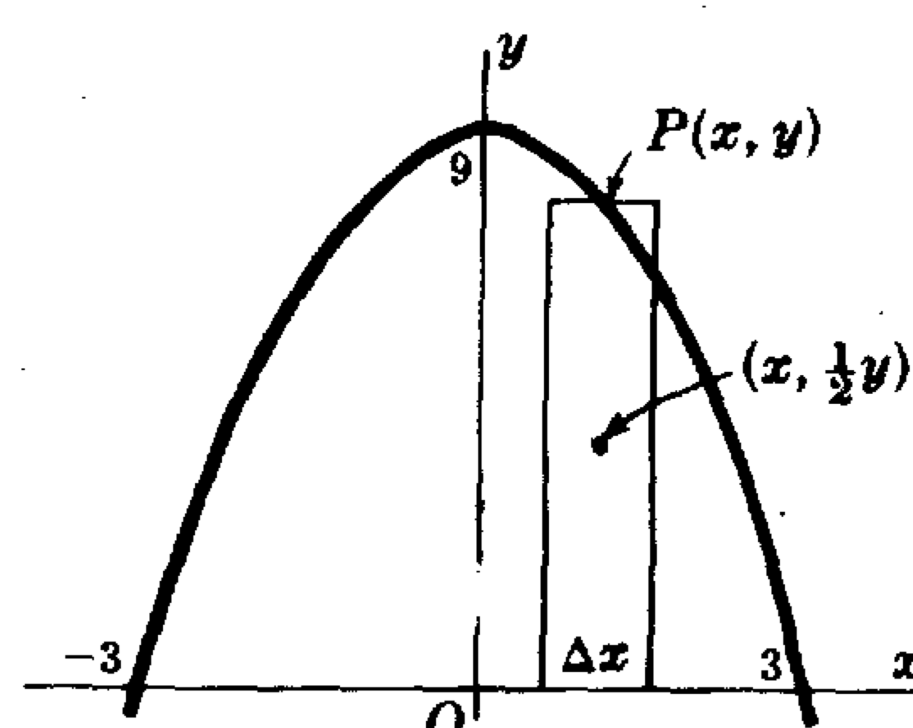
٢ – أوجد عزم القصور الذاتى حول المحور y للسطح المستوى الواقع بين القطع المكافىء $y = 9 - x^2$ والمحور x .

الحـل الأول : إن مساحة المستطيل المقرب فى الشـكل ٣٨ – ٢ تساوى $A = y.\Delta x$ ومركزه المتوسط $(x, \frac{1}{2} y)$ إذن :

$$I_y = \int_{-3}^{3} x^2 y\, dx = 2\int_0^3 (9x^2 - x^4)\, dx = \frac{324}{5}$$



شكل ٣٨ – ٣



شكل ٣٨ – ٢

الحـل الثانى : إن مســاحة المستطيل المقرب فى الشـكل ٣٨ – ٣ تساوى $x.\Delta y$ وبعد هــذا المستطيل العمودى عن المحور y يساوى x . ولذلك فإن عنصر عزم القصور الذاتى استناداً إلى المسألة ١ يساوى $^1/_3\,(x\Delta y)x^2$. وبذلك نجد اعتماد على التناظر أن :

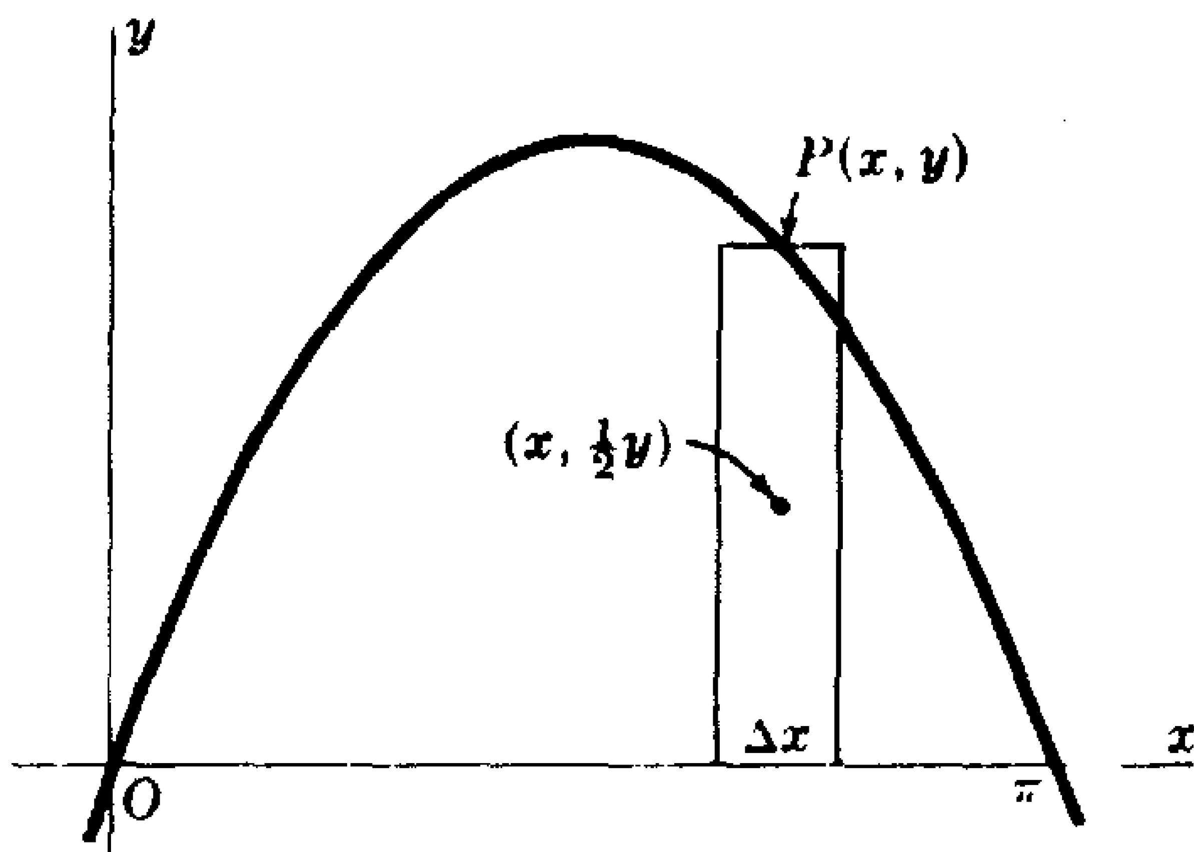
$$I_y = 2\cdot\frac{1}{3}\int_0^9 x^3\, dy = \frac{2}{3}\int_0^9 (9-y)^{3/2}\, dy = \frac{324}{5}$$

وبما أن $A = 2\int_0^9 x\, dy = 2\int_0^9 \sqrt{9-y}\, dy = 36,$ فإن $I_y = 324/5 = AR^2$ ونصف قطر الدوران هو : $R = 3/\sqrt{5}$.

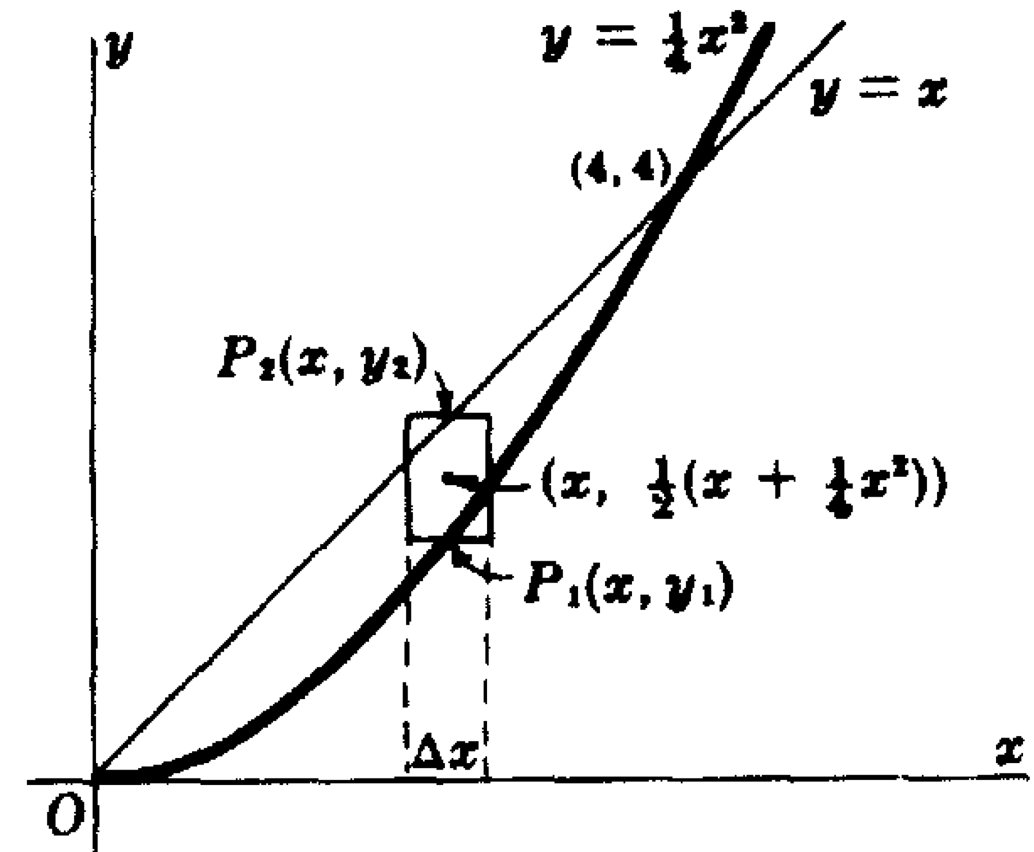
٣ – أوجد عزم القصور الذاتى حول المحور y للسطح المستوى الواقع فى الربع الأول ، والمحدد بالقطع المكافىء $x^2 = 4y$ والمستقيم $y = x$. أنظر الشكل ٣٨ – ٤ .

إذا استخدمنا المستطيل المقرب المبين فى الشـكل ٣٨ – ٤ والتى مساحته $(x - \frac{1}{4} x^2)\ \Delta x$ ومركزه المتوسط هو $[x, \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}x^2)]$ فإننا نجـد :

$$I_y = \int_0^4 x^2(x - \tfrac{1}{4}x^2)\, dx = \frac{64}{5} = \frac{24}{5}A \quad \text{و} \quad A = \int_0^4 (x - \tfrac{1}{4}x^2)\, dx = \frac{8}{3}$$



شكل ٣٨ – ٥



شكل ٣٨ – ٤

٤ – أوجد عزم القصور الذاتى حول كل من المحورين الاحداثيين للسطح المستوى الواقع بين المنحنى $y = \sin x$ من $x = 0$ إلى $x = \pi$ ومحور السينات . أنظر الشكل ٣٨ – ٥ .

$$A = \int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos x\Big]_0^\pi = 2$$

$$I_x = \int_0^\pi y^2 \cdot \frac{1}{3} \sin x\, dx = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3}\Big[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\Big]_0^\pi = \frac{4}{9} = \frac{2}{9}A$$

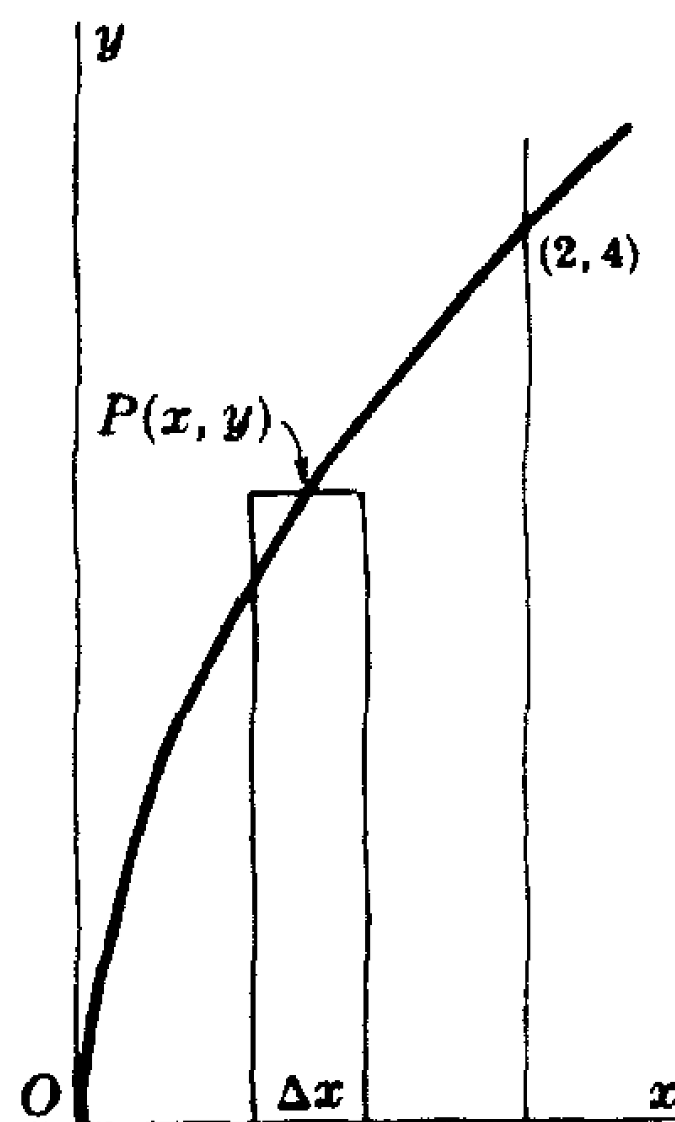
$$I_y = \int_0^\pi x^2 \sin x\, dx = \Big[2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x\Big]_0^\pi = (\pi^2 - 4) = \frac{1}{2}(\pi^2 - 4)A$$

٥ – أوجد عزم القصور الذاتى لاسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها b ونصف قطر قاعدتها a حول محور الاسطوانة . أنظر الشكل ٣٨ – ٦ .

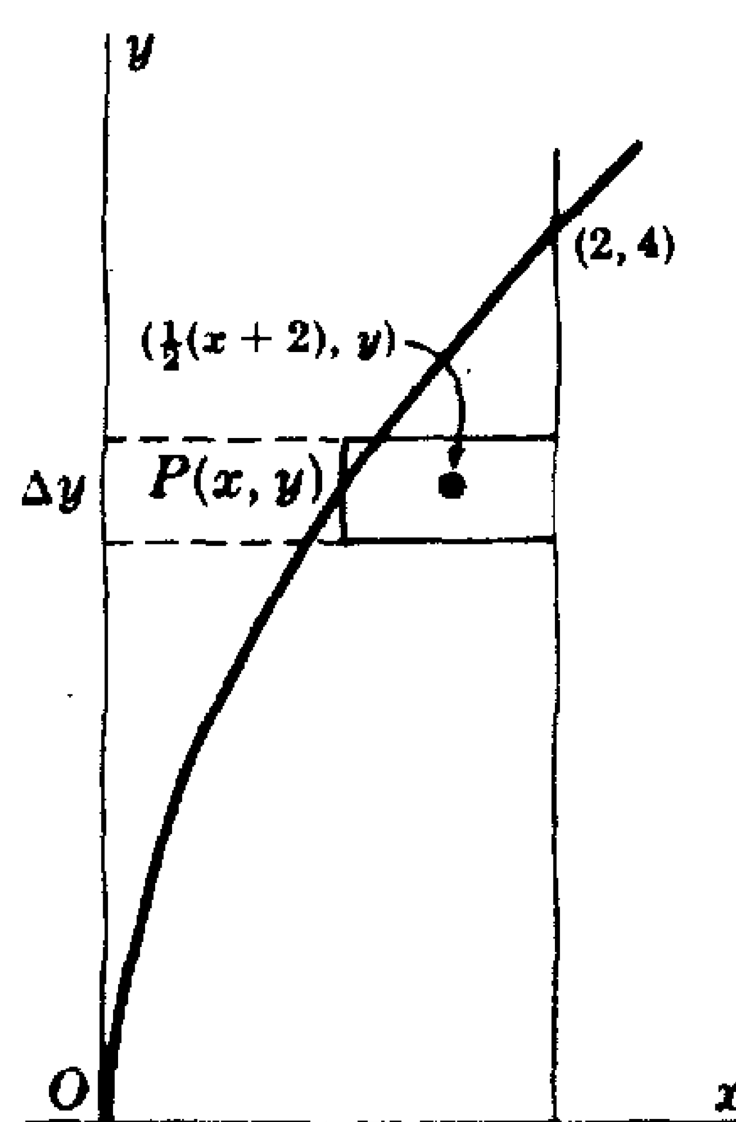
لنفرض أن الاسطوانة ناتجة عن دوران المستطيل الذى بعداه a و b حول المحور y كما هو مبين فى الشكل ٣٨ – ٦ . إذن المركز المتوسط للمستطيل المقرب المبين فى الشكل هو $(x, \frac{1}{2} b)$ ، وحجم القشرة الناتجة عن دوران المستطيل حول المحور y هو $\Delta V = 2\pi b x . \Delta x$ وبما أن $V = \pi b a^2$ ، فإن :

$$I_y = 2\pi\int_0^a x^2 \cdot bx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi b a^4 = \tfrac{1}{2}\pi b a^2 \cdot a^2 = \tfrac{1}{2} V a^2$$

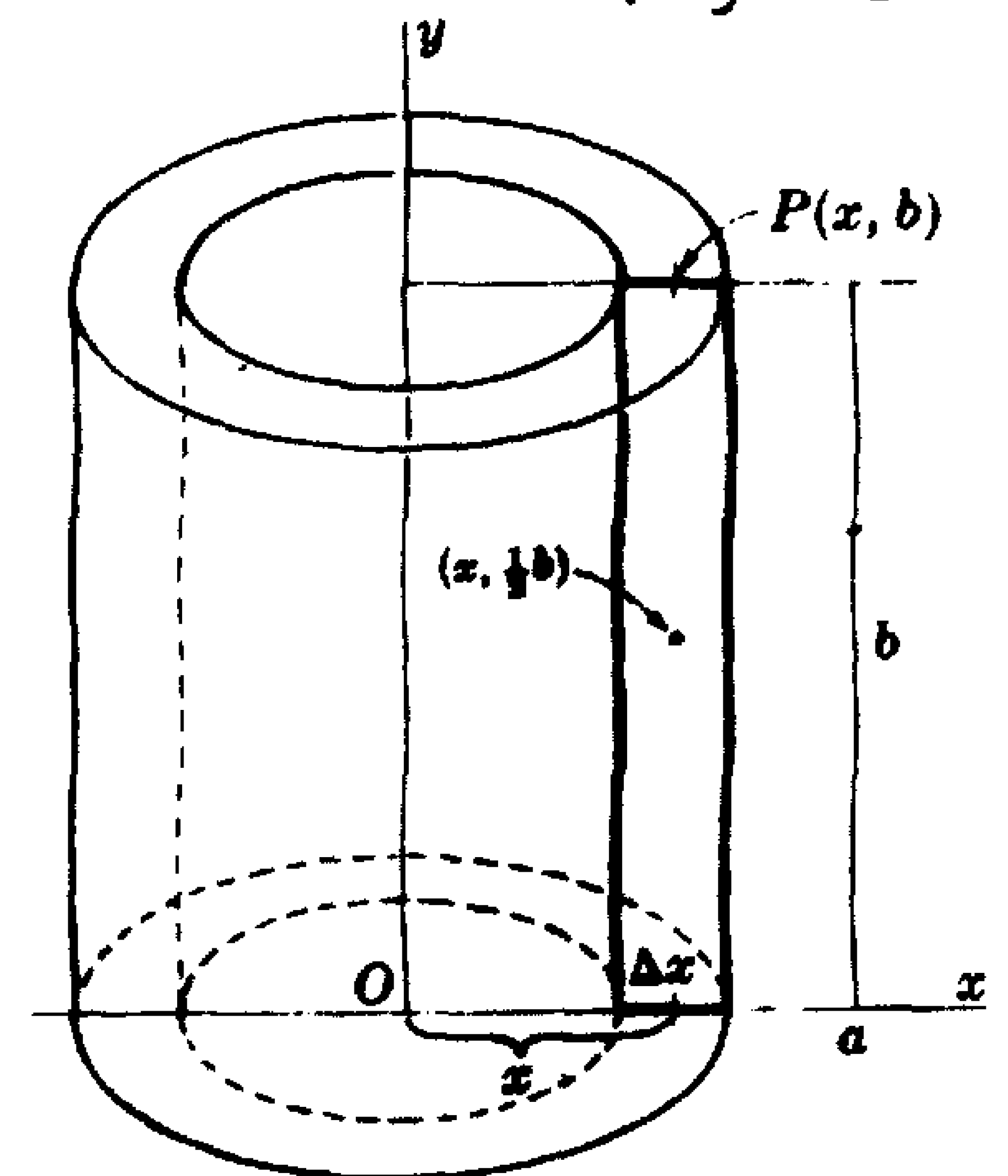
وهكذا نجد أن عزم القصور الذاتى لاسطوانة دائرية قائمة حول محورها يساوى نصف حاصل ضرب حجمها فى مربع نصف قطرها .



شكل ٣٨ – ٨



شكل ٣٨ – ٧



شكل ٣٨ – ٦

٦ – أوجد عزم القصور الذاتى بالنسبة لمحور الحجم الناتج من الدوران حول المحور السينى للمساحة الواقعة فى الربع الأول والمحددة بالقطع المكافئ $y^2 = 8x$ والمحور السينى والخط $x = 2$.

الحـــل الأول : بالنظر إلى الشكل ٣٨ – ٧ نجد أن المركز المتوسط للمستطيل المقرب المبين فى الشكل ٣٨ – ٧ هو $[\tfrac{1}{2}(x+2), y]$ وأن الحجم الناتج عن دوران المستطيل حول المحور x هو $2\pi y(2-x)\,\Delta y = 2\pi y(2-y^2/8)\,\Delta y$.
إذن :

$$I_x = 2\pi \int_0^4 y^2 \cdot y(2-y^2/8)\,dy = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V \quad \text{و} \quad V = 2\pi \int_0^4 y(2-y^2/8)\,dy = 16\pi$$

الحـــل الثانى : بالنظر إلى الشكل ٣٨ – ٨ نجد أن الحجم الناتج عن دوران المستطيل المقرب فى الشكل ٣٨ – ٨ حول المحور x يساوى $\pi y^2 \Delta x$ ، وباستخدام نتيجة المسألة ٥ نجد أن عنصر عزم القصور الذاتى بالنسبة للمحور x يساوى $\tfrac{1}{2} y^2 (\pi y^2 \Delta x) = \tfrac{1}{2}\pi y^4 \Delta x$ إذن :

$$V = \pi \int_0^2 y^2\,dx = 8\pi \int_0^2 x\,dx = 16\pi$$

$$\text{و} \quad I_x = \frac{1}{2}\pi \int_0^2 y^4\,dx = 32\pi \int_0^2 x^2\,dx = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V$$

٧ – أوجد عزم القصور الذاتى بالنسبة لمحور الحجم الناتج عن دوران المساحة المعطاة فى المسألة ٦ حول المحور الصادى . أنظر الشكل ٣٨ – ٨ .

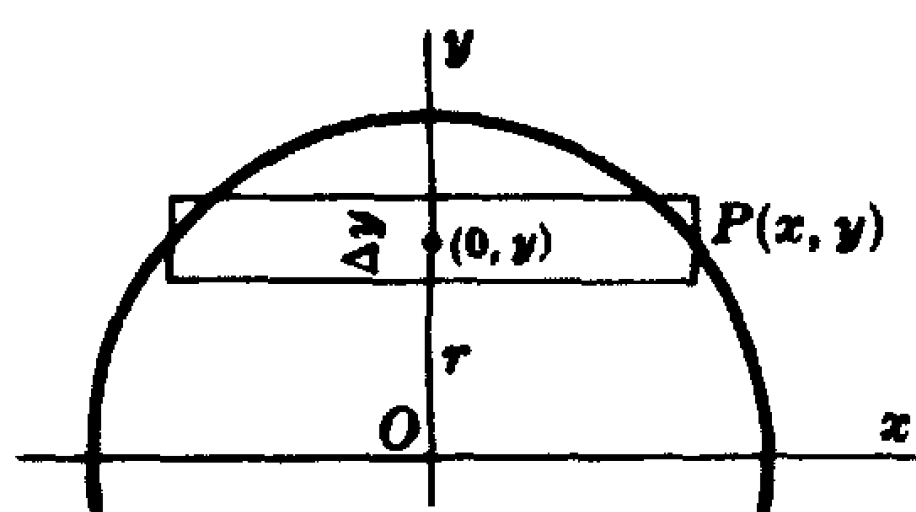
إن الحجم الناتج عن دوران المستطيل المبين بالشكل ٣٨ – ٨ حول المحور y يساوى $2\pi xy\,\Delta x$ إذن :

$$V = 2\pi \int_0^2 xy\,dx = 4\sqrt{2}\,\pi \int_0^2 x^{3/2}\,dx = \frac{64}{5}\pi$$

$$\text{و} \quad I_y = 2\pi \int_0^2 x^2 \cdot xy\,dx = 4\sqrt{2}\,\pi \int_0^2 x^{7/2}\,dx = \frac{256}{9}\pi = \frac{20}{9}V$$

٨ – أوجد عزم القصور الذاتى بالنسبة لمحور حجم الكرة الناتجة عن دوران دائرة نصف قطرها r حول قطر ثابت فيها .

لنأخذ الدائرة كما فى الشكل حيث القطر الثابت واقع على المحور x ونستخدم طريقة القشرة .



شكل ٣٨ – ٩

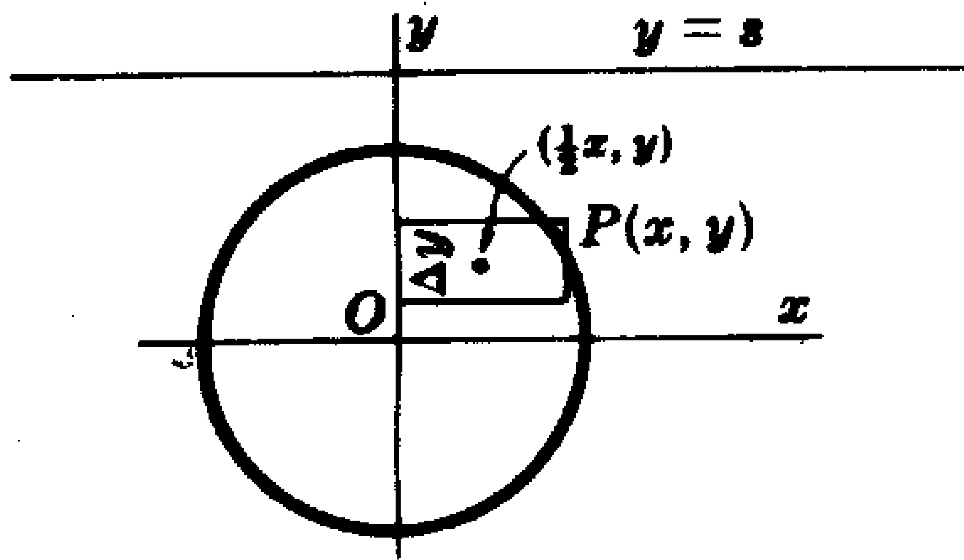
$$V = 2\pi \int_0^r 2x \cdot y\,dy = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{و} \quad I_x = 4\pi \int_0^r y^2 \cdot xy\,dy = 4\pi \int_0^r y^3\sqrt{r^2-y^2}\,dy$$

لنضع $y = r\sin z;$ فيكون $\sqrt{r^2-y^2} = r\cos z,$ و $dy = r\cos z\,dz.$

والحصول على حدى التكامل بالنسبة لـ z المقابلتين لحدى التكامل بالنسبة لـ y نلاحظ أنه عندما $y = 0$ يكون $r \sin z = 0$ ومنه $\sin z = 0$ وبالتالى $z = 0$ وعندما $y = r$ يكون $r \sin z = r$ ومنه $\sin z = 1$ وبالتالى $z = \frac{1}{2}\pi$ إذن :

$$I_x = 4\pi r^5 \int_0^{\pi/2} \sin^3 z \cos^2 z \, dz = 4\pi r^5 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 z)\cos^2 z \sin z \, dz = \tfrac{8}{15}\pi r^5 = \tfrac{2}{5}r^2 V$$



شكل ٣٨ – ١٠

٩ – أوجد عزم القصور الذاتى لسطح دائرى الشكل نصف قطره r بالنسبة لمستقيم فى مستواه يبعد s units عن مركزه . لنأخذ مركز الدائرة فى نقطة الأصل ولنبحث أولا عن عزم القصور الذاتى للدائرة بالنسبة لقطرها الموازى للمستقيم المفروض .

$$I_x = 4\int_0^r y^2 \cdot x \, dy = 4\int_0^r y^2\sqrt{r^2 - y^2} \, dy = \tfrac{1}{4}r^4\pi = \tfrac{1}{4}r^2 A$$

ومنه $I_s = I_x + A \cdot s^2 = (\tfrac{1}{4}r^2 + s^2)A$

١٠ – إذا فرضنا أن عزم القصور الذاتى لجسم ناتج عن دوران قوس من المنحنى $y = \sin 3x$ حول المحور x بالنسبة لمحور الجسم يساوى $I_x = \pi^2/16 = 3V/8.$ ، فأوجد عزم القصور الذاتى للجسم بالنسبة للمستقيم $y = 2$.

$$I_{y=2} = I_x + 2^2 V = 3V/8 + 4V = 35V/8$$

مسائل اضافية

١١ – أوجد عزم القصور الذاتى لكل من السطوح التالية بالنسبة للمستقيم الوارد إلى جانب كل منهما :

(أ) $y = 4 - x^2,\ x = 0,\ y = 0$; بالنسبة للمحور x ؛ بالنسبة للمحور y . ج : $128A/35,\ 4A/5$

(ب) $y = 8x^3,\ y = 0,\ x = 1$; بالنسبة للمحور x ، بالنسبة للمحور y . ج : $128A/15,\ 2A/3$

(ج) $x^2 + y^2 = a^2$; بالنسبة لواحد من أقطارها . ج : $a^2A/4$

(د) $y^2 = 4x,\ x = 1$; بالنسبة للمحور x ، بالنسبة للمحور y . ج : $4A/5,\ 3A/7$

(هـ) $4x^2 + 9y^2 = 36$; بالنسبة للمحور x ؛ بالنسبة للمحور y . ج : $A,\ 9A/4$

١٢ – استخدم نتائج المسألة ١١ ونظرية المحور الموازى لتحصل على عزم القصور الذاتى للسطح المفروض حول المستقيم المفروض .

(أ) $y = 4 - x^2,\ y = 0$; بالنسبة للمستقيم $x = 4$ (ب) $x^2 + y^2 = a^2$; بالنسبة للمماس .

(جـ) $y^2 = 4x,\ x = 1$; بالنسبة للمستقيم $x = 1$.

ج : (أ) $84A/5$ (ب) $5a^2A/4$ (جـ) $10A/7$

١٣ – أوجد عزم القصور الذاتى حول محور الدوران للجسم الناتج عن دوران السطح المستوى المفروض حول المستقيم المفروض .

(أ) $y = 4x - x^2,\ y = 0$: بالنسبة للمحور x وبالنسبة للمحور y . (ب) $y^2 = 8x,\ x = 2$; بالنسبة للمحور x وبالنسبة للمحور y . (جـ) $4x^2 + 9y^2 = 36$; بالنسبة للمحور x وبالنسبة للمحور y . (د) $x^2 + y^2 = a^2$; بالنسبة للمستقيم $y = b$ حيث $b > a$.

ج : (أ) $128V/21,\ 32V/5$ (ب) $16V/3,\ 20V/9$ (جـ) $8V/5,\ 18V/5$ (د) $(b^2 + \tfrac{3}{4}a^2)V$

١٤ – استخدم نظرية المحور الموازى لتحصل على عزم القصور الذاتى لـ (ا) كرة نصف قطرها r بالنسبة لمستقيم مماس لها ، و (ب) اسطوانة دائرية قائمة بالنسبة لأحد عناصرها .

ج : (ا) $7r^2V/5$, (ب) $3r^2V/2$

١٥ – برهن أن عزم القصور الذاتى لسطح مستوى بالنسبة لمستقيم L عمودى عليه (أو بالنسبة لموقع العمود على المستوى) يساوى مجموع عزوم القصور الذاتية بالنسبة لأى مستقيمين متعامدين فى المستوى ومارين بموقع L .

١٦ – أوجد عزم القصور الذاتى القطبى I_0 (عزم القصور الذاتى بالنسبة لنقطة الأصل) لـ : (ا) مثلث محدد بـ $y = 2x,\ y = 0,\ x = 4$; (ب) دائرة نصف قطرها r ومركزها فى نقطة الأصل (جـ) الدائرة $x^2 - 2rx + y^2 = 0$; (د) السطح المحدد بالمستقيم $y = x$ والقطع المكافىء $y^2 = 2x$.

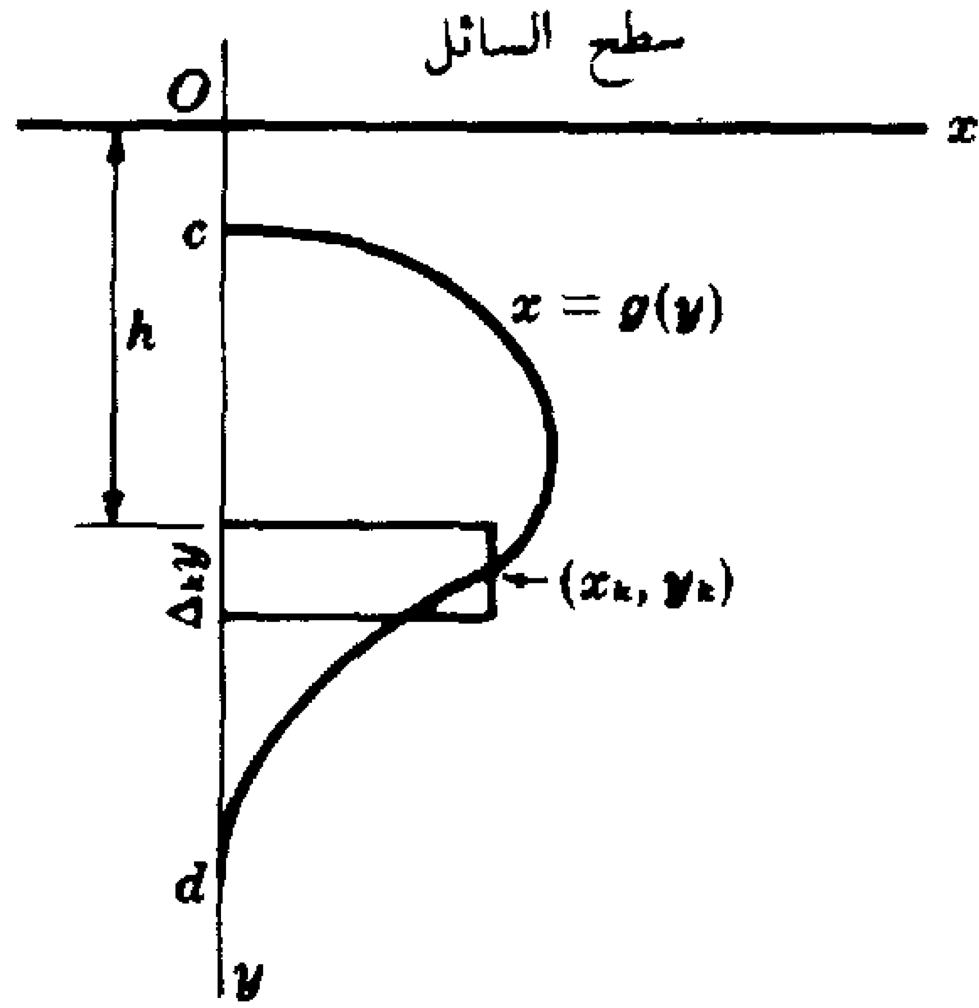
ج : (ا) $I_0 = I_x + I_y = 56A/3$, (ب) $\frac{1}{2}r^2A$, (جـ) $3r^2A/2$, (د) $72A/35$

الفصل التاسع والثلاثون

ضغط السائل

الضغط = القوة الواقعة على وحدة المساحات = $\frac{\text{القوة المؤثرة عمودياً على مساحة ما}}{\text{المساحة التي تؤثر عليها القوة}}$ إن الضغط p على سطح أفقي مساحته A الناتج عن عمود من سائل ارتفاعه h ويرتفع فوق السطح يساوي $\rho = w\,h$ حيث w وزن وحدة الحجوم من السائل وهو يساوي ρg بفرض أن ρ كثافة السائل و g ثابت الجاذبية . وإذا أعطيت ρ بـ Kg m^{-3} و g بـ ms^{-2} فإن w تعطى بـ Nm^{-3} . والقوة على السطح المشار إليه تساوي حاصل ضرب الضغط في مساحة السطح = whA والضغط الناتج عن وجود سائل ، عند أية نقطة داخل السائل ، متساو في جميع الإتجاهات .

القوة المؤثرة على سطح مستو مغمور :



شكل ٣٩ – ١

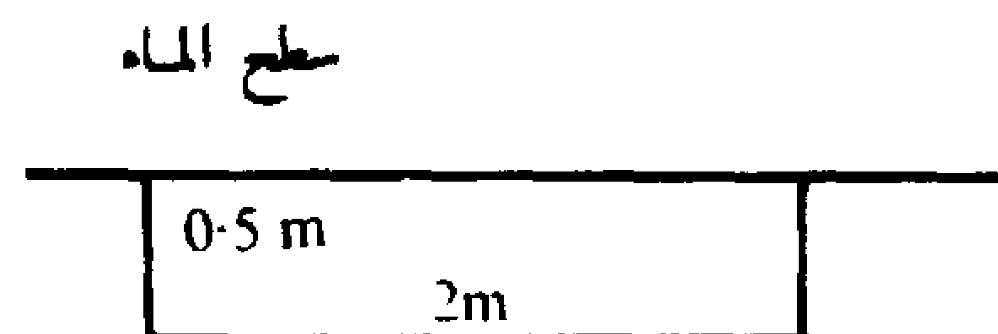
يوضح الشكل ٣٩ – ١ سطح مستو مغمور عمودياً في سائل وزن وحدة الحجوم منه يساوي $w\,Nm^{-3}$. لنأخذ السطح في المستوى $x\,y$ بحيث يقع المحور x على سطح السائل والمحور y رأسياً لأسفل . نقسم السطح إلى شرائح موازية باستمرار لسطح السائل ، ولنقرب كل شريحة إلى مستطيل (كما في الفصل ٣٤) .

لنرمز لعمق الطرف الأعلى للمستطيل الممثل المبين في الشكل بـ h . إذن القوة المؤثرة على هذا المستطيل الذي عرضه $x_k = g(y_k)$ وطوله $\Delta_k y$ تساوي $w \cdot y'_k \cdot g(y_k)\,\Delta_k y,$ حيث y_k قيمة ما لـ y بين h و $h + \Delta_k y$. والقوة الكلية المؤثرة على السطح تساوي ، استناداً إلى نظرية بليس :

$$F = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} w \cdot y'_k \cdot g(y_k)\,\Delta_k y = w\int_c^d y \cdot g(y)\,dy = w\int_c^d yx\,dy$$

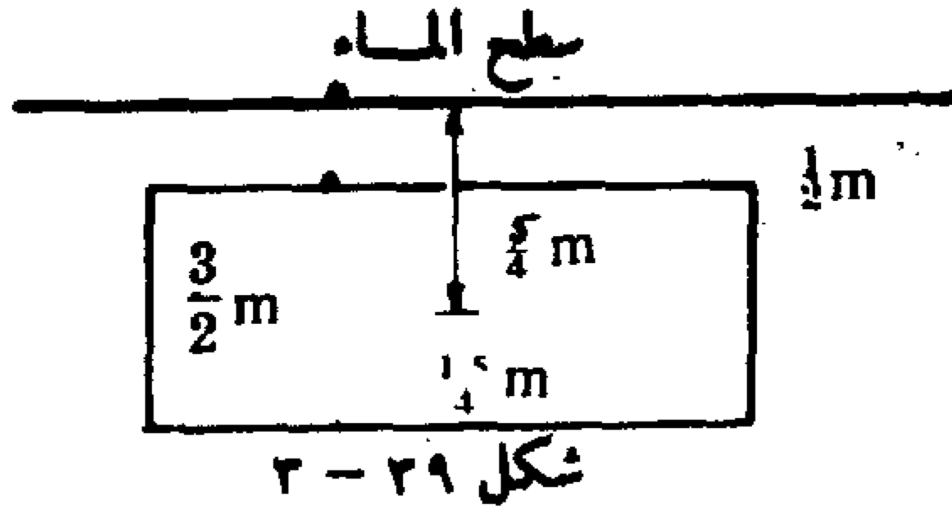
إذن القوة المؤثرة على سطح مستو مغمور رأسياً في سائل تساوي حاصل ضرب وزن وحدة الحجوم من السائل في المساحة المغمورة في عمق المركز المتوسط للسطح تحت سطح السائل . وهذه الصيغة تستعمل كبدأ عند تشكيل جميع التكاملات .

مسائل محلولة



شكل ٣٩ – ٢

١ – أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي مستطيل مغمور في الماء كما في الشكل ٣٩ – ٢ ، علماً بأن $1\ m^3$ من الماء يزن $1000\ Kg$ وهذا يساوي قوة مقدارها 9800 newtons .



شكل ٣٩ ـ ٣

إن مساحة السطح المغمورة $0.5 \times 2 = 1\ m^2$ ويقع مركزها المتوسط على عمق $0.25\ m$ تحت سطح الماء وبالتالي فإن القوة F = الوزن النوعي × المساحة × عمق المركز المتوسط أي:

$$F = 9800\ Nm^{-3} \times 1\ m^2 \times 0.25\ m = 2450\ N$$

٢ ـ أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي مستطيل مغمور في الماء كما في الشكل ٣٩ ـ ٣.
إن مساحة السطح المغمور $45/8\ m^2$ ، ويقع المركز المتوسط على عمق $5/4\ m$ تحت سطح الماء. إذن:

$$F = 9800\ Nm^{-3} \times 45/8\ m^2 \times 5/4\ m = 68\ 906{\cdot}25\ N.$$

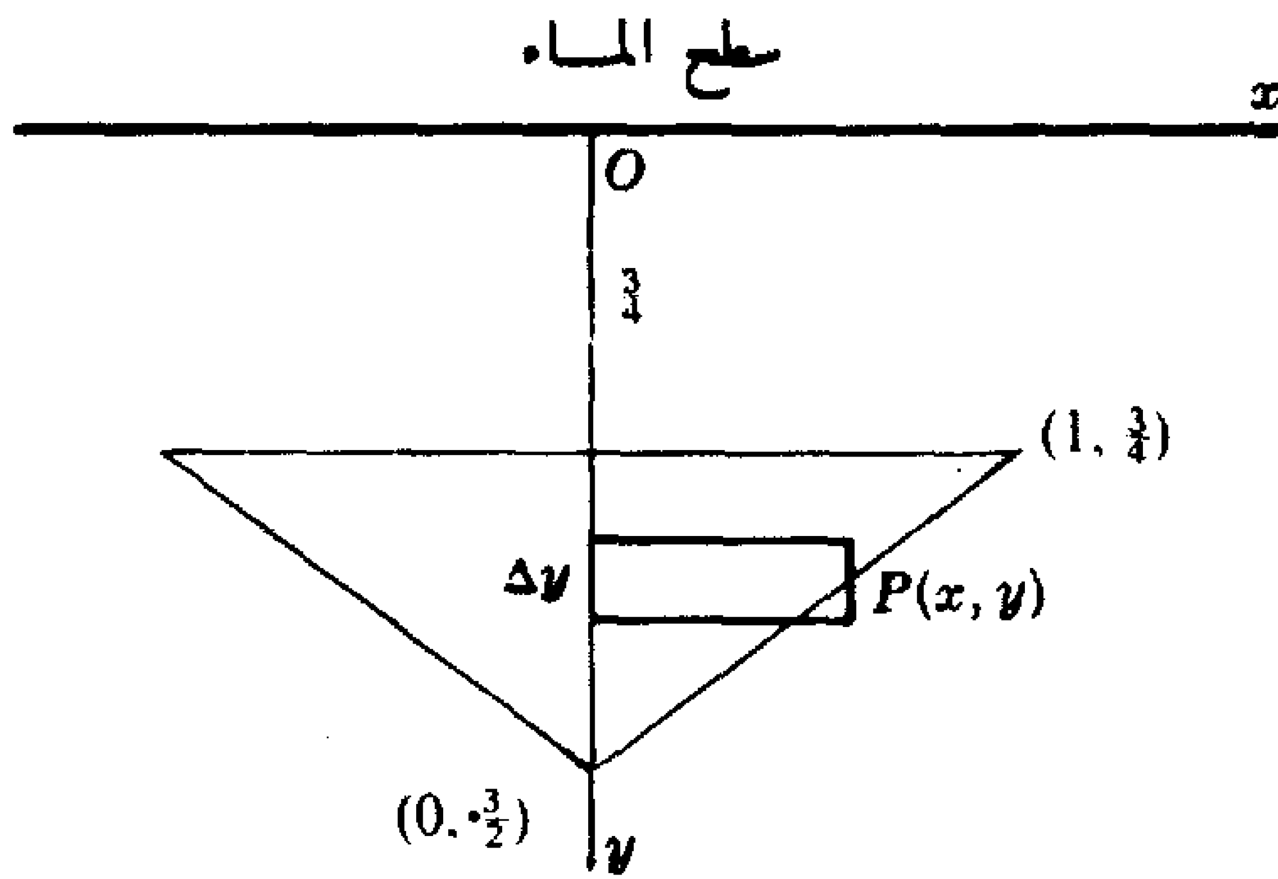
٣ ـ أوجد القوة المؤثرة على أحد وجهي المثلث المبين في الشكل ٣٩ـ٤ ، علما بأن وحدة الطول هي metres وأن الوزن النوعي للسائل هو : $w = 8000\ Nm^{-3}$

الحل الأول : إن السطح المغمور محدد بالمستقيمات $3x + 2y = 5/2$. $x = 0,\ y = 1/2$

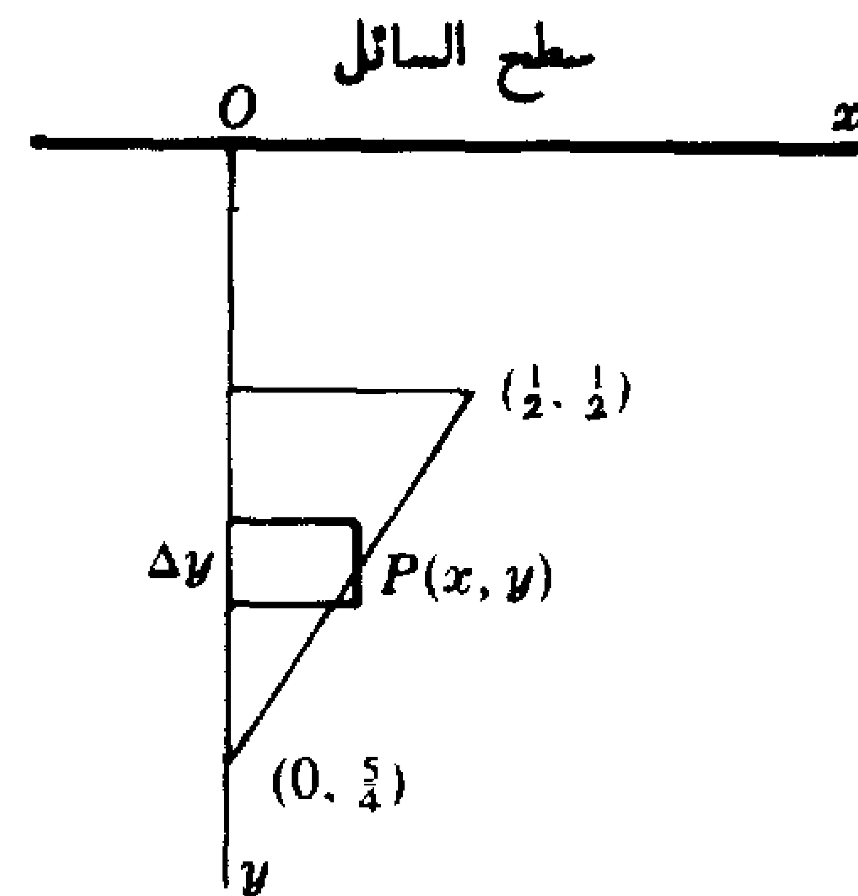
وإن القوة المؤثرة على المستطيل المقرب الذي مساحته $x.\Delta y$ وعمقه y تساوي $w \cdot y \cdot x \cdot \Delta y = wy\left(\frac{5 - 4y}{6}\right)\Delta y.$
إذن :

$$F = w\int_{1/2}^{5/4} y\left(\frac{5}{6} - \frac{2y}{3}\right)dy = \frac{9}{64}w = 1125\ N$$

الحل الثاني : إن مساحة السطح المغمور تساوي $3/16\ m^2$ وإن المركز المتوسط على عمق $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)\ \ \frac{3}{4}m$ تحت سطح السائل وبالتالي فإن : $F = 8000 \times \frac{3}{16} \times \frac{3}{4} = 1125N$



شكل ٣٩ ـ ٥



شكل ٣٩ ـ ٤

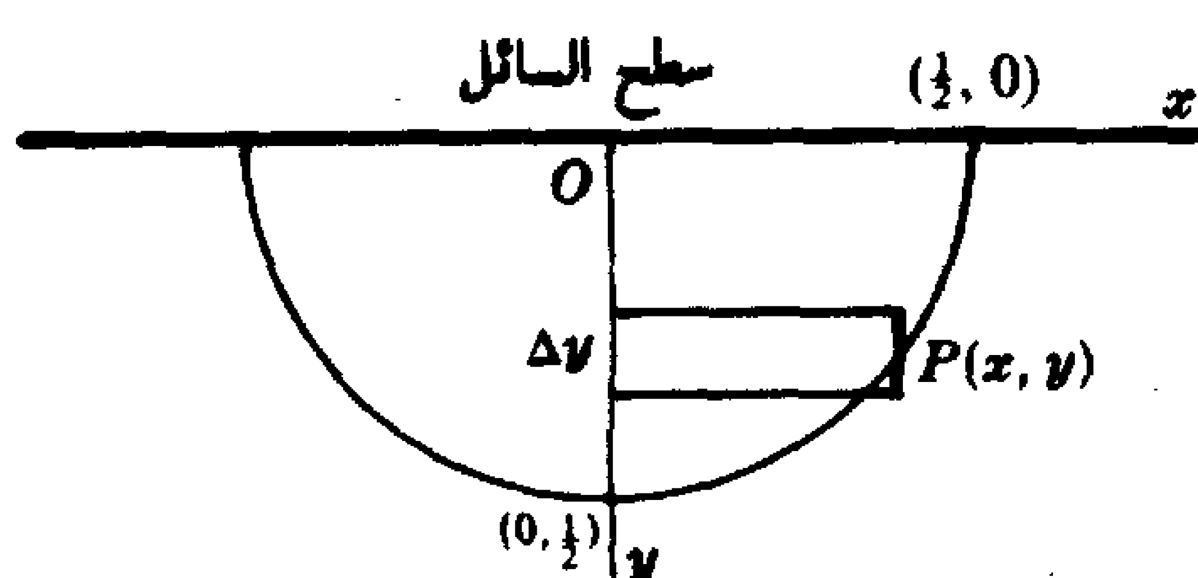
٤ ـ صفيحة مثلثة الشكل أطوال أضلاعها $5/4\ m$ و $5/4$ و 2 وضعت رأسيا في الماء بحيث كان أطول أضلاعها لأعلى وبشكل أفقي وعلى عمق $3/4\ m$ تحت سطح الماء. احسب القوة المؤثرة على أحد جانبي الصفيحة. أنظر إلى الشكل ٣٩ ـ ٥.

الحل الأول : نأخذ المحورين الاحداثيين كما في الشكل ٣٩ ـ ٥ ونلاحظ أن القوة المطلوبة تساوي ضعفي القوة المؤثرة على السطح المحدد بالمستقيمات $3x + 4y = 6$. $x = 0$ ، $y = 3/4$. إن مساحة المستطيل المقرب $x.\Delta y$ وعمقه المتوسط y وبالتالي فإن $\Delta F = wyx \cdot \Delta y = wy(2 - 4y/3)\Delta y$ ومنه :

$$F = 2w \int_{3/4}^{3/2} y \left(2 - \frac{4}{3} y\right) dy = \frac{3}{4} w = 7350 \text{ N}$$

الحل الثانى : إن مساحة السطح المغمور $3/4\ m^2$ والمركز المتوسط على عمق $\frac{3}{4} + \frac{1}{3}(\frac{3}{4}) = 1\ m$ تحت سطح الماء . وبالتالى فـإن :

$$F = 9800 \times 3/4 \times 1 = 7350 \text{N}$$

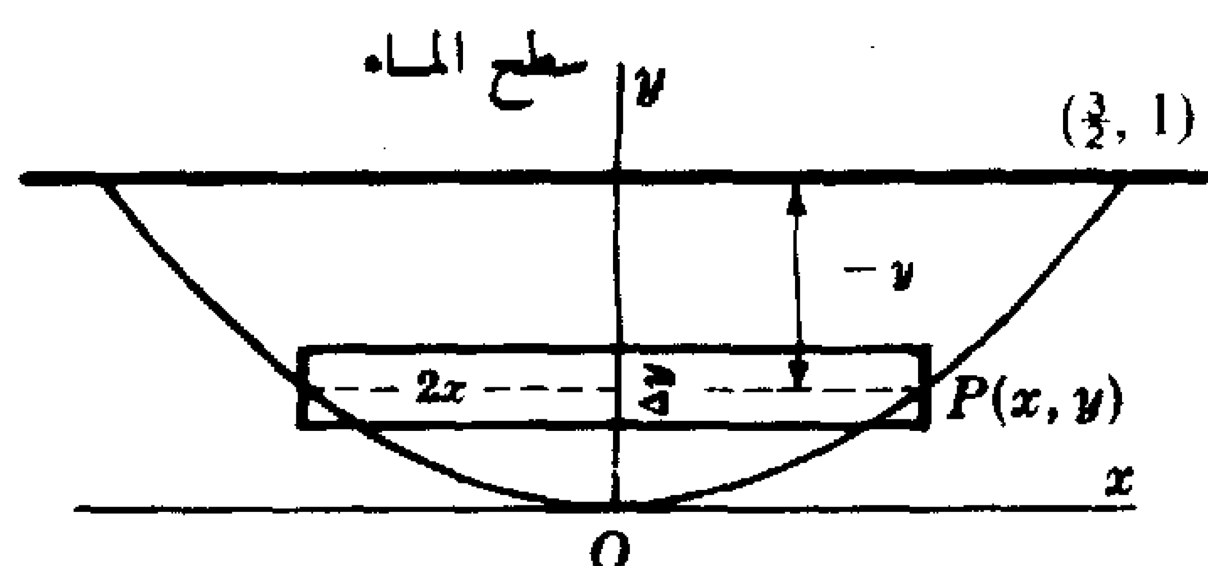


شكل ٣٩ — ٦

٥ — أوجد القوة المؤثرة على جدار حوض على شكل نصف دائرة نصف قطرها $\frac{1}{2}$ m عندما نملؤه بسائل وزنه النوعى $w = 9600\ \text{Nm}^{-3}$.

باختيار المحورين الاحداثيين كما فى الشكل ٣٩ — ٦ نجد أن القوة المؤثرة على المستطيل المقرب تساوى $wyx \cdot \Delta y = wy\sqrt{\frac{1}{4} - y^2}\ \Delta y$. وبالتالى فإن

$$F = 2w \int_0^{1/2} y\sqrt{\tfrac{1}{4} - y^2}\ dy = \frac{1}{12} w = 800 \text{ N}$$



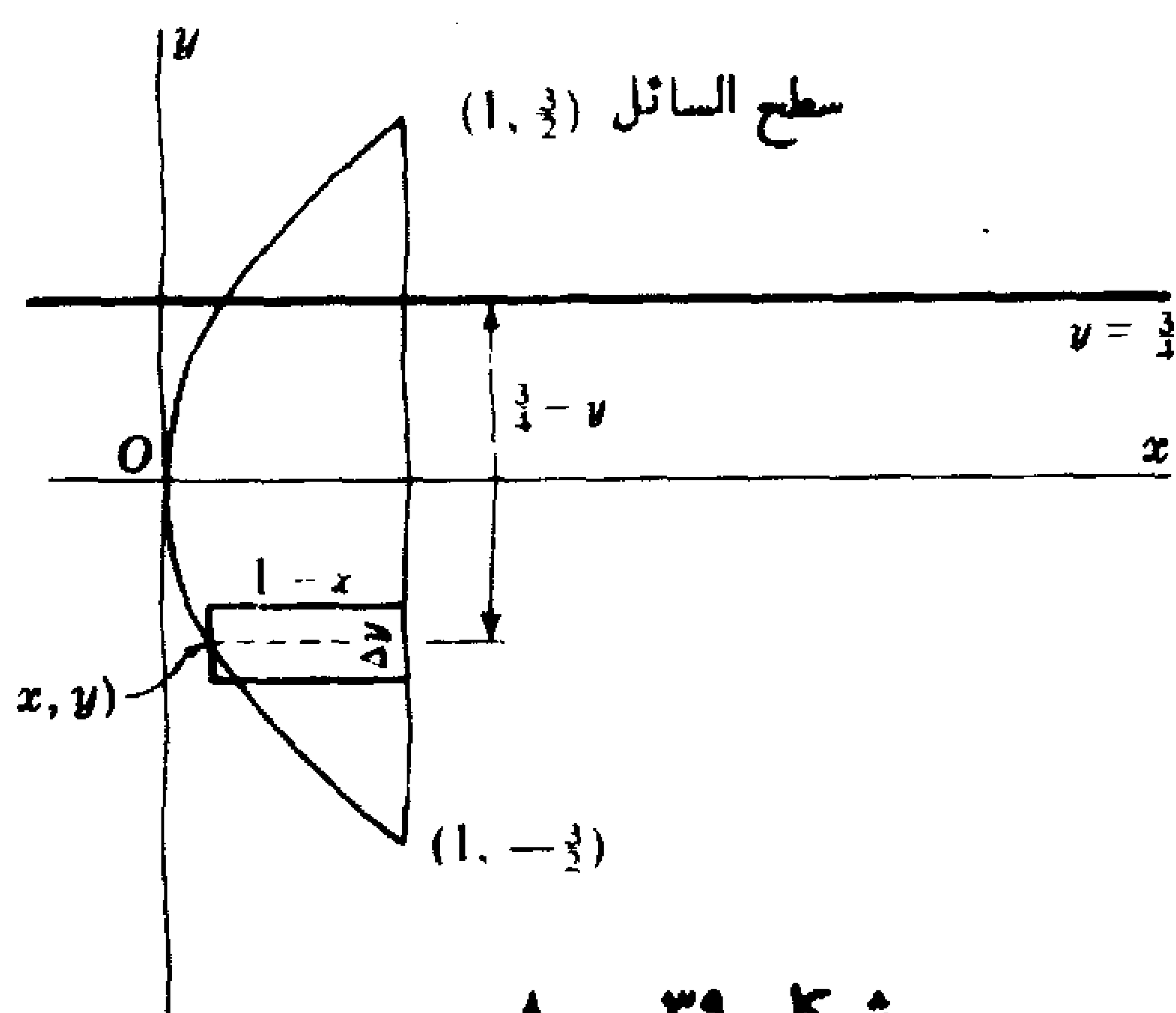
شكل ٣٩ — ٧

٦ — صفيحة على شكل قطع مكافئ قاعدتها 3 m وارتفاعها 1 m غمرت فى الماء بحيث تقع قاعدتها على سطح الماء . أوجـد القوة المؤثرة على وجه الصفيحة .

باختيار المحورين الاحداثيين كما فى الشكل ٣٩ — ٧ تكون معادلة القطع المكافئ $4x^2 = 9y$ ومساحة المستطيل المقرب $2x \,.\, \Delta y$ والعمق المتوسط $1 - y$ لذلك :

$$\Delta F = 2w(1 - y)x \cdot \Delta y = w(1 - y) \cdot 3\sqrt{y}\ \Delta y$$

$$F = 3w \int_0^1 (1 - y)\sqrt{y}\, dy = \frac{4}{5} w = 7920 \text{ N}$$



شكل ٣٩ — ٨

٧ — أوجد القوة المؤثرة على صفيحة المسألة ٦ إذا كانت هذه الصفيحة مغمورة جزئيا فى سائل وزنه النوعى $w = 7680\ \text{Nm}^{-3}$ بحيث يكون محورها موازيا لسطح السائل ويقع على عمق 3/4 m تحت سطح السائل .

باختيار المحورين الاحداثيين كما فى الشكل ٣٩ — ٨ تكون معادلة القطع المكافئ $4y^2 = 9x$.

ومساحة المستطيل المقرب $(1 - x)\,\Delta y$ وعمقه المتوسط $3/4 - y$ والقوة المؤثرة عليه هى :

$$\Delta F = w(\tfrac{3}{4} - y)(1 - x)\Delta y = w(\tfrac{3}{4} - y)(1 - 4y^2/9)\Delta y$$

ومنـــه :

$$F = w\int_{-3/2}^{3/4} (\tfrac{3}{4} - y)\left(1 - \frac{4y^2}{9}\right)dy$$

$$= \frac{405}{256}w = 12\,150\,\text{N}$$

مســـائل اضـــافية

٨ – صفيحة مستطيلة الشكل بعداها $1.5\text{ m} \times 2\text{ m}$ غمرت رأسيا فى سائل وزنه النوعى $w\text{ Nm}^{-3}$. أوجـــد القوة المؤثرة على أحد وجهيها .

(ا) إذا كان الضلع الأقصر لأعلى ويقع على سطح السائل .

(ب) إذا كان الضلع الأقصر لأعلى ويقع على عمق 0.5 m تحت سطح السائل .

(ﺟ) إذا كان الضلع الأكبر لأعلى ويقع على سطح السائل .

(د) إذا كانت الصفيحة معلقة بحبل من إحدى زواياها بحيث تكون هذه الزاوية على عمق 0.5 m تحت سطح السائل .

ج : (ا) 3w N (ب) 4·5w N (ﺟ) 2·25 w N (د) 5·25 w N

٩ – بفرض أن المحور x أفقى والمحور y رأسى لأسفل ، أوجد القوة المؤثرة على أحد جانبى كل من المساحات التالية . وحدة الطول هى metres والوزن النوعى للسائل $w\text{ Nm}^{-3}$.

(ا) $y = 4x^2,\ y = 1$ سطح السائل عند $y = 0$. ج : $2w/5\text{N}$

(ب) $y = 4x^2,\ y = 1$ سطح السائل عند $y = -0.5$. ج : $11w/15\text{N}$

(ﺟ) $y = 1 - 4x^2,\ y = 0$ سطح السائل عند $y = 0$. ج : $4w/15\text{N}$

(د) $y = 1 - 4x^2,\ y = 0$ سطح السائل عند $y = -0.75$. ج : $23w/30\text{N}$

(ﻫ) $y = 1 - 4x^2,\ y = 0{,}5$ سطح السائل عند $y = -0.25$. ج : $19\sqrt{2}\,w/120\text{N}$

١٠ – حوض مقطعه على شكل شبه منحرف عرضه 0.5 m عند القاع و 1 m عند القمة وعمق الحوض 0.75 m . أوجد القوة المؤثرة على أحد طرفيه (ا) إذا كان الحوض مملوءا بالماء . (ب) إذا كان يحوى ماء إلى ارتفاع 0.5 m .

ج : (ا) 1837·5 N. (ب) 714·6 N

١١ – صفيحة دائرية الشكل نصف قطرها 0.5 m ، أنزلت فى سائل (وزنه $w\text{ Nm}^{-3}$) بحيث يقع مركزها على عمق 1 m تحت سطح السائل . أوجـــد القوة المؤثرة على النصف الأسفل للصفيحة والقوة المؤثرة على نصفها الأعلى .

ج : $(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{12})w\text{ N}$ ، $(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{12})w\text{ N}$.

١٢ – خزان اسطوانى نصف قطره 2 m ويستند على جانبه . فإذا كان هذا الخزان يحوى زيتا وزنه النوعى $w\ Nm^{-3}$ وإلى عمق 3 m فأوجد القوة المؤثرة على أحد طرفيه . ج : $(\frac{8}{3}\pi + 9\sqrt{3})\,w\,N$

١٣ – نعرف مركز الضغط لقطعة السطح المستوية فى الشكل ٣٩ – ١ على أنها النقطة $(\bar{x}, \bar{y})$ التى إذا أثرت فيها قوة متمركزة قياسها F فإنها تعطى نفس العزم بالنسبة لأى مستقيم أفقى (رأسى) الذى تعطيه القوى الموزعة .

(١) $F\bar{x} = \frac{1}{2}w\int_c^d yx^2\,dy$ و $F\bar{y} = w\int_c^d y^2x\,dy$

(ب) بين أن عمق مركز الضغط تحت سطح السائل يساوى عزم القصور الذاتى للسطح مقسوما على العزم الأول لهذه القطعة بالنسبة لمستقيم واقع على سطح السائل .

١٤ – استخدم الجزء (ب) من المسألة (١٣) لتعيين عمق مركز الضغط تحت سطح السائل (١) المسألة ٥ ، (ب) المسألة ٦ ، (جـ) المسألة ٧ ، (د) المسألة ٩ (١) ، (جـ) المسألة ٩ (ب)

ج :

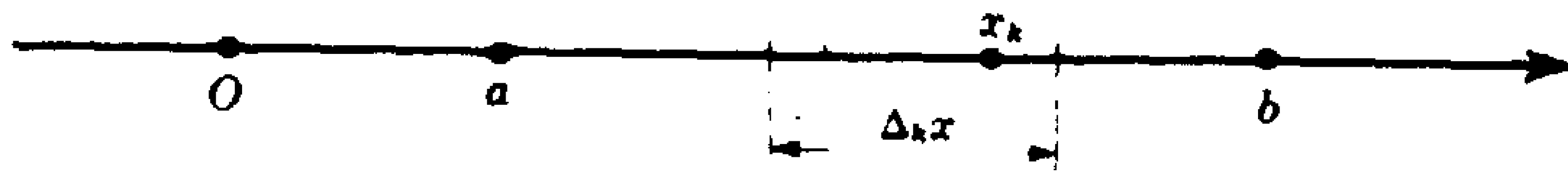
(١) 3π/32, ، (ب) 4/7, ، (جـ) 32/25, ، (د) 5/7, ، (هـ) 179/154

الفصل الأربعون

الشـــغل

القوة الثابتة : الشغل W الذى تبذله قوة ثابتة F تؤثر لمسافة متجهة s على خط مستقيم يساوى $F \cdot s$ وحدة .

القوة المتغيرة : لنفرض الآن أن القوة متغيرة باستمرار و تؤثر فى خط مستقيم . لنرمز لـ x للمسافة الموجهة لنقطة تأثير القوة عن نقطة ثابتة على المستقيم ولنفرض أن القوة معطاة على شكل دالة $F(x)$ فى x .



شكل ٤٠ — ١

لإيجاد الشغل المبذول عندما تتحرك نقطة التأثير من $x = a$ إلى $x = b$:

(ا) قسم الفترة $a \leqq x \leqq b$ إلى n من الفترات الجزئية طول كل منها $\Delta_k x$ ولنفرض x_k نقطة ما على الفترة الجزئية k .

(ب) نفرض أن القوة تبقى ثابتة أثناء الإزاحة على طول الفترة الجزئية وأنها تساوى $F(x_k)$. إذن الشغل المبذول أثناء هذه الإزاحة يساوى $F(x_k)\Delta_k x$ ، والشغل الكلى المبذول الناتج من مجموعة القوى الـ n المفروضة يساوى :

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\, \Delta_k x.$$

(جـ) نجعل عدد الفترات الجزئية يزداد إلى ما لا نهاية بحيث تؤول كل $\Delta_k x$ إلى الصفر ، ونطبق النظرية الأساسية لنحصل على :

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\, \Delta_k x = \int_a^b F(x)\, dx$$

مســـــائل محـــــلولة

١ — إن القوة اللازمة لإطالة زنبرك ، لحدود معينة ، تتناسب مع الاستطالة الناتجة . ويسمى ثابت التناسب معامل الزنبرك ، فإذا كان يلزم لزنبرك مفروض طوله 25 cm قوة قدرها 100 N كى يستطيل 0.5 cm ، فاحسب الشغل المبذول لاستطالة الزنبرك من 27 cm إلى 30 cm .

لنرمز بـ x للاستطالة فعندئذ يكون $F(x) = kx$.

وعندما $x = 0.5$ يكون $F(x) = 100$ وبالتالى فإن $k = 200$ و $F(x) = 200x$

والشغل اللازم بذله لاستطالة قدرها Δx يساوى $200x \cdot \Delta x$ والشغل الكلى اللازم

$$W = \int_2^5 200x\, dx = 2100 \text{ cmN} = 21 \text{ J}$$

٢ – إذا كان معامل زنبرك $4\ \mathrm{MNm^{-1}}$. أوجد الشغل اللازم بذله لضغط الزنبرك $0.025\ \mathrm{m}$.

نفرض أن x مقدار الإزاحة للطرف الحر الزنبرك بالأمتار فعندئذ يكون $F(x) = 4{,}000{,}000\,x$ ويكون الشغل اللازم بذله لإزاحة Δx هو $4{,}000{,}000\,x.\Delta x$ وبالتالى :

$$W = \int_0^{0.025} 4\,000\,000\,x\,dx = 1250\,\mathrm{J}$$

٣ – يزن كابل $40\ \mathrm{Nm^{-1}}$ ينفلت من ملف اسطوانى . فإذا كان $15\ \mathrm{m}$ قد أفلتت مسبقا فا الشغل الذى تبذله قوة الجاذبية كى يفلت $75\ \mathrm{m}$ إضافيا .

نفرض أن x طول الجزء المفلوت من الحبل فى لحظة t . عندئذ يكون $F(x) = 40x$ ويكون :

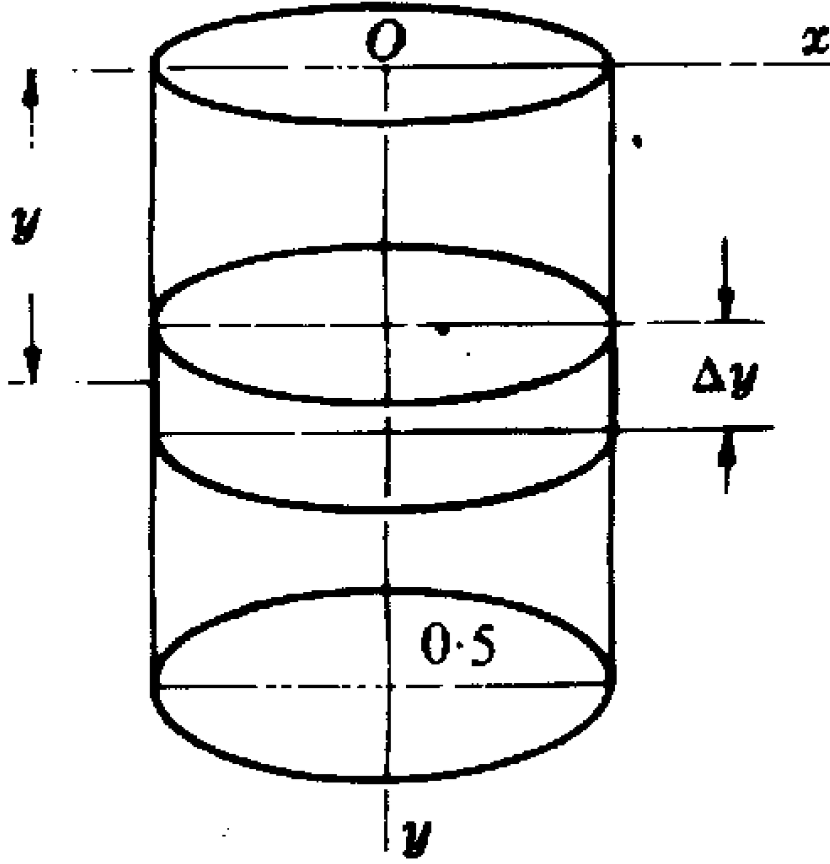
$$W = \int_{15}^{90} 40\,x\,dx = 157\,500\,\mathrm{J}$$

٤ – كابل طوله $30\ \mathrm{m}$ ويزن $70\ \mathrm{Nm^{-1}}$ يرتبط بطرف هذا الكابل وزن مقداره $700\ \mathrm{N}$. أوجد الشغل اللازم لف $24\ \mathrm{m}$ من الكابل على ملف .

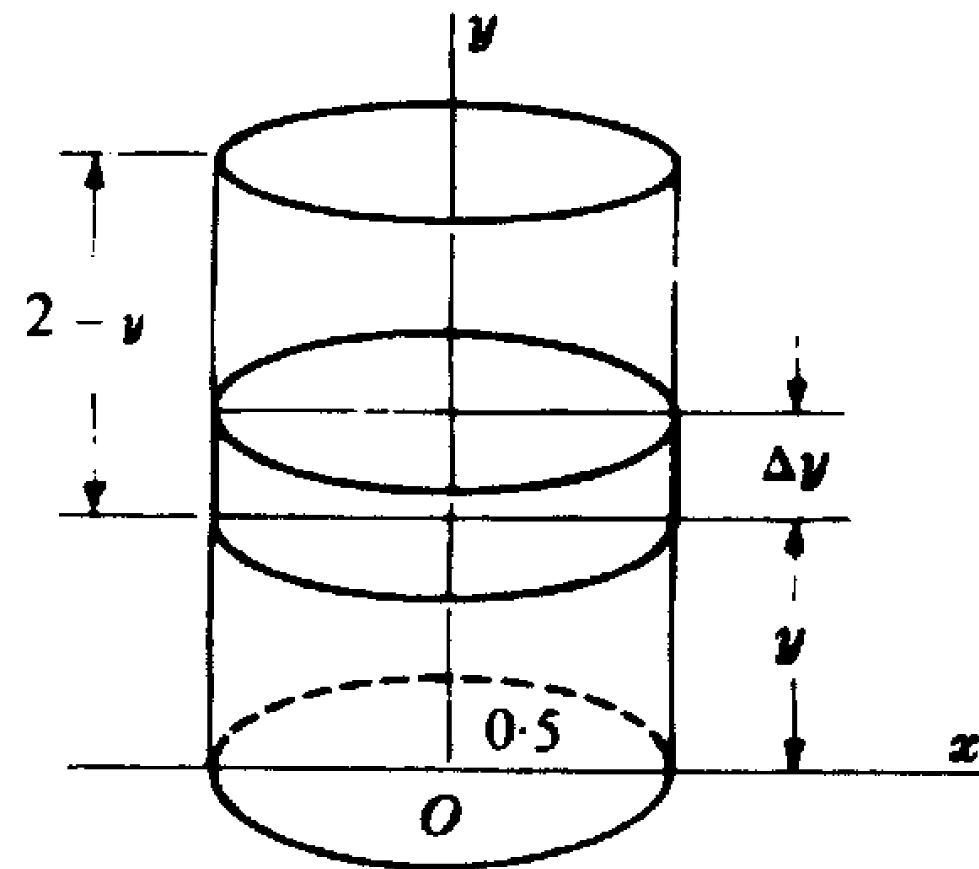
إن الوزن الكلى (جزء الكبل غير الملفوف مع الوزن) يساوى $7000 + 70(30 - x) = 4900 - 70x$ ، والشغل اللازم لرفع الوزن مسافة Δx هو $(4900 - 70x)\,\Delta x$. والشغل المطلوب إذن :

$$W = \int_0^{24} (4900 - 70\,x)\,dx = 97\,440\,\mathrm{J}$$

٥ – خزان اسطوانى دائرى قائم نصف قطره $0.5\ \mathrm{m}$ وارتفاعه $2\ \mathrm{m}$ مملوء بالماء . أوجد الشغل اللازم لتفريغ الماء من أعلى الخزان . بفرض أن الوزن النوعى للماء $9800\ \mathrm{Nm^{-3}}$.



شكل ٤٠ — ٣



شكل ٤٠ — ٢

الحل الأول : لننظر إلى الشكل ٤٠ – ٢ ولنتصور أن الماء دفع خارجا بواسطة مكبس أجبر على الحركة لأعلى بدأ من أسفل الخزان . ويوضح الشكل ٤٠–٤ المكبس بعد أن ارتفع مسافة قدرها $y\ \mathrm{m}$ من أسفل الخزان . إن القوة الرافعة تساوى وزن الماء فوق المكبس وهى تساوى تقريبا $F(y) = \pi r^2 w(2 - y) = {}^1\!/_4\,\pi w(2 - y)$, والشغل اللازم لإزاحة المكبس مقدار Δy يساوى تقريبا ${}^1\!/_4\pi w(2 - y).\Delta y$. وبذلك يكون الشغل اللازم لإفراغ الماء من أعلى الخزان :

$$W = \tfrac{1}{4}\pi w\int_0^2 (2 - y)\,dy = \tfrac{1}{2}\pi w = \tfrac{1}{2}\pi(9800) = 4900\pi\ \mathrm{J}$$

الحل الثانى : لننظر إلى الشكل ٤٠ – ٣ ولنتصور أن الماء مجزأ إلى n اسطوانة صغيرة ارتفاع كل منها Δy وأنه يتم تفريغ الخزان برفع كل اسطوانة إلى القمة . لنحسب الشغل اللازم لرفع الاسطوانة المثلة المبينة فى الشكل ٣٠ – ٤ . والذى بعدها المتوسط عن السقف y ووزنها $\frac{1}{4}\pi w.\Delta y$. إذن الشغل اللازم لرفعها إلى القمة $\frac{1}{4}\pi w y\,\Delta y$. وبالجمع بالنسبة للاسطوانات الـ n وتطبيق النظرية الأساسية نجـد :

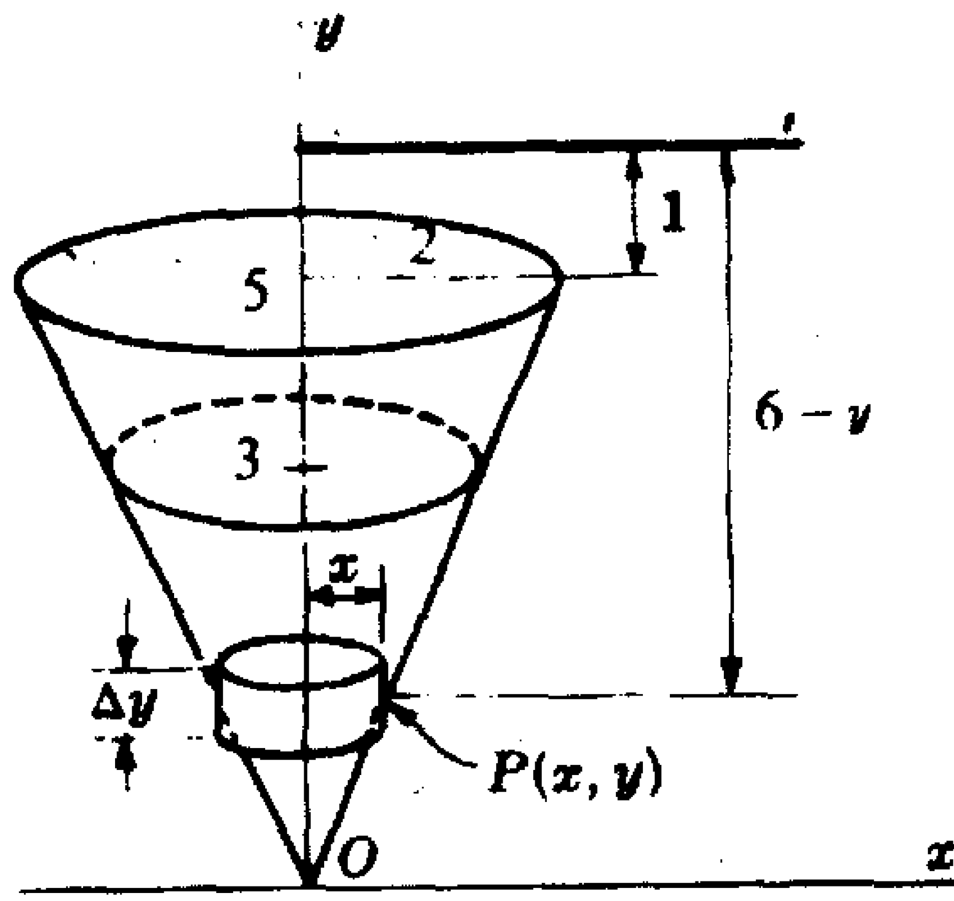
$$W = \frac{1}{4}\pi w \int_0^2 y\,dy = \frac{1}{2}\pi w = 4900\pi \text{ J.}$$

٦ – يتسبب تمدد الغاز فى اسطوانة فى تحريك المكبس فإذا زاد حجم الغاز المحصور من $250\ \text{cm}^3$ إلى $400\ \text{cm}^3$. وبفرض أن العلاقة بين الضغط ($p\ \text{Ncm}^{-2}$) والحجم ($v\ \text{m}^3$) هى $pv^{1.4} = 3000$ فأوجد الشغل المبذول .

إذا رمزنا بـ A لمساحة المقطع للاسطوانة فإن pA تساوى مقدار القوة المؤثرة بالغاز . وإذا زاد الحجم بمقدار Δv فإن المكبس قد تحرك مسافة $\Delta v/A$ والشغل اللازم لهذه الإزاحة هو $pA \cdot \frac{\Delta v}{A} = \frac{3000}{v^{1.4}}\Delta v.$ إذن :

$$W = 3000 \int_{250}^{400} \frac{dv}{v^{1.4}} = -\frac{3000}{0.4}\, v^{-0.4}\Big]_{250}^{400} = -7500\left(\frac{1}{250^{0.4}} - \frac{1}{400^{0.4}}\right) = 1.5 \text{ J}$$

٧ – وعاء مخروطى الشكل قطر قاعدته العليا $4\ \text{m}$ وعمقه $5\ \text{m}$. فإذا كان هذا الوعاء يحوى سائلا وزنه النوعى $w\ \text{Nm}^{-3}$ وعمقه $3\ \text{m}$. فأوجد الشغل اللازم لضخ هذا السائل من موضع يعلو $1\ \text{m}$ فوق قمة الوعاء .



شكل ٤٠ — ٤

لننظر للاسطوانة المثلة فى الشكل ٤٠ – ٤ والتى نصف قطرها x وارتفاعها Δy ومتوسط بعدها عن أسفل الإناء y . إن وزن هذه الاسطوانة $\pi w x^2\,\Delta y$ والشغل اللازم لرفعها إلى الارتفاع المطلوب $\pi w x^2(6-y)\,\Delta y.$

ومن تشابه المثلثات نجد $x/y = 2/5$ أو $x = 2/5\,y$.

إذن :

$$W = \frac{4}{25}\pi w \int_0^3 y^2(6-y)\,dy = \frac{27}{5}\pi w \text{ J}$$

مسائل اضافية

٨ – إذا أثرت قوة مقدارها $360\ \text{N}$ على زنبرك طوله $4\ \text{m}$ فأحدث به استطالة مقدارها $0.3\ \text{m}$ ، فأوجد الشغل اللازم لاستطالة الزنبرك : (ا) من $4\ \text{m}$ إلى $5\ \text{m}$ (ب) من $5\ \text{m}$ إلى $5.3\ \text{m}$.

ج : (ا) $600\ \text{J}$ (ب) $414\ \text{J}$.

٩ – جسمان يجذبان كل منهما الآخر بقوة تتناسب عكسيا مع مربع المسافة بينهما ، فإذا بقى أحد الجسمين ثابتا فى موضع على المحور x واقع على يمين نقطة الأصل ويبعد عنها بمقدار وحدتين ، فأوجد الشغل اللازم لتحريك الجسم الآخر على المحور x من الموضع الذى يقع على يسار نقطة الأصل ويبعد عنها ثلاث وحدات إلى نقطة الأصل .

ج : $3k/10$.

١٠ – تقدر القوة التي تجذب بها الكرة الأرضية كتلة مقدارها w kg تبعد مسافة s km عن مركزها بـ $F = 9.8\,(6400)^2\, w/s^2$. بفرض أن نصف قطر الأرض 6400 km . أوجد الشغل اللازم بذله ضد قوة الجاذبية لتحريك كتلة 1 kg من سطح الأرض إلى نقطة تبعد 1600 km عن السطح .

ج : 12544 kmN = 12.5 MJ (تقريبا) .

١١ – أوجد الشغل اللازم بذله ضد قوة الجاذبية لتحريك صاروخ كتلته 8000 kg إلى ارتفاع 320 km فوق سطح الأرض .

ج : 23.9×10^5 kmN = 23.9 GJ .

١٢ – أوجد الشغل اللازم لرفع 500 kg فحم من منجم عمقه 500 m بواسطة حبل يزن $30\ Nm^{-1}$

ج : 6.2 MJ .

١٣ – صهريج مقطعة $2.5\ m^2$ أمتار وعمقه 2 m . أوجد الشغل اللازم لتفريغه من أعلاه إذا كان (ا) مليئا بالماء (ب) مليئا إلى ثلاثة أرباعه فقط بالماء .

ج : (ا) 125 000 J (ب) 117 187.5 J .

١٤ – خزان على شكل نصف كرة نصف قطرها 1 m مملوء بالماء . (ا) أوجد الشغل اللازم لتفريغ الماء من أعلى الخزان . (ب) أوجد الشغل اللازم لتفريغه بواسطة أنبوب يرتفع 0.5 m فوق سقف الخزان .

ج : (ا) 2500π J (ب) 5833π J .

١٥ – ما هو الشغل اللازم لملء خزان اسطواني قائم نصف قطره 1 m وارتفاعه 3 m بسائل وزنه النوعي $w\ Nm^{-3}$ وذلك بواسطة فتحة في أسفله ؟ وكم يكون هذا الشغل إذا كان الخزان أفقيا .

ج : $9/2\ \pi\, w$ J ، $3\ \pi\, w$ J .

١٦ – بين أن الشغل اللازم لتفريغ خزان ما مساويا للشغل اللازم لرفع محتواه من مركز ثقل السائل إلى الموضع الذي يفرغ منه السائل .

١٧ – يراد سحب كتلة مقدارها 100 kg مسافة 20 m على مستوى يميل 30^0 عن الأفقي . احسب الشغل اللازم بفرض أن قوة الاحتكاك التي تعاكس الحركة هي $N\mu$ حيث $\mu = 1/\sqrt{3}$ هو معامل الاحتكاك و $N = 980 \cos 30^0$ هو رد فعل المستوى .

ج : 19600 J .

١٨ – حل المسألة ١٧ بفرض أن المستوى يميل 45° عن الأفقي وأن معامل الاحتكاك $\mu = 1/\sqrt{2}$.

ج : $9800(1 + \sqrt{2})$ J .

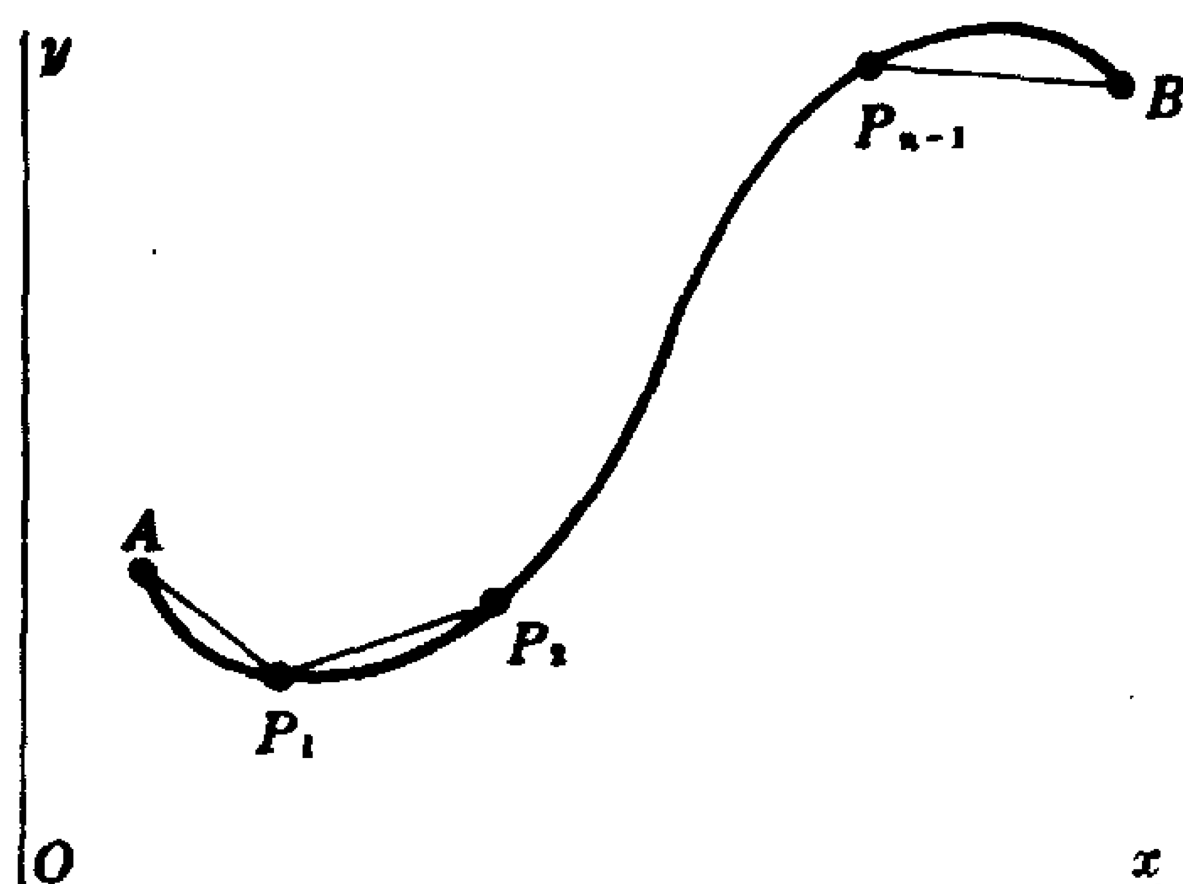
١٩ – اسطوانة مكبس تحتوى هواء . فإذا كان حجم الهواء تحت ضغط $1000\ Nm^{-2}$ يساوى $3\ m^3$. أوجد الشغل المبذول على المكبس لضغط الهواء إلى الحجم $0.06\ m^3$:

(ا) بفرض أن pv ثابت (ب) بفرض أن $pv^{1.4}$ ثابت .

ج : 11 735.7 J (ب) 28 365 J .

الفصل الحادى والأربعون

طـــول قـــوس



شكل ٤١ — ١

طول قوس AB لمنحنى هو بالتعريف نهاية مجموع أطوال مجموعة من الأوتار المتتالية $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B$, تصل بين نقط على القوس ، عندما يزداد عدد النقط إلى ما لا نهاية بحيث يؤول طول كل وتر إلى الصفر .

وإذا كانت $A(a,c)$ و $B(b,d)$ نقطتين على المنحنى $y=f(x)$ حيث $f(x)$ ومشتقتها الأولى $f'(x)$ متصلتان فى الفترة $a \leqq x \leqq b$ فإن طول القوس AB يعطى بـ

$$s = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

وبالمثل إذا كانت $A(a,c)$ و $B(b,d)$ نقطتين على المنحنى $x=g(y)$ حيث $g(y)$ ومشتقتها الأولى بالنسبة لـ y متصلتان فى الفترة $c \le y \le d$ فإن طول القوس AB يعطى بـ :

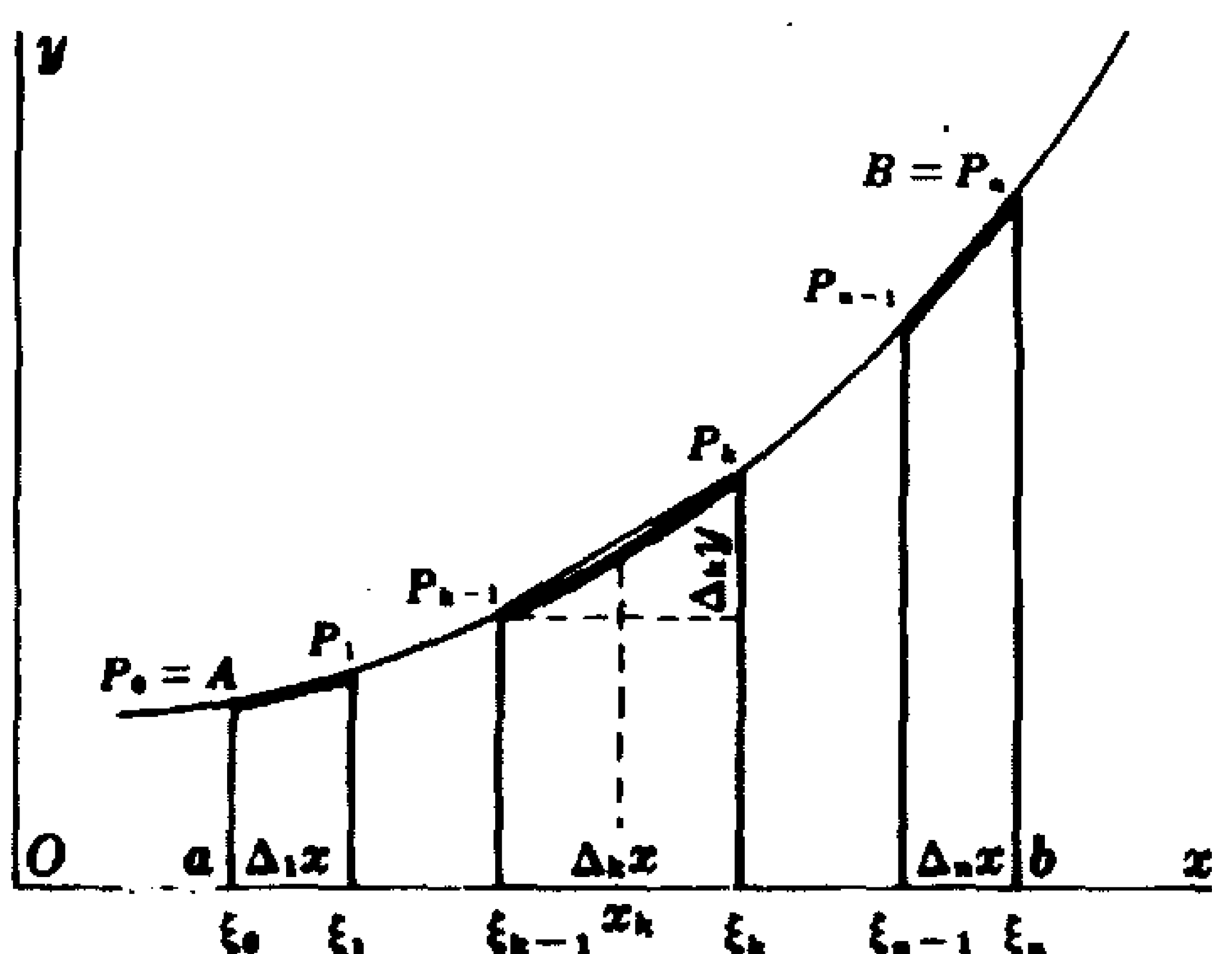
$$s = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

أما إذا كانت $A(u=u_1)$ و $B(u=u_2)$ نقطتين من منحنى معطى بالتمثيل البارامترى $x=f(u)$ و $y=g(u)$ وإذا كانت شروط الاتصال محققة فإن طول القوس AB يعطى بـ :

$$s = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

للبرهان أنظر المسألة ١ .

مســـائل محلولة



شكل ٤١ — ٢

استنتج الصيغة التى تعطى طول القوس :

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

لنفرض أن الفترة $a \le x \le b$ قسمت إلى n من الفترات الجزئية بالنقط $\xi_0=a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n=b$ وأننا أقمنا أعمدة لتعيين النقط $P_0=A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n=B$ على القوس كما هو مبين فى الشكل ٤١ — ٢ . عندئذ يكون طول الوتر المثل المبين بالشكل هو :

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2+(\Delta_k y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2}\, \Delta_k x$$

واستنادا إلى قانون القيمة المتوسط (الفصل ٢١) يوجد على القوس $P_{k-1}P_k$ نقطة واحدة على الأقل ، ولتكن $x = x_k$ بحيث يكون ميل المماس عندها $f'(x)$ مساويا لـ $\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$ وهو ميل الوتر $P_{k-1}P_k$ وبهذا يكون

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x, \qquad \xi_{k-1} < x_k < \xi_k$$

وباستخدام النظرية الأساسية نجـد :

$$AB = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

٢ — احسب طول قوس المنحنى $y = x^{3/2}$ من $x = 0$ إلى $x = 5$.

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^{1/2}$ ومنه يكون طول القوس :

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big]_0^5 = \frac{335}{27} \text{ units}$$

٣ — احسب طول قوس المنحنى $x = 3y^{3/2} - 1$ من $y = 0$ إلى $y = 4$.

إن $\frac{dx}{dy} = \frac{9}{2}y^{1/2}$ ومنه $s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4}y}\,dy = \frac{8}{243}(82\sqrt{82} - 1)$ units

٤ — احسب طول قوس المنحنى $24xy = x^4 + 48$ من $x = 2$ إلى $x = 4$.

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{x^4 - 16}{8x^2}$ ومنه $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{64}\left(\frac{x^4 + 16}{x^2}\right)^2$. وبالتالى $s = \frac{1}{8}\int_2^4 \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)dx = \frac{17}{6}$ units:

٥ — احسب طول قوس منحنى السلسلة $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ من $x = 0$ إلى $x = a$.

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$ ومنه $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}) = \frac{1}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a})^2$. وبالتالى :

$$s = \frac{1}{2}\int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a})\,dx = \frac{1}{2}a\left[e^{x/a} - e^{-x/a}\right]_0^a = \frac{1}{2}a\left(e - \frac{1}{e}\right) \text{ units}$$

٦ — احسب طول قوس القطع المكافئ $y^2 = 12x$ المقطوع بالوتر البؤرى العمودى .

إن الطول المطلوب يساوى ضعف طول القوس من النقطة $(0, 0)$ إلى النقطة $(3, 6)$.

ثم إن $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6}$ ومنه $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36 + y^2}{36}$. وبالتالى

$$s = 2\left(\frac{1}{6}\right)\int_0^6 \sqrt{36 + y^2}\,dy = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{36 + y^2} + 18\ln(y + \sqrt{36 + y^2})\right]_0^6$$
$$= 6\{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\} \text{ units}$$

٧ — احسب طول قوس المنحنى $x = t^2,\ y = t^3$ من $t = 0$ إلى $t = 4$.

إن $\frac{dx}{dt} = 2t,\ \frac{dy}{dt} = 3t^2,$ ومنه $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2 + 9t^4 = 4t^2\left(1 + \frac{9}{4}t^2\right)$. وبالتالى :

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2} \cdot 2t\,dt = \frac{8}{27}(37\sqrt{37} - 1) \text{ units}$$

٨ – احسب طول قوس من المنحنى الدويرى $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta.$

يرسم أحد أقواس المنحنى الدويرى عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$.

ثم إن $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta,\ \frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta,$ ومنه $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2(1-\cos\theta) = 4\sin^2\tfrac{1}{2}\theta.$

$$s = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{1}{2}\theta\, d\theta = -4\cos\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = 8 \text{ units}$$

مسائل اضافية

احسب فى كل من المسائل من ٩ – ٢٠ طول المنحنى كاملا أو طول القوس المشار إليه :

٩ – $y^3 = 8x^2$ من $x = 1$ إلى $x = 8$. ج: $(104\sqrt{13} - 125)/27$ units

١٠ – $6xy = x^4 + 3$ من $x = 1$ إلى $x = 2$. ج: $17/12$ units

١١ – $y = \ln x$ من $x = 1$ إلى $x = 2\sqrt{2}$. ج: $3 - \sqrt{2} + \ln\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})$ units

١٢ – $27y^2 = 4(x-2)^3$ من $(2,0)$ إلى $(11, 6\sqrt{3})$. ج: 14 units

١٣ – $y = \ln(e^x - 1)/(e^x + 1)$ من $x = 2$ إلى $x = 4$. ج: $\ln(e^4 + 1) - 2$ units

١٤ – $y = \ln(1 - x^2)$ من $x = 1/4$ إلى $x =$ [illegible] . ج: $\ln 21/5 - 1/2$ units

١٥ – $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ من $x = 1$ إلى $x = e$. ج: $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$ units

١٦ – $y = \ln\cos x$ من $x = \pi/6$ إلى $x = \frac{1}{4}\pi$. ج: $\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{3}$ units

١٧ – $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta.$ ج: $2\pi a$ units

١٨ – $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$ من $t = 0$ إلى $t = 4$. ج: $\sqrt{2}(e^4 - 1)$ units

١٩ – $x = \ln\sqrt{1+t^2},\ y = \arctan t$ من $t = 0$ إلى $t = 1$. ج: $\frac{1}{4}\pi$ units

٢٠ – $x = 2\cos\theta + \cos 2\theta + 1,\ y = 2\sin\theta + \sin 2\theta.$ ج: 16 units

٢١ – إذا كان موضع نقطة فى اللحظة t يتعين بـ $x = \frac{1}{2}t^2,\ y = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2}$ فاحسب طول المنحنى الذى ترسمه النقطة من $t = 0$ إلى $t = 4$.

ج : 20 units .

٢٢ – لتكن $P(x, y)$ نقطة ثابته و $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقطة متغيرة على المنحنى $y = f(x)$. أنظر الشكل ١٧ – ١ من الفصل ١٧ .

برهن أن :

$$\lim_{Q\to P}\frac{\text{arc } PQ}{\text{chord } PQ} = \lim_{Q\to P}\frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{ds/dx}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = 1$$

٢٣– (أ) برهن أن طول قوس المنحنى $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ الواقع فى الربع الأول يساوى $3a/2$.

(ب) بين أننا لو حسبنا طول قوس (أ) من المعادلة $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ فإننا نحصل على $a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$ الذى تصبح فيه الدالة المكاملة لا نهائية عند الحد الأدنى للتكامل . سيمر معنا تكاملات محددة من هذا النمط فى الفصل ٤٦ .

٢٤ – يمكن صياغة المسألة التى تقودنا إلى ما يسمى منحنى المطاردة على النحو التالى :

يرى كلب A فى الموضع $A(1,0)$ صاحبه فى الموضع $0(0,0)$ ماشيا على طول المحور y ، فيركض (فى الربع الأول) ليلحق به أوجد مسار الكلب بفرض أنه يتجه دوما نحو صاحبه وأن كلا من الكلب وصاحبه يتحرك بمعدل ثابت وهو p لصاحب الكلب و q $p < q$ الكلب .

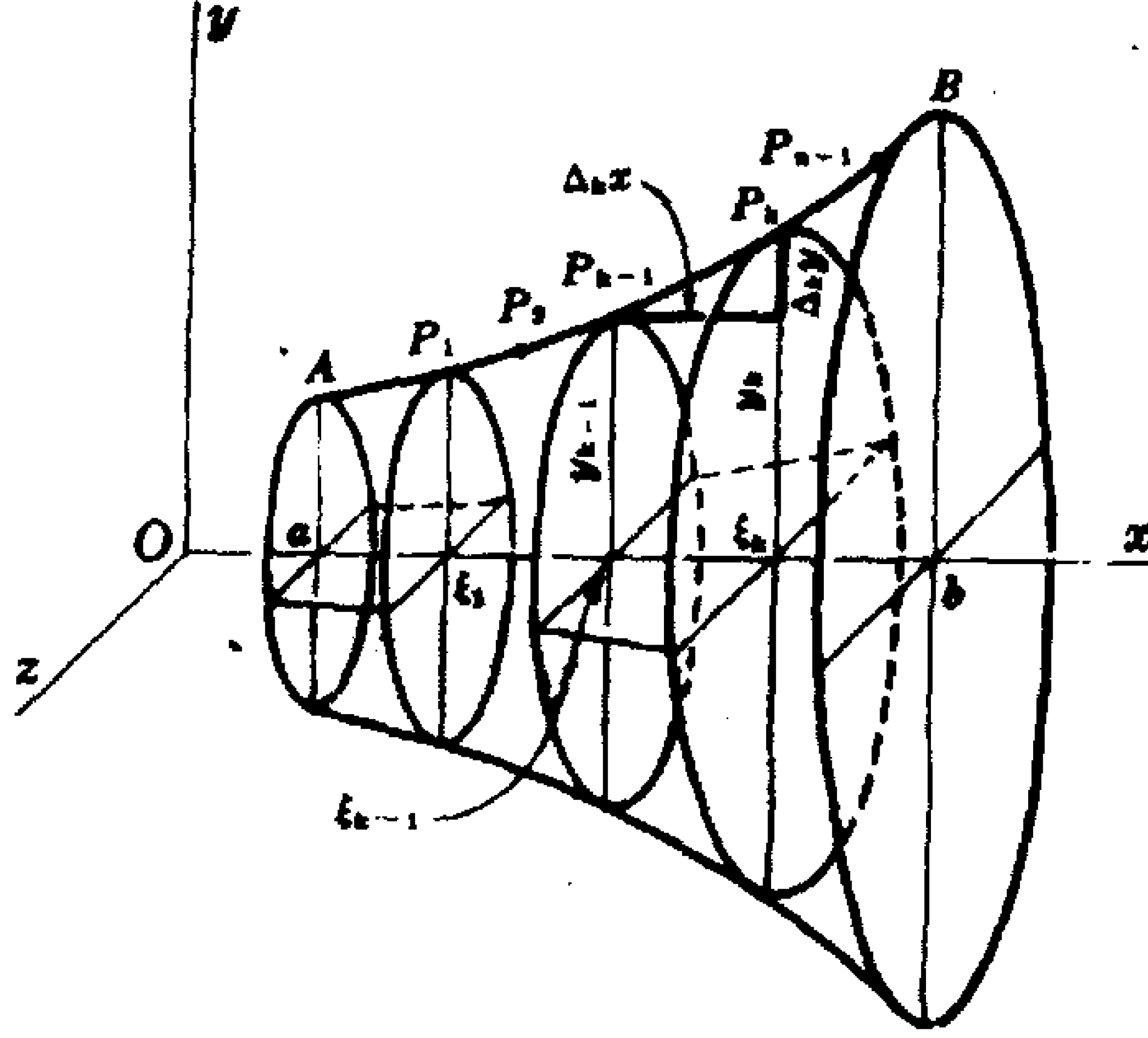
يمكن حل هذه المسألة فى الفصل ٧٠ . وأما الآن فالمطلوب هو التحقق من أنه يمكن الحصول على معادلة المسار $y = f(x)$ بتكامل

$$y' = \tfrac{1}{2}(x^{p/q} - x^{-p/q})$$

إرشاد : ليكن $P(a, b)$ حيث $0 < a < 1$ موضع الكلب ولنرمز بـ Q لنقطة تقاطع مماس المسار $y = f(x)$ عند النقطة P مع المحور y . أوجد الزمن اللازم ليصل الكلب إلى النقطة P وبين أن صاحبه يكون عندئذ فى النقطة Q .

الفصل الثانى والأربعون

مساحة السطح الدورانى



شكل ٤٢ — ١

إن مساحة السطح الذى ينتج عن دوران القوس AB من منحنى متصل حول مستقيم واقع فى مستواه هو بالتعريف نهاية مجموع المساحات التى تنتج عن دوران n وترا $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B,$ حول هذا المستقيم عندما يزداد عدد الأوتار إلى مالانهاية بحيث يؤول طول كل وتر إلى الصفر .

إذاكانت $A\ (a, c)$ ، $B\ (b, d)$ نقطتين على المنحنى $y = f(x)$ حيث $f(x)$ ومشتقتها الأولى $f'(x)$ متصلتان وبحيث لا تغير $f(x)$ إشارتها فى الفترة $a \le x \le b$ فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور x تعطى بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y\, ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

وإذا كان بالإضافة لذلك $f'(x) \neq 0$ فى الفترة المفروضة فإن مساحة السطح تعطى كذلك بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y\, ds = 2\pi \int_c^d y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

وإذا كانت $A\,(a, c)$ ، $B(\,(b, d)$ نقطتين على المنحنى $x = g(y)$ حيث $g(y)$ ومشتقتها الأولى بالنسبة لـ y تحقق شروطا مماثلة لتلك التى مرت فى الفقرة السابقة فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور y تعطى بـ :

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x\, ds = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

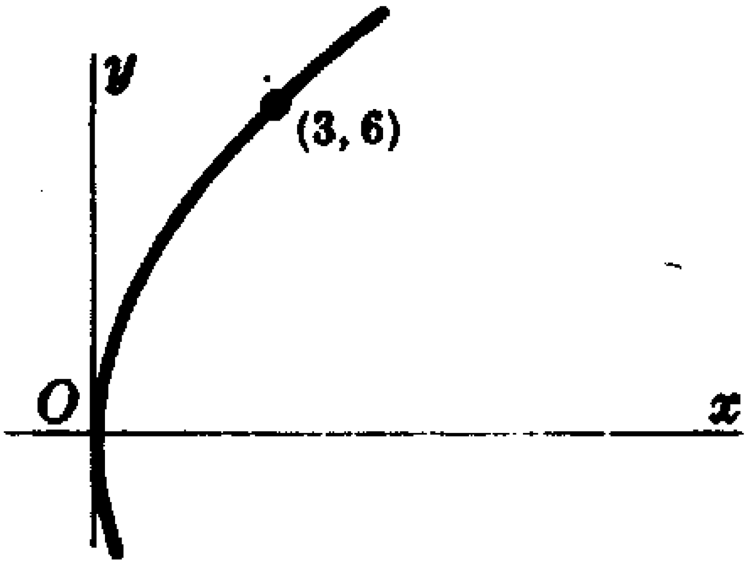
أما إذا كانت $A\,(u = u_1)$ ، $B\,(u = u_2)$ نقطتين على المنحنى المعطى بالمعادلتين البارامتريتين $x = f(u),\ y = g(u)$ وإذا كانت شروط الاتصال محققة فإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور x تعطى بـ :

$$S_x = 2\pi \int_{AB} y\, ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

وإن مساحة السطح الناتج عن دوران القوس AB حول المحور y تعطى بـ :

$$S_y = 2\pi \int_{AB} x\, ds = 2\pi \int_{u_1}^{u_2} x \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

مسائل محلولة



شكل ٤٢ — ٢

١ — أوجد مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس القطع المكافئ $y^2 = 12x$ من $x = 0$ إلى $x = 3$ حول المحور x .

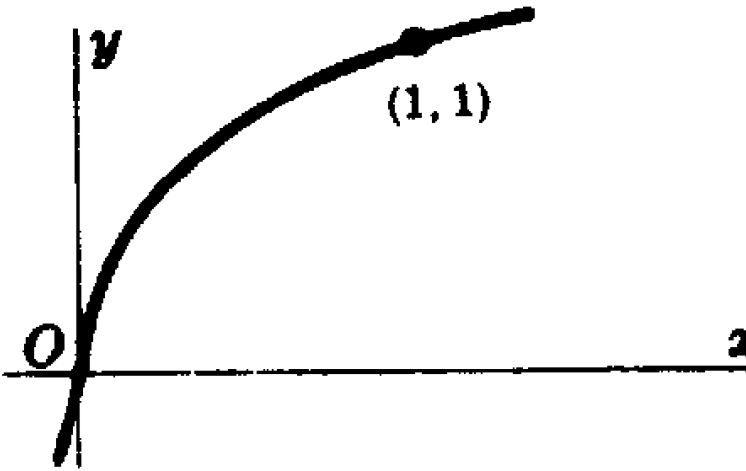
(أ) لنطبق الصيغة $S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$

إن $\frac{y^2+36}{y^2} = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ومنه

$$S_x = 2\pi \int_0^3 y\frac{\sqrt{y^2+36}}{y}\, dx = 2\pi \int_0^3 \sqrt{12x+36}\, dx = 24(2\sqrt{2}-1)\pi$$

(ب) لنطبق الصيغة $S_x = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$ أن $1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36+y^2}{36}$ ، $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{6}$ ومنه

$$S_x = 2\pi \int_0^6 y\frac{\sqrt{36+y^2}}{6}\, dy = \frac{\pi}{9}(36+y^2)^{3/2}\Big]_0^6 = 24(2\sqrt{2}-1)\pi$$



شكل ٤٢ — ٣

٢ — احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القوس $x = y^3$ من $y = 0$ إلى $y = 1$ حول المحور y .

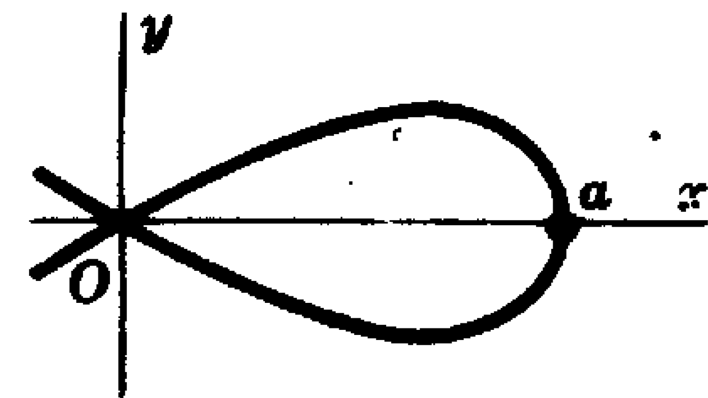
$$S_y = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = 2\pi \int_0^1 y^3\sqrt{1+9y^4}\, dy$$

$$= \frac{\pi}{27}(1+9y^4)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

٣ — احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القوس $y^2 + 4x = 2\ln y$ من $y = 1$ إلى $y = 3$ حول المحور x .

$$S_x = 2\pi \int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = 2\pi \int_1^3 y\frac{1+y^2}{2y}\, dy = \pi \int_1^3 (1+y^2)\, dy = \frac{32}{3}\pi$$

٤ — احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة المنحنى $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$ حول المحور x .



شكل ٤٢ — ٤

أن $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x - 2x^3}{8a^2y}$ ومنه $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{(a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)} = \frac{(3a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)}$

$$S_x = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^a \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a\sqrt{2}} \cdot \frac{3a^2-2x^2}{2a\sqrt{2}\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{4a^2}\int_0^a (3a^2-2x^2)x\, dx = \tfrac{1}{4}\pi a^2 \text{ square units}$$

٥ — احسب مساحة السطح الناتج عن دوران القطع الناقص $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4} = 1.$ حول المحور x .

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{-4}^{4} y\frac{\sqrt{16y^2+x^2}}{4y}\,dx = \frac{1}{2}\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{64-3x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{64-3x^2} + 32\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{8}\right]_{-4}^{4} = 8\pi\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\right) \text{ square units.}$$

٦ — احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى اللويرى التحتى $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta.$ حول المحور x .

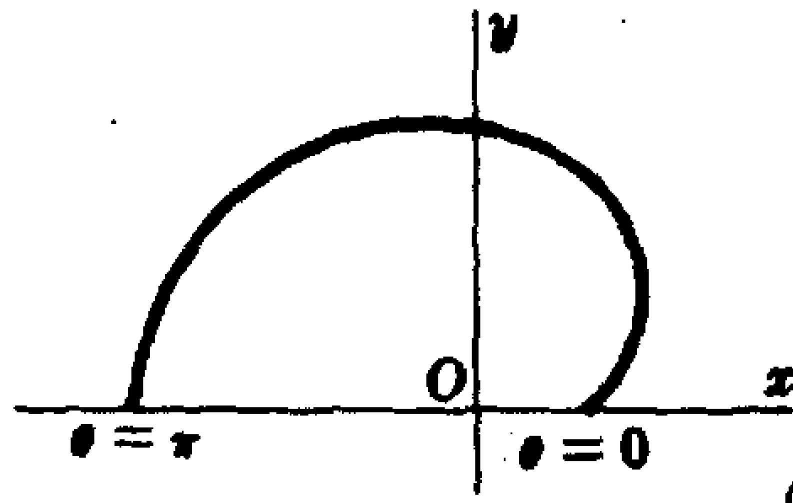
إن المساحة المطلوبة تنتج بدوران القوس عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$.

وإن $\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta,$ ومنه $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta.$

$$S_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}(a\sin^3\theta)3a\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{12a^2\pi}{5}\text{ sq. un.}$$

ملاحظة : يبدو من الطبيعى أن نكتب $2\pi\int_0^{\pi}(a\sin^3\theta)3a\cos\theta\sin\theta\,d\theta$. ولكن القيمة تكون عندئذ مساوية الصفر . لذا ينبغى أن لا يغيب عن بالنا أنه فى الوقت الذى تعطى فيه المساحات والحجوم . . . إلخ . . . بتكاملات محددة فإنه لا يمكن تفسير كل تكامل محدد على أنه مساحة . . . . . إلخ .

٧ — احسب مساحة السطح الناتج عن دوران منحنى القلب $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta,\ y = 2\sin\theta - \sin 2\theta.$ حول المحور x .



شكل ٤٢ — ٥

إن السطح المطلوب ينتج بدوران القوس عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$.

وإن $dx/d\theta = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta,\quad dy/d\theta = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta$

ومنه

$$(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = 8(1-\sin\theta\sin 2\theta - \cos\theta\cos 2\theta) = 8(1-\cos\theta).$$

$$S_x = 2\pi\int_0^{\pi}(2\sin\theta - \sin 2\theta)\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\pi}\sin\theta(1-\cos\theta)^{3/2}\,d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi(1-\cos\theta)^{5/2}\Big]_0^{\pi} = \frac{128\pi}{5}\text{ square units}$$

٨ — استنتج الصيغة $S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$

لنقرب القوس AB بـ n وترا كما هو مبين فى الشكل ٤٢ — ١ فعندما يدور الوتر الممثل بـ $P_{k-1}P_k$ حول المحور x ينتج جذع مخروط نصف قطرى قاعدتيه y_{k-1} ، y_k وارتفاعه المائل :

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2}\,\Delta_k x = \sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

(أنظر المسألة ١ من الفصل ٤١) ومساحته الجانبية (محيط مقطعه الأوسط × ارتفاعه المائل) هى .

$$S_k = 2\pi\left(\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

وبما أن $f(x)$ دالة متصلة فإنه يوجد على القوس $P_{k-1}P_k$ نقطة واحدة x'_k على الأقل بحيث يكون :

$$f(x'_k) = \tfrac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) = \tfrac{1}{2}\{f(\xi_{k-1}) + f(\xi_k)\}$$

ومنه

$$S_k = 2\pi f(x'_k)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

واستنادا إلى نظرية بايس نجد أخيرا :

$$S_x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\pi f(x'_k)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

مسائل اضافية

احسب فى كل من المسائل من ٩ إلى ١٨ مساحة السطح الناتج عن دوران القوس المفروض حول المحور المعطى :

٩ – $y = mx$ من $x=0$ إلى $x=2$ حول المحور x . ج : $4m\pi\sqrt{1+m^2}$ square units

١٠– $y = \frac{1}{3}x^3$ من $x=0$ إلى $x=3$ حول المحور x . ج : $\pi(82\sqrt{82}-1)/9$ square units

١١– $y = \frac{1}{3}x^3$ من $x=0$ إلى $x=3$ حول المحور y . ج : $\frac{1}{3}\pi[9\sqrt{82} + \ln(9+\sqrt{82})]$ square units

١٢– $8y^2 = x^2(1-x^2)$, العقدة ، حول المحور x . ج : $\frac{1}{4}\pi$ square units

١٣– $y = x^3/6 + 1/2x$ من $x=1$ إلى $x=2$ حول المحور y . ج : $(15/4+\ln 2)\pi$ square units

١٤– $y = \ln x$ من $x=1$ إلى $x=7$ حول المحور y . $[34\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2})]\pi$

١٥– $9y^2 = x(3-x)^2$ العقدة ، حول المحور y . ج : $28\pi\sqrt{3}/5$ square units

١٦– $y = a\cosh x/a$ من $x=-a$ إلى $x=a$ حول المحور x . ج : $\frac{1}{2}\pi a^2(e^2-e^{-2}+4)$ square units

١٧– قوس من $x = a(\theta-\sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$; حول المحور x ج : $64\pi a^2/3$ square units

١٨– $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t$ من $t=0$ إلى $t=\frac{1}{2}\pi$ حول المحور x. ج : $2\pi\sqrt{2}(2e^\pi+1)/5$

١٩– احسب مساحة منطقة كروية قطعت من كرة نصف قطرها r بمستويين متوازيين يبعد كل منهما عن المركز بـ $\frac{1}{2}a$

ج : $2\pi ar$.

٢٠– احسب المساحة المقطوعة من كرة نصف قطرها r بمخروط نصف زاوية رأسه α ورأسه فى مركز الكرة .

ج : $2\pi r^2(1-\cos\alpha)$

الفصل الثالث والأربعون

المركز المتوسط وعزوم القصور الذاتى لأقواس المنحنيات والسطوح الدورانية

المركز المتوسط لقوس . أن الاحداثيين $(\bar{x}, \bar{y})$ للمركز المتوسط لقوس AB من منحنى مستو معادلته $F(x, y) = 0$ أو $x = f(u),\ y = g(u),$ يحققان العلاقتين :

$$\bar{y} \cdot s = \bar{y} \int_{AB} ds = \int_{AB} y\, ds \quad , \quad \bar{x} \cdot s = \bar{x} \int_{AB} ds = \int_{AB} x\, ds$$

أنظر المسألتين ١ – ٢

نظرية بابوس الثانية : إذ دار منحنى حول محور فى مستواه وغير قاطع له ، فإن مساحة السطح الناتج عن هذا الدوران تساوى حاصل ضرب طول المنحنى فى طول المسار الذى يرسمه المركز المتوسط للمنحنى .

أنظر المسألة ٣

عزوم القصور الذاتى لقوس : يعطى عزم القصور الذاتى لقوس AB من منحنى مستو (مثلا : قطعة من سلك رفيع متجانس) بالنسبة للمحورين الاحداثيين بالصيغتين :

$$I_y = \int_{AB} x^2\, ds \quad \text{و} \quad I_x = \int_{AB} y^2\, ds$$

أنظر المسألتين ٤ – ٥

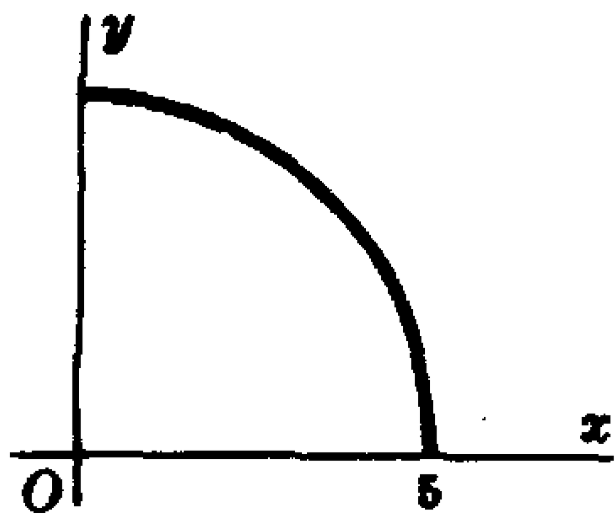
المركز المتوسط لسطح دورانى : يعطى الاحداثى $\bar{x}$ للمركز المتوسط لسطح ناتج عن دوران قوس AB من منحنى حول المحور x بالعلاقة :

$$\bar{x} \cdot S_x = 2\pi \int_{AB} x \cdot y\, ds$$

عزم القصور الذاتى لسطح دورانى : إن عزم القصور الذاتى لسطح ناتج عن دوران قوس AB من منحنى مستو حول المحور x بالنسبة لمحور الدوران هو :

$$I_x = 2\pi \int_{AB} y^2 \cdot y\, ds$$

مسائل محلولة



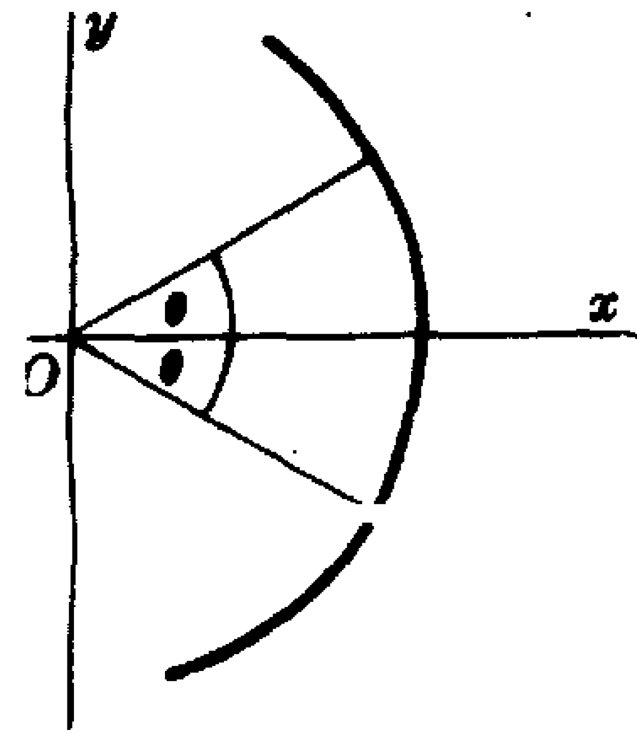
شكل ٤٣ — ١

١ – عين المركز المتوسط لقوس الدائرة $x^2 + y^2 = 25$. الذى يقع فى الربع الأول.

إن $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ and $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{25}{y^2}$. و بما أن $s = \frac{5}{2}\pi$,

فإن $\frac{5}{2}\pi\bar{y} = \int_0^5 y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^5 5\,dx = 25$ أو $\bar{y} = 10/\pi$

و استنادا إلى التناظر يكون $\bar{y} = \bar{x}$ و بالتالى فإن المركز المتوسط هو النقطة $(10/\pi, 10/\pi)$



شكل ٤٣ — ٢

٢ – عين المركز المتوسط لقوس دائرة نصف قطرها r إذا كانت الزاوية المركزية للقوس 2θ .

لنأخذ القوس كما فى الشكل ٤٣ – ٢ وعندئذ يكون $\bar{x}$ للقوس كله منطبقة على المحور السينى للمركز المتوسط للنصف العلوى من القوس ويكون $\bar{y} = 0$

أن $\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ ومنه $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{x^2}$, ويكون بالنسبة للنصف العلوى من القوس $s = r\theta$,

إذن : $r\theta \cdot \bar{x} = \int_0^{r\sin\theta} x\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = r\int_0^{r\sin\theta} dy = r^2 \sin\theta$

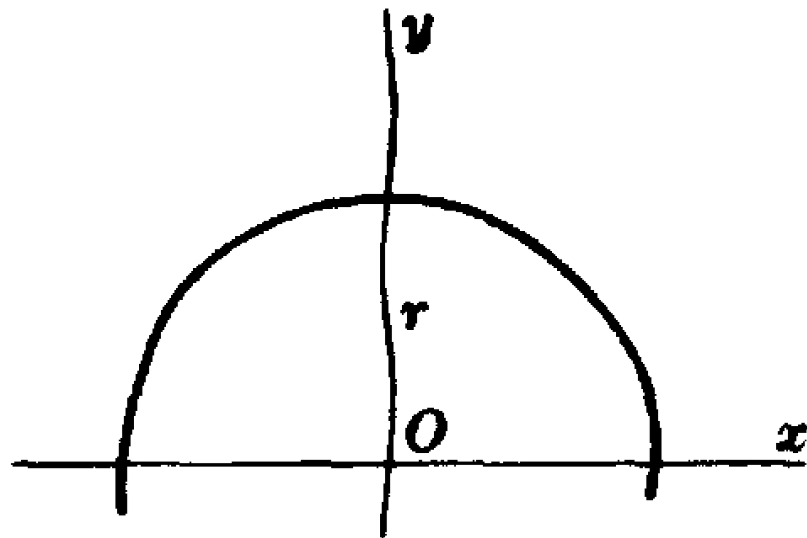
و المركز المتوسط يقع على نصف القطر المنصف وعلى بعد $(r\sin\theta)/\theta$ من مركز الدائرة .

شكل ٤٣ — ٣

٣ – أوجد مساحة السطح الناتج عن دوران مستطيل . بعداه b, a حول محور يبعد c units عن المركز بفرض أن c أكبر من كل من b, a .
إن محيط المستطيل $2(a+b)$ و بما أن مركزه المتوسط يرسم دائرة نصف قطرها c فإن :

$$S = 2(a+b)\cdot 2\pi c = 4\pi(a+b)c \text{ square units}$$

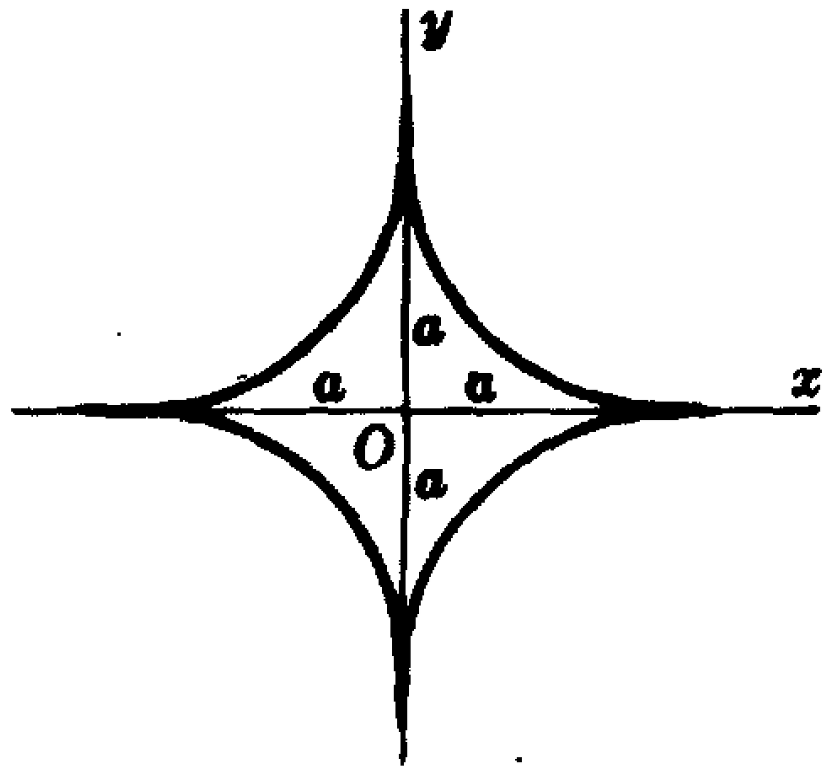
٤ – احسب عزم القصور الذاتى لقوس دائرة بالنسبة لقطر ثابت منها .



شكل ٤٣ — ٤

لنأخذ الدائرة كما فى الشكل ٤٣ – ٤ ولنأخذ القطر الثابت منطبقا على المحور x.
إن العزم المطلوب يساوى أربع مرات عزم القوس الموجود فى الربع الأول ثم إن $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
ومنه $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r}{y}$. كذلك $s = 2\pi r$. وعلى هذا يكون

$$I_x = 4\int_0^r y^2\,ds = 4\int_0^r y^2 \cdot \frac{r}{y}\,dx = 4r\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$
$$= 4r\left[\frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}r^2 \arcsin\frac{x}{r}\right]_0^r = \pi r^3 = \frac{1}{2}r^2 s$$



شكل ٤٣ — ٥

٥ — احسب عزم القصور الذاتي حول المحور x لقوس المنحنى الدويرى النجمى (الهيبوسيكلوئيد) $x = a\sin^3\theta,\ y = a\cos^3\theta.$

إن العزم المطلوب يساوى أربع مرات عزم قوس المنحنى الموجود فى الربع الأول :

ثم إن $\dfrac{dx}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta,\quad \dfrac{dy}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta,$ ومنه :

$$s = 4\int ds = 4\int_0^{\pi/2} 3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 6a$$

$$I_x = 4\int y^2\,ds = 12a^3\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\sin\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{3}{2}a^3 = \tfrac{1}{4}a^2s$$

مسائل اضافية

٦ — عين المركز المتوسط لـ :

(ا) قوس المنحنى $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. الواقع فى الربع الأول . إستخدام $s = 3a/2$. ج : $(2a/5, 2a/5)$

(ب) قوس العقدة $9y^2 = x(3-x)^2$; الواقع فى الربع الأول . إستخدام $s = 2\sqrt{3}$. ج : $(7/5, \sqrt{3}/4)$

(ج) القوس الأول من $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$ ج : $(\pi a, 4a/3)$

(د) قوس المنحنى $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta.$ الذى يقع فى الربع الأول . ج : أنظر (ا)

٧ — احسب عزم القصور الذاتى للقوس المفروض بالنسبة للمستقيم المذكور أمامه .

(ا) عقدة المنحنى $9y^2 = x(3-x)^2$. المحور x ؛ المحور y . استخدم $s = 4\sqrt{3}$. ج : $I_x = 8s/35,\ I_y = 99s/35$

(ب) $y = a\cosh x/a$ من $x = 0$ إلى $x = a$ ، المحور x ج : $(a^2 + \frac{1}{3}s^2)s$

٨ — عين المركز المتوسط لسطح نصف كرة . ج : $\bar{y} = \frac{1}{2}r$

٩ — عين المركز المتوسط لسطح ناتج عن دوران :

(ا) $4y + 3x = 8$ من $x = 0$ إلى $x = 2$ حول المحور x . ج : $\bar{x} = 4/5$

(ب) قوس من $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1-\cos\theta)$. حول المحور y . ج : $\bar{y} = 4a/3$

١٠ – استخدم نظرية نظرية بابوس الثانية لتحصل على :

(ا) المركز المتوسط لقوس دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r وواقع فى الربع الأول . ج : $(2r/\pi, 2r/\pi)$

(ب) مساحة السطح الناتج عن دوران مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه a حول محور يبعد c units عن المركز المتوسط للمثلث .

ج : $6\pi ac$ square units

١١ – احسب عزم القصور الذاتى حول محور الدوران لـ :

(ا) سطح كرة نصف قطرها r . ج $\frac{2}{3}Sr^2$

(ب) السطح الجانبى لمخروط ينتج عن دوران المستقيم $y = 2x$ من $x = 0$ إلى $x = 2$ حول المحور x .

ج : $8S$

١٢ – استنتج كل صيغة من صيغ هذا الفصل .

الفصل الرابع والأربعون

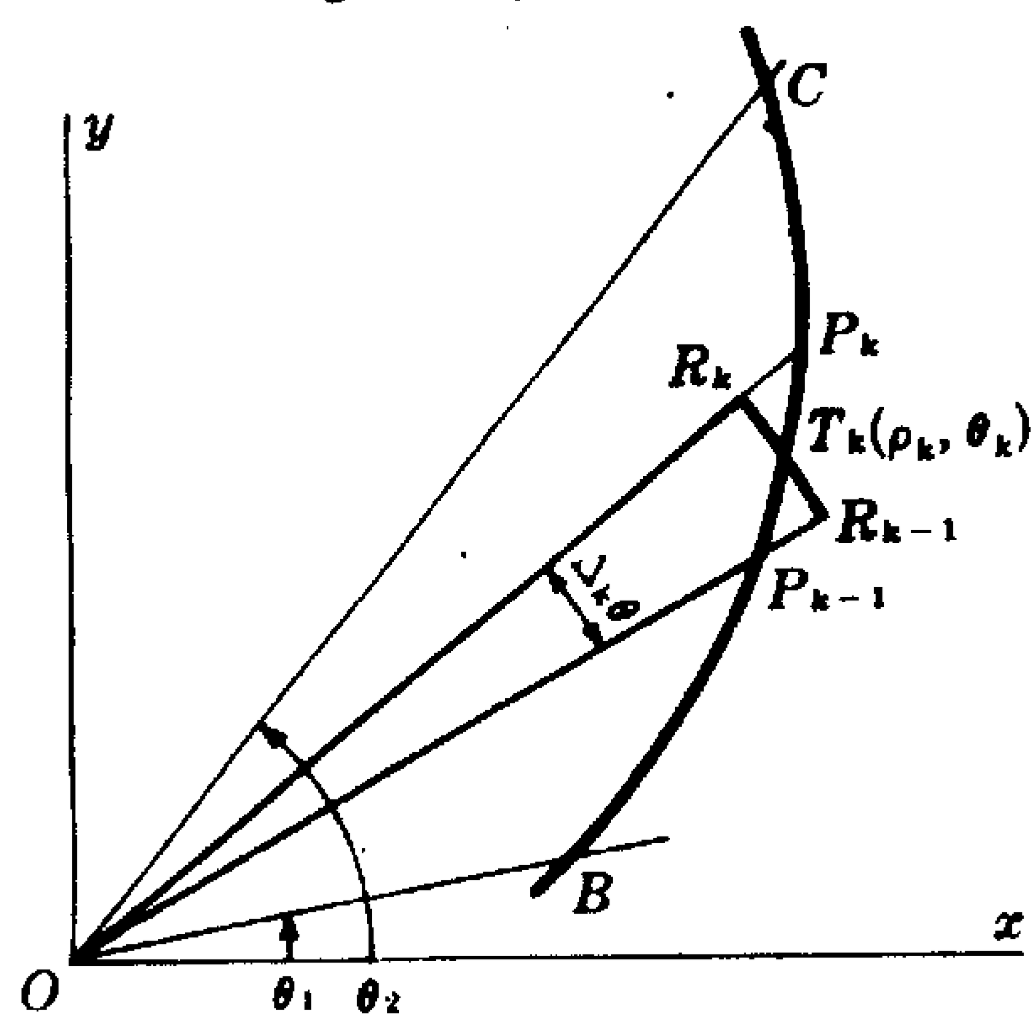
مساحات السطوح المستوية ومراكزها المتوسطة
فى الاحداثيات القطبية

تعطى مساحة سطح مستو محصورة بين المنحنى $\rho = f(\theta)$ ونصفى القطرين المتجهين $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ بـ :

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta$$

ينبغى ، عند استخدام الإحداثيات القطبية ، الانتباه الشديد لتعيين حدود التكامل الملائمة ، ويتطلب هذا الاستفادة من أى تناظر لتضييق مجال التكامل بقدر الإمكان .

أنظر المسائل ١ — ٧



شكل ٤٤ — ١

المركز المتوسط لسطح مستوى . يعطى الاحداثيان $(\bar{x}, \bar{y})$ للمركز المتوسط لسطح مستوى محصور بين المنحنى $\rho = f(\theta)$ ونصفى القطرين المتجهين $\theta = \theta_1$ و $\theta = \theta_2$ بـ :

$$A\bar{x} = \bar{x}\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2}{3}x\cdot\rho^2\, d\theta$$

,

$$A\bar{y} = \bar{y}\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{2}{3}y\cdot\rho^2\, d\theta$$

أنظر المسائل ٩ — ١٠ .

مسائل محلولة

١ — استنتج أن $A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\, d\theta.$

لنقسم الزاوية BOC الموضحة بالشكل إلى n قسما بالأشعة $OP_0 = OB, OP_1, \dots, OP_2, OP_{n-1}, OP_n = OC.$ يوضح الشكل شريحة ممثلة $P_{k-1}OP_k$ تقابل الزاوية المركزية $\Delta_k\theta$ وتقرب هذه الشريحة بالقطاع الدائرى $R_{k-1}\,OR_k$ الذى نصف قطره ρ_k ، وزاويته المركزية $\Delta_k\theta$ وتقدر مساحته . (أنظر المسألة ١٥ (ص) الفصل ٣٤) بـ : $\frac{1}{2}\rho_k^2\Delta_k\theta = \frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2\Delta_k\theta.$ وبالتالى يكون استنادا إلى النظرية الأساسية .

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2\Delta_k\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\, d\theta$$

٢ – احسب مساحة السطح المستوى المحدد بالمنحنى $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

يتضح من الشكل ٤٤ – ٢ أن السطح المطلوب حساب مساحته يتكون من أربع قطع يمسح أحدها بنصف القطر المتجه عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \frac{1}{4}\pi$ لذلك .

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4} \cos 2\theta\,d\theta = a^2 \sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = a^2 \text{ square units}$$

و بما أن كل ربع من المستوى يحوى جزءا من السطح المطلوب مساحته فإنه يبدو من المعقول أن نكتب :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}a^2 \sin 2\theta\Big]_0^{2\pi} = 0$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2\,d\theta = a^2\int_0^{\pi} \cos 2\theta\,d\theta = 0$$

شكل ٤٤ — ٢

يمكن إيجاد سبب هذه النتيجة الخاطئة بإمعان النظر فى :

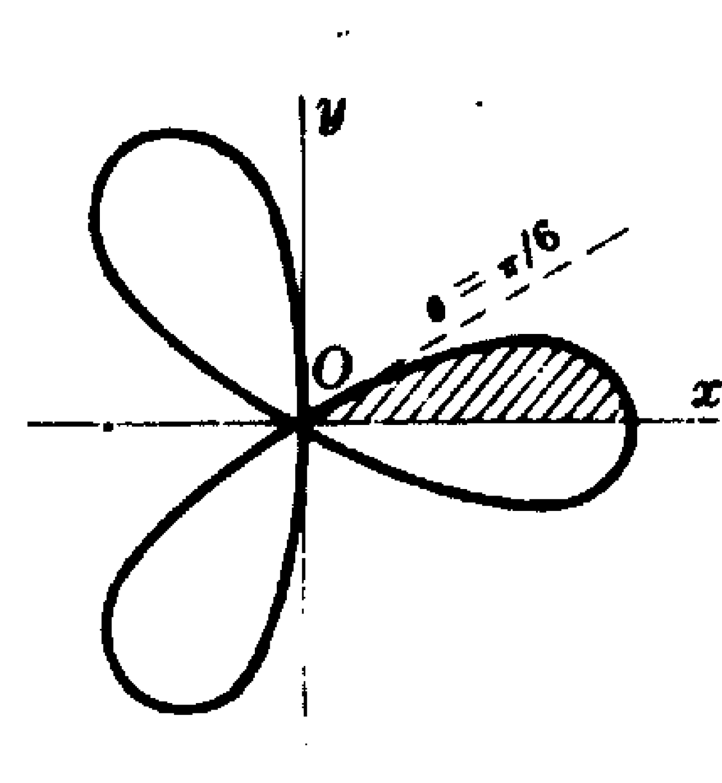
$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{3\pi/4}^{\pi} \rho^2\,d\theta = \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

فى الفترتين $(0, \pi/4)$ و $(3\pi/4, \pi)$ يكون $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ حقيقيا ، وبالتالى فإن التكاملين الأول والثالث يعطيان المساحتين الموافقتين للسطحين اللذين يمسحهما نصف القطر المتجه عندما تمسح θ هاتين الفترتين .
أما فى الفترة $(\pi/4, 3\pi/4)$ فإن $\rho^2 < 0$ وبالتالى فإن ρ تخيلى . وهكذا على الرغم من كون $\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} a^2 \cos 2\theta\,d\theta$ تكاملا صحيحا تماما ، فإنه لا يمكن تفسيره هنا على أنه مساحة قطعة سطح .

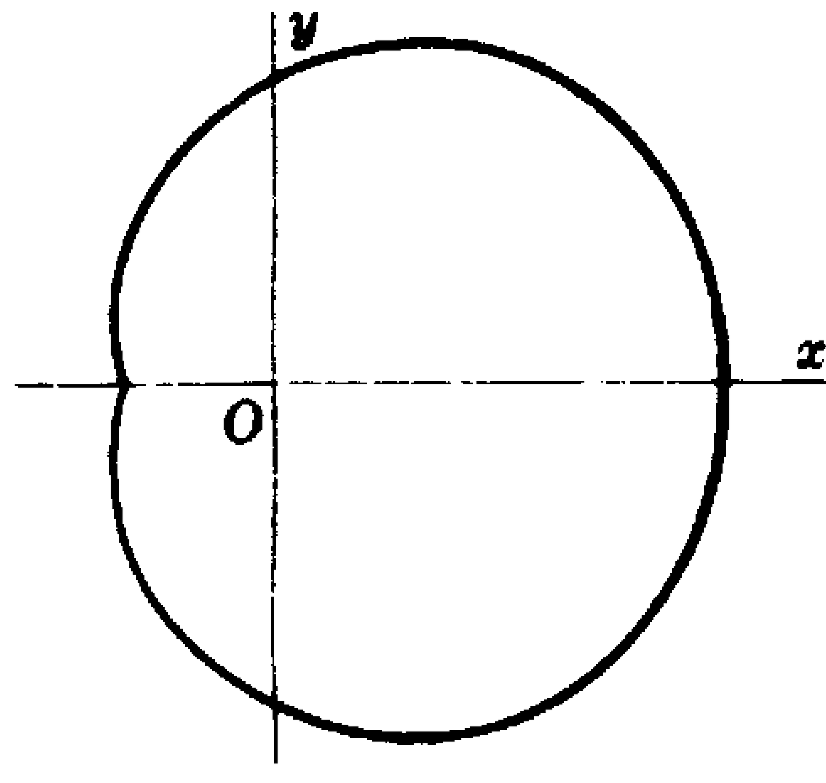
٣ – احسب مساحة السطح المحدد بالوردة ثلاثية الوريقة $\rho = a\cos 3\theta$.

إن المساحة المطلوبة تساوى ست مرات مساحة قطعة السطح المظللة فى الشكل ٤٤ – ٣ والتى نحصل عليها عندما تتغير θ من 0 إلى $\pi/6$ ولذلك .

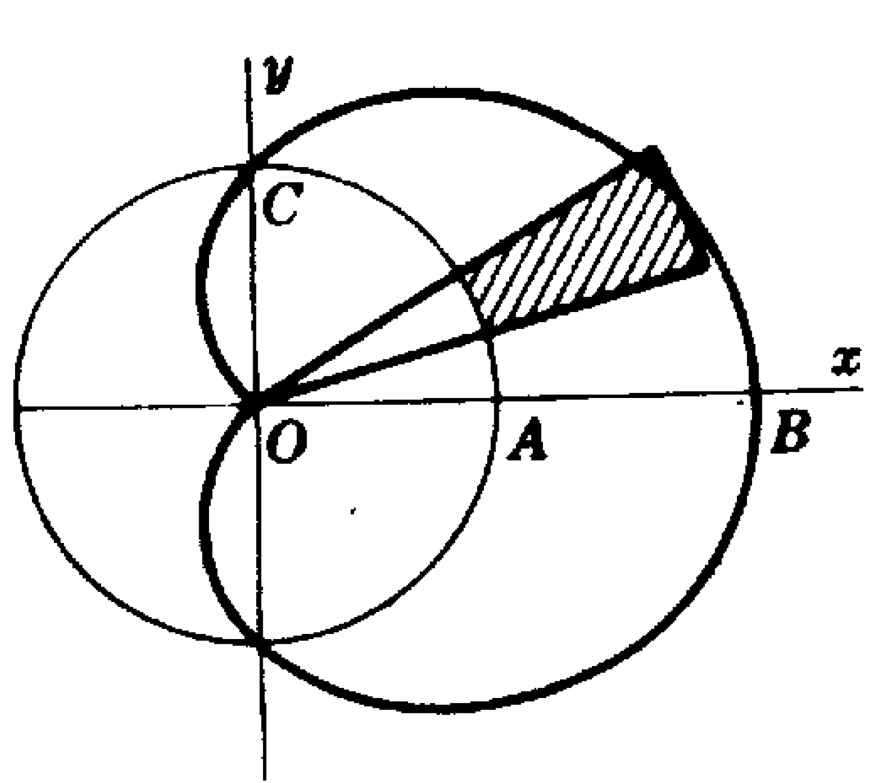
$$A = 6\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\,d\theta = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2\cos^2 3\theta\,d\theta = 3a^2\int_0^{\pi/6}\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 6\theta\right)d\theta = \tfrac{1}{4}\pi a^2 \text{ sq. un.}$$



شكل ٤٤ — ٣



شكل ٤٤ — ٤



شكل ٤٤ — ٥

٤ – احسب مساحة السطح المحدد بالمنحنى $\rho = 2 + \cos\theta$ والمسمى بماسون ، والمبين بالشكل ٤٤ – ٤ .

إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح الذى نحصل عليه عندما تتغير θ من 0 إلى π .

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\pi}(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

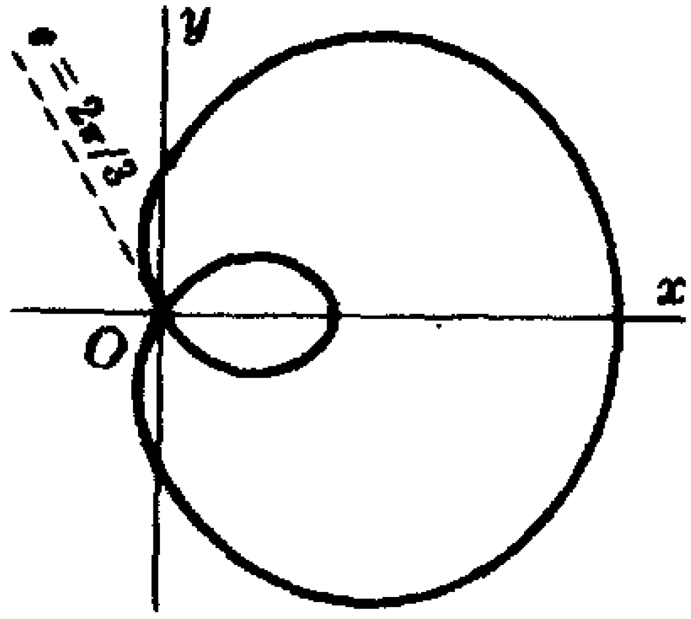
$$= \left[4\theta + 4\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = 9\pi/2 \text{ square units}$$

٥ — احسب مساحة السطح الواقعة داخل منحنى القلب $\rho = 1 + \cos\theta$ وخارج الدائرة $\rho = 1$.

بالنظر إلى الشكل ٤٤ — ٥ نجد أن مساحة ABC = مساحة OBC − مساحة OAC = نصف المساحة المطلوبة لذلك فإن :

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta - 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1)^2\,d\theta = \int_0^{\pi/2}(2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta = 2+\tfrac{1}{4}\pi \text{ sq. un.}$$

٦ — أوجد مساحة كل من عقدتى المنحنى $\rho = \frac{1}{2} + \cos\theta$.



شكل ٤٤ — ٦

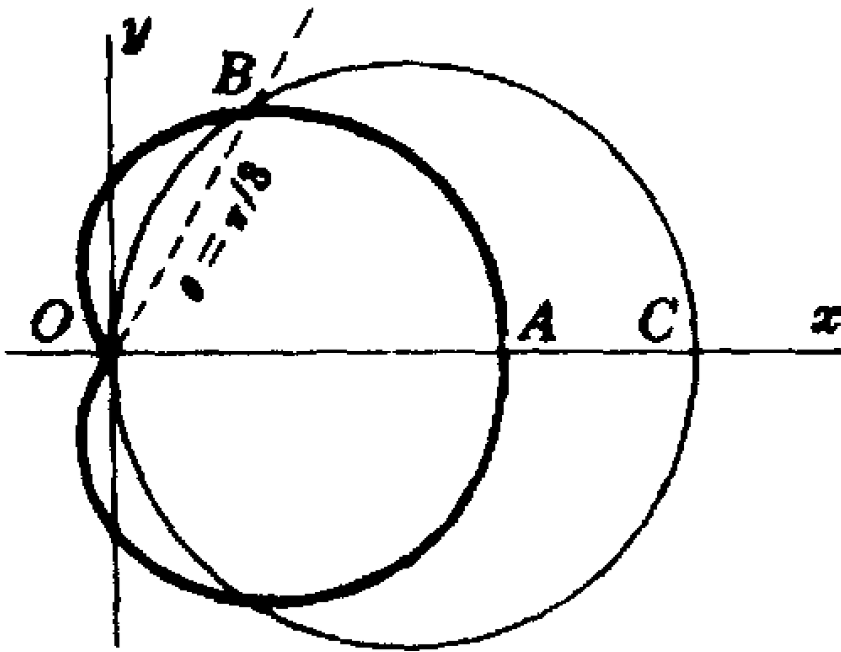
العقدة الكبرى . إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح التى نحصل عليها عندما تتغير θ من 0 إلى $2\pi/3$:

إذن :
$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}(\tfrac{1}{2}+\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{2\pi/3}(\tfrac{1}{4}+\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ square units}$$

العقدة الصغرى . إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى مساحة السطح التى نحصل عليها عندما تتغير θ من $2\pi/3$ إلى π إذن :

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(\tfrac{1}{2}+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ square units}$$



شكل ٤٤ — ٧

٧ — احسب مساحة السطح المشتركة بين الدائرة $\rho = 3\cos\theta$ ومنحنى القلب $\rho = 1 + \cos\theta$.

إن مساحة السطح OAB تتكون من جزءين ، يمسح أحدهما نصف القطر المتجه للمنحنى $\rho = 1 + \cos\theta$ عندما تتغير θ من 0 إلى $\pi/3$. ويمسح ثانيهما نصف القطر المتجه للمنحنى $\rho = 3\cos\theta$ عندما تتغير θ من $\pi/3$ إلى $\pi/2$.

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(1+\cos\theta)^2\,d\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}9\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 5\pi/4 \text{ square units}$$

٨ — استنتج الصيغتين $A\bar{x} = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\cos\theta\,d\theta,\quad A\bar{y} = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\sin\theta\,d\theta,$ حيث $(\bar{x}, \bar{y})$ موضع المركز المتوسط للسطح المستوى BOC فى الشكل ٤٤ — ١ .

باعتبار القطاع الدائرى الممثل المقرب $R_{k-1}\ OR_k$ وبفرض للسهولة إن OT_k ينصف الزاوية $P_{k-1}\ OP_k$ وكى نحصل على موضع تقريبى للمركز المتوسط $C_k\ (x, y_k)$ للقطاع نعتبره مثلثا حقيقيا . عندئذ يكون المركز المتوسط على الخط OT_k ويبعد مسافة $^2/_3\,\rho_k$ من النقطة O ، أى يكون على وجه التقريب .

$$\bar{x}_k = \tfrac{2}{3}\rho_k\cos\theta_k = \tfrac{2}{3}f(\theta_k)\cos\theta_k \quad \text{و} \quad \bar{y}_k = \tfrac{2}{3}f(\theta_k)\sin\theta_k$$

ومن جهة أخرى أن العزم الأول للقطاع حول المحور y هو :

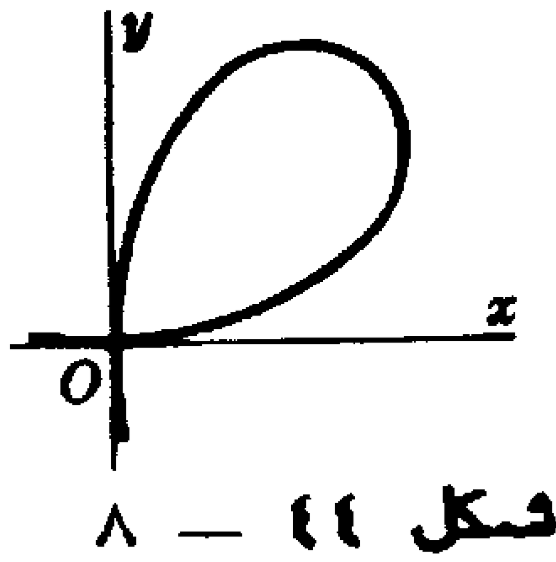
$$\bar{x}_k\cdot\tfrac{1}{2}\rho_k^2\Delta_k\theta = \tfrac{2}{3}\rho_k\cos\theta_k\cdot\tfrac{1}{2}\rho_k^2\Delta_k\theta = \tfrac{1}{3}\{f(\theta_k)\}^3\cos\theta_k\,\Delta_k\theta$$

واستنادا إلى النظرية الأساسية :

$$A\bar{x} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{f(\theta_k)\}^3\cos\theta_k\,\Delta_k\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^3\cos\theta\,d\theta$$

يترك للقارئ أن يحصل على الصيغة $A\ \bar{y}$ كتمرين .

ملاحظة : إن المركز المتوسط للقطاع OR_k R_{k-1} يقع ، استنادا إلى المسألة ٨ من الفصل ٣٧ على OT_k على بعد $\frac{2\rho_k\sin\frac{1}{2}\Delta_k\theta}{3\cdot\frac{1}{2}\Delta_k\theta}$ من النقطة O . لعل القارئ يرغب أن يستخدم هذه النتيجة فى استنتاج الصيغتين السابقتين .



شكل ٤٤ — ٨

٩ — عين المركز المتوسط للسطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بعقدة الوردة $\rho = \sin 2\theta$.

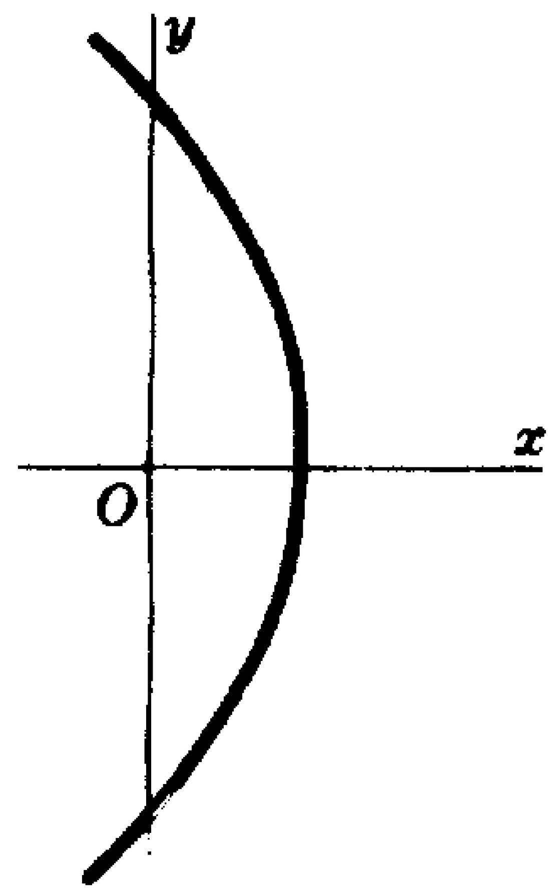
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\Big[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{8}\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\rho^3\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{16}{105},\quad \bar{x} = \frac{128}{105\pi}.$$

واستنادا إلى التناظر يكون $\bar{y} = 128/105\,\pi$ والمركز المتوسط هو النقطة $(128/105\pi,\ 128/105\pi)$.

١٠ — عين المركز المتوسط للسطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بالقطع المكافئ $\rho = \frac{6}{1+\cos\theta}$ كما هو مبين فى الشكل ٤٤ — ٩ .



شكل ٤٤ — ٩

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{36}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^4\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\tan^2\tfrac{1}{2}\theta)\sec^2\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta = 9\Big[\tan\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{3}\tan^3\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{\pi/2} = 12$$

$$12\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{216\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta = 9\int_0^{\pi/2}\frac{2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1}{\cos^6\frac{1}{2}\theta}\,d\theta$$

$$= 9\int_0^{\pi/2}(2\sec^4\tfrac{1}{2}\theta - \sec^6\tfrac{1}{2}\theta)\,d\theta = 18\Big[\tan\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{5}\tan^5\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 72/5,\ \text{and}\ \bar{x} = 6/5.$$

$$12\bar{y} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{216\sin\theta}{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta = 27,\ \text{و}\quad \bar{y} = 9/4.$$

والمركز المتوسط هو النقطة $(6/5,\ 9/4)$.

مسائل اضافية

١١ — احسب مساحة السطح المحدد بكل من المنحنيات التالية :

(ا)	$\rho^2 = 1 + \cos 2\theta$	ج : π sq. un.
(ب)	$\rho^2 = a^2\sin\theta\,(1-\cos\theta)$	ج : a^2 sq. un.
(جـ)	$\rho = 4\cos\theta$	ج : 4π sq. un.
(د)	$\rho = a\cos 2\theta$	ج : $\frac{1}{2}\pi a^2$ sq. un.
(هـ)	$\rho = 4\sin^2\theta$	ج : 6π sq. un.
(و)	$\rho = 4(1-\sin\theta)$	ج : 24π sq. un.

١٢ – احسب مساحة السطح :

(ا) داخل $\rho = \cos\theta$ وخارج $\rho = 1 - \cos\theta$. ج : $(\sqrt{3} - \pi/3)$ sq. un.

(ب) داخل $\rho = \sin\theta$ وخارج $\rho = 1 - \cos\theta$. ج : $(1 - \pi/4)$ sq. un.

(جـ) بين البيضوى الداخلى والبيضوى الخارجى لـ $\rho^2 = a^2(1 + \sin\theta)$. ج : $4a^2$ sq. un.

(د) بين عقدتى المنحنى $\rho = 2 - 4\sin\theta$. ج : $4(\pi + 3\sqrt{3})$ sq. in.

١٣ – (ا) لحلزون ارشميدس $\rho = a\theta$. بين أن المساحة التى تضاف بالدورة الـ $n(2 < n)$ تساوى $(n - 1)$ مرة من المساحة التى تضاف بالدورة الثانية .

(ب) لحلزون اللوغاريتمى $\rho = ae^{\theta}$, بين أن المساحة التى تضاف بالدورة الـ n $(2 < n)$ تساوى $e^{4\pi}$ مرة من المساحة التى تضاف بالدورة التى قبلها .

١٤ – عين المركز المتوسط للسطوح التالية :

(ا) النصف الأيمن من $\rho = a(1 - \sin\theta)$. ج : $(16a/9\pi, -5a/6)$

(ب) السطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بـ $\rho = 4\sin^2\theta$. ج : $(128/63\pi, 2048/315\pi)$

(جـ) النصف العلوى من $\rho = 2 + \cos\theta$ ج : $(17/18, 80/27\pi)$

(د) السطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بـ $\rho = 1 + \cos\theta$. ج : $\left(\dfrac{16 + 5\pi}{16 + 6\pi}, \dfrac{10}{8 + 3\pi}\right)$

(هـ) السطح الواقع فى الربع الأول فى المسألة ٥ ج : $\left(\dfrac{32 + 15\pi}{48 + 6\pi}, \dfrac{22}{24 + 3\pi}\right)$

١٥ – استخدم نظرية بابوس الأولى لتحصل على الحجم الناتج بدوران :

(ا) $\rho = a(1 - \sin\theta)$ حول المستقيم $\theta = \pi/2$. ج : $8\pi a^3/3$ cu. un.

(ب) $\rho = 2 + \cos\theta$. حول المحور القطبى . ج : $40\pi/3$ cu. un.

الفصل الخامس والأربعون

أطوال الأقواس ومراكزها المتوسطة . مساحات السطوح الدورانية في الاحداثيات القطبية

يعطى طول قوس المنحنى $\rho = f(\theta)$ من $\theta = \theta_1$ إلى $\theta = \theta_2$ بـ

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

أنظر المسائل ١ — ٤

المركز المتوسط لقوس . يحقق الاحداثيين $(\bar{x}, \bar{y})$ للمركز المتوسط لقوس المنحنى $\rho = f(\theta)$ من $\theta = \theta_1$ إلى $\theta = \theta_2$ العلاقتين :

$$\bar{x} \cdot s = \bar{x}\int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cos\theta\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, ds$$

$$\bar{y} \cdot s = \bar{y}\int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin\theta\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, ds$$

أنظر المسألتين ٥ — ٦

مساحة السطح الدوراني الناتج عن دوران قوس المنحنى $\rho = f(\theta)$ من $\theta = \theta_1$ إلى $\theta = \theta_2$ حول :

المحـــور القطبي هي

$$S_x = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, ds = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \sin\theta\, ds$$

والمحور $\theta = \pi/2$ هي

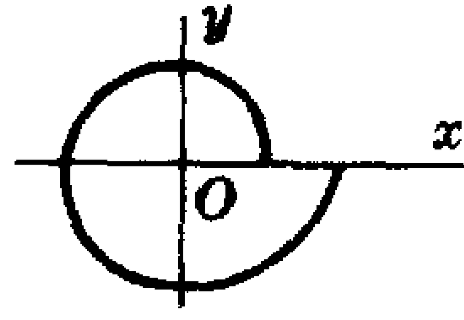
$$S_y = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, ds = 2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho \cos\theta\, ds$$

على أن يؤخذ حدا التكامل قريبين من بعضهما بقدر الإمكان .

أنظر المسائل ٧ — ١٠

مســـائل محـــلولة

١ — احسب طول قوس الحلزون $\rho = e^{2\theta}$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$.



شكل ٤٥ — ١

$$d\rho/d\theta = 2e^{2\theta} \text{ and } \rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = 5e^{4\theta}.$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{5} \int_0^{2\pi} e^{2\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,(e^{4\pi} - 1) \text{ units}$$

٢ — احسب طول منحنى القلب (الكارديوئيد) $\rho = a(1 - \cos\theta)$.

ترسم النقطة منحنى القلب بكامله عندما تتغير θ من 0 إلى 2π

$$\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = a^2(1 - \cos\theta)^2 + (a \sin\theta)^2 = 4a^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}\, d\theta = 2a \int_0^{2\pi} \sin \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 8a \text{ units}$$

شكل ٤٥ — ٢

لم نأخذ فى هذا الحل حدى التكامل قريبين بقدر الإمكان ، وذلك لأن الطول المطلوب يساوى ضعفى الطول عندما تتغير θ من 0 إلى π أنظر المسألة ٣ .

٣ - احسب طول منحنى القلب $\rho = a(1 - \sin\theta)$.

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2(1 - \sin\theta)^2 + (-a\cos\theta)^2 = 2a^2(\sin\tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)^2$$

شكل ٤٥ — ٣

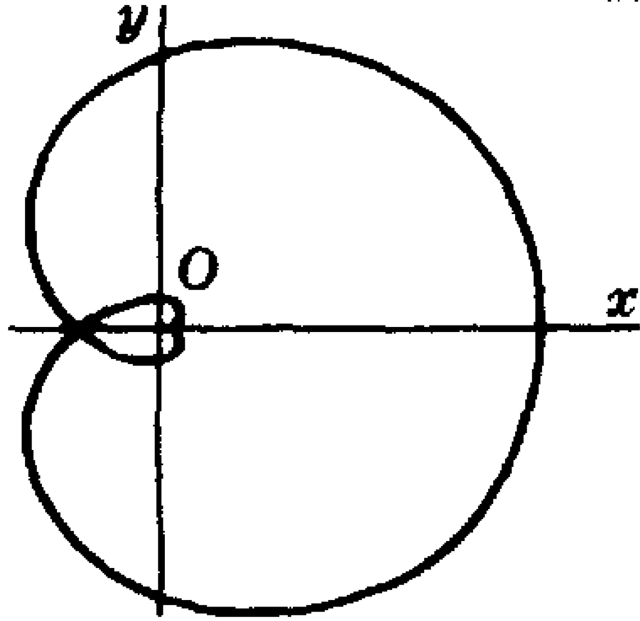
وباتباع طريقة المسألة ٢ نكتب :

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} (\sin\tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\, a(-\cos\tfrac{1}{2}\theta - \sin\tfrac{1}{2}\theta)\Big]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\, a \text{ units}$$

إن منحنى القلب فى المسألتين لا يختلفان عن بعضهما إلا بوضعهما فى المستوى ، لذلك فإن ينبغى أن يكون لهما نفس الطول . وتعليل هذا الاختلاف نجده فى دراسة الدالتين المكاملتين $\sin \frac{1}{2}\theta$ و $\sin \frac{1}{2}\theta - \cos \frac{1}{2}\theta$ فى حين لا تصبح الأولى سالبة أبدا نجد الثانية سالبة عندما تتغير θ من 0 إلى $\frac{1}{2}\pi$ وموجبة فيما عدا ذلك . والطول المطلوب هو ضعفا الطول الذى نحصل عليه عندما تتغير θ من $\pi/2$ إلى $3\pi/2$ لذلك يكون :

$$s = 2\sqrt{2}\, a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\sin\tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)\, d\theta = 4\sqrt{2}\, a(-\cos\tfrac{1}{2}\theta - \sin\tfrac{1}{2}\theta)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 8a \text{ units}$$



شكل ٤٥ — ٤

٤ — احسب طول المنحنى $\rho = a \cos^4 \tfrac{1}{4}\theta$.

إن الطول المطلوب ضعفا الطول الذى نحصل عليه عندما تتغير θ من 0 إلى 2π .

$$d\rho/d\theta = -a\cos^3\tfrac{1}{4}\theta \sin\tfrac{1}{4}\theta \text{ and } \rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = a^2\cos^6\tfrac{1}{4}\theta.$$

$$s = 2 \cdot a \int_0^{2\pi} \cos^3\tfrac{1}{4}\theta\, d\theta = 8a\Big[\sin\tfrac{1}{4}\theta - \tfrac{1}{3}\sin^3\tfrac{1}{4}\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 16a/3 \text{ units}$$

٥ – عين المركز المتوسط لمنحنى القلب $\rho = a(1 - \cos\theta)$. أنظر المسألة ٢ .

إن $0 = \bar{y}$ بسبب التناظر وإن $\bar{x}$ للمنحنى بكامله لا تختلف عن $\bar{x}$ للنصف الأعلى منه ولقد رأينا فى المسألة ٢ أن نصف طول منحنى القلب هو $4a$ لذلك :

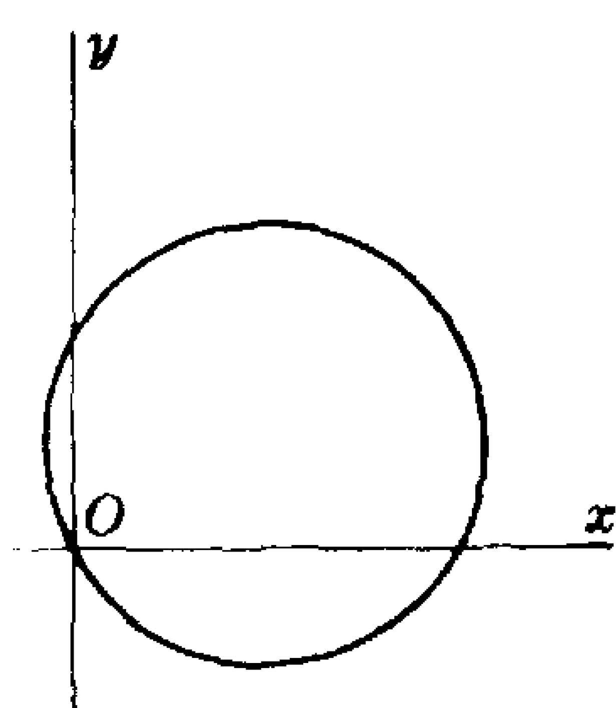
$$4a \cdot \bar{x} = \int_0^\pi \rho\cos\theta\sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}\,d\theta = 2a^2\int_0^\pi (1-\cos\theta)\cos\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^\pi (-2\cos^4\tfrac{1}{2}\theta + 3\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - 1)\sin\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta = 4a^2\Big[\tfrac{4}{5}\cos^5\tfrac{1}{2}\theta - 2\cos^3\tfrac{1}{2}\theta + 2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^\pi$$

$$= -16a^2/5,$$

ومنه $\bar{x} = -4a/5$. واحداثيا المركز المتوسط هما $(-4a/5, 0)$.

٦ – عين المركز المتوسط لقوس الدائرة $\rho = 2\sin\theta + 4\cos\theta$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \frac{1}{2}\pi$



شكل ٤٥ — ٥

أن $d\rho/d\theta = 2\cos\theta - 4\sin\theta$ ، $\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = 20$ ، وبما أن نصف القطر هو $\sqrt{5}$ ، فإن $\sqrt{5}\,\pi = s$

$$\sqrt{5}\pi \cdot \bar{x} = \int_0^{\pi/2} \rho\cos\theta\sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}\,d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} (\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\Big[\tfrac{1}{2}\sin^2\theta + \theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\sqrt{5}(\pi + 1), \text{ and } \bar{x} = \frac{2(\pi+1)}{\pi}.$$

$$\sqrt{5}\pi \cdot \bar{y} = \int_0^{\pi/2} \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}\,d\theta = 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\Big[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta + \sin^2\theta\Big]_0^{\pi/2} = 4\sqrt{5}(\tfrac{1}{4}\pi + 1), \qquad \bar{y} = \frac{\pi + 4}{\pi}.$$

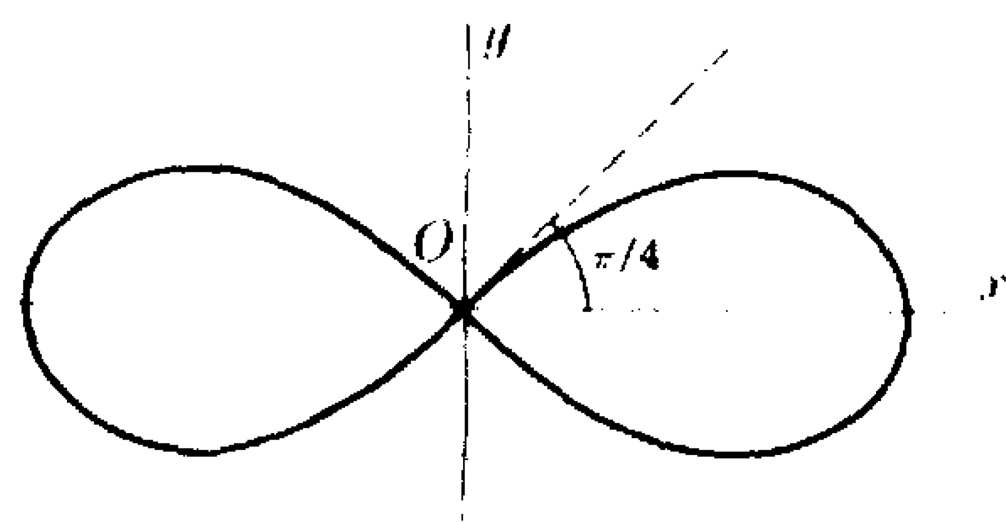
٧ – احسب مساحة السطح الناتج عن دوران النصف العلوى لمنحنى القلب $\rho = a(1 - \cos\theta)$ حول المحور القطبى .

نعلم من المسألة ٢ أن $\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2 = 4a^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta$. ومنه

$$S = 2\pi\int_0^\pi \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2 + (d\rho/d\theta)^2}\,d\theta = 4a^2\pi\int_0^\pi (1-\cos\theta)\sin\theta\sin\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$

$$= 16a^2\pi\int_0^\pi \sin^4\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta = \tfrac{32}{5}\pi a^2 \text{ square units}$$

٨ – احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى ذى العروتين ليمنسكات $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ حول المحور القطبى .



شكل ٤٥ — ٦

إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى المساحة الناتجة عن دوران جزء المنحنى الواقع فى الربع الأول .

$$\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = a^2\cos 2\theta + \left(-\frac{a^2\sin 2\theta}{\rho}\right)^2 = \frac{a^4}{\rho^2}$$

$$S = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} \rho\sin\theta\,\frac{a^2}{\rho}\,d\theta = 4a^2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta$$

$$= 2a^2\pi(2 - \sqrt{2}) \text{ square units}$$

٩ – احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة من المنحنى ذى العروتين $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ حول المحور $\theta = \pi/2$.

إن المساحة المطلوبة تساوى ضعفى المساحة الناتجة عن دوران جزء المنحنى الواقع فى الربع الأول .

$$S = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \rho \cos\theta \frac{a^2}{\rho}\, d\theta = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}\, a^2\pi \text{ square units}$$

١٠ – استخدم نظرية بابوس لتعيين المركز المتوسط لقوس منحنى القلب $\rho = a(1 - \cos\theta)$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$.

لنجعل القوس يدور حول المحور القطبى فيكون $S = 2\pi \bar{y} s$. استنادا إلى المسألتين ٢ و ٧ أن $32a^2\pi/5 = 2\pi\bar{y} \cdot 4a$ وبالتالى $\bar{y} = 4a/5$.

واستنادا إلى المسألة ٥ نرى أن إحداثي المركز المتوسط هما $(-4a/5, 4a/5)$.

مسائل اضافية

١١ – احسب طول كل من :

(ا) $\rho = \theta^2$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\sqrt{3}$. ج: $56/3$ units

(ب) $\rho = e^{\theta/2}$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 8$. ج: $\sqrt{5}\,(e^4 - 1)$ units

(جـ) $\rho \cos^2 \frac{1}{2}\theta$. ج: 4 units

(د) $\rho = \sin^3 \theta/3$. ج: $3\pi/2$ units

(هـ) $\rho = \cos^4 \theta/4$. ج: $16/3$ units

(و) $\rho = a/\theta$ من (ρ_1, θ_1) إلى (ρ_2, θ_2). ج : $\sqrt{a^2 + \rho_1^2} - \sqrt{a^2 + \rho_2^2} + a \ln \dfrac{\rho_1(a + \sqrt{a^2 + \rho_2^2})}{\rho_2(a + \sqrt{a^2 + \rho_1^2})}$ units

(ز) $\rho = 2a \tan\theta \sin\theta$ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi/3$. ج : $2a\sqrt{3}\left\{\dfrac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{3}} + \ln \dfrac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}\right\}$ units

١٢ – عين المركز المتوسط للنصف العلوى من $\rho = 8\cos\theta$. ج: $(4, 8/\pi)$

١٣ – للمنحنى $\rho = a\sin\theta + b\cos\theta$, بين ان $S_x = a\pi s$, $s = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$, و $S_y = b\pi s$.

١٤ – احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى $\rho = 4\cos\theta$ حول المحور القطبي .

ج : 16π sq. un.

١٥ – احسب مساحة السطح الناتج عن دوران كل عقدة من $\rho = \sin^2\theta/3$ حول المحور $\theta = \pi/2$

ج : $\pi/256$ sq. un. : $513\pi/256$ sq. un.

١٦ – احسب مساحة السطح الناتج عن دوران عقدة المنحنى $\rho^2 = \cos 2\theta$ حول المحور $\theta = \pi/2$

ج : $2\sqrt{2}\,\pi$ sq. un.

١٧ – بين أنه إذا دارت كل من عقدتى $\rho = \cos^4 \theta/4$ حول المحور القطبي فإنهما ينتجان سطحين متساويين في المساحـــة .

١٨ – عين المركز المتوسط للسطح الناتج عن دوران العقدة اليمنى للمنحنى $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta.$ حول المحور القطبي .

ج : $\bar{x} = \sqrt{2}a(\sqrt{2}+1)/6$

١٩ – احسب مساحة السطح الناتج عن دوران المنحنى $\rho = \sin^2 \theta/2$ حول المستقيم $\rho = \csc \theta.$

ج : 8π sq. un.

٢٠ – استخرج صيغ هذا الفصل .

الفصل السادس والأربعون

التكاملات المعتلة

يقال عن التـــكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$ إنه تكامل معتل إذا :

(ا) كان للدالة المكاملة $f(x)$ فى الفترة $a \leqq x \leqq b$ نقطة انقطاع واحدة أو أكثر .

(ب) أو كان أحد حدى التكامل على الأقل لا نهائيا .

الدالة المكاملة المنقطعة : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \leqq x < b$ ولكنها منقطعة عند $x = b$ فإننا نعـــرف :

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

بشرط وجود النهاية .

وإذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a < x \leqq b$ ولكنها منقطعة عند $x = a$ فإننا نعرف

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx$$

بشرط وجود النهاية .

وإذا كانت $f(x)$ متصلة لجميع قيم x فى الفترة $a \leqq x \leqq b$ باستثناء $x = c$ حيث $a < c < b$ فإننا نعرف :

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx \;+\; \lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{c+\epsilon'}^{b} f(x)\,dx$$

بشرط وجود النهايتين .

أنظر المسائل ١ – ٦

حدا التكامل اللانهائيان : إذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $a \leqq x \leqq u$ فإننا نعرف :

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{u \to +\infty} \int_a^{u} f(x)\,dx$$

بشرط وجود النهاية

وإذا كانت $f(x)$ متصلة فى الفترة $u' \leqq x \leqq b$ فإننا نعرف :

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{u'\to-\infty}\int_{u'}^{b} f(x)\,dx$$

بشرط وجود النهاية

وإذا كانت $f(x)$ متصلة في الفترة : $u' \leqq x \leqq u$ فإننا نعرف ·

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_{a}^{u} f(x)\,dx + \lim_{u'\to-\infty}\int_{u'}^{a} f(x)\,dx$$

بشرط وجود النهايتين .

أنظر المسائل ٧ — ١٣

مســائل محلولة

١ — احسب قيمة $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. إن الدالة المكاملة منقطعة عنـد $x = 3$. لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{3-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\epsilon\to0^+}\arcsin\frac{x}{3}\Big]_0^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0^+}\arcsin\frac{3-\epsilon}{3} = \arcsin 1 = \frac{1}{2}\pi$$

ومنـه

$$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\pi$$

٢ — بين أنه ليس للتكامل $\int_0^2\frac{dx}{2-x}$ معنى . إن الدالة المكاملة تعانى انقطاعا عند $x = 2$. لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{2-\epsilon}\frac{dx}{2-x} = \lim_{\epsilon\to0^+}\ln\frac{1}{2-x}\Big]_0^{2-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0^+}\left(\ln\frac{1}{\epsilon}-\ln\frac{1}{2}\right)$$

إن النهاية غير موجودة وبالتالى ليس للتكامل معنى .

٣ — بين أنه ليس للتكامل $\int_0^4\frac{dx}{(x-1)^2}$ معنى .

إن الدالة المكاملة تعانى انقطاعا عند النقطة $x = 1$ بين حدى التكامل 4,0 . لذلك نعتبر :

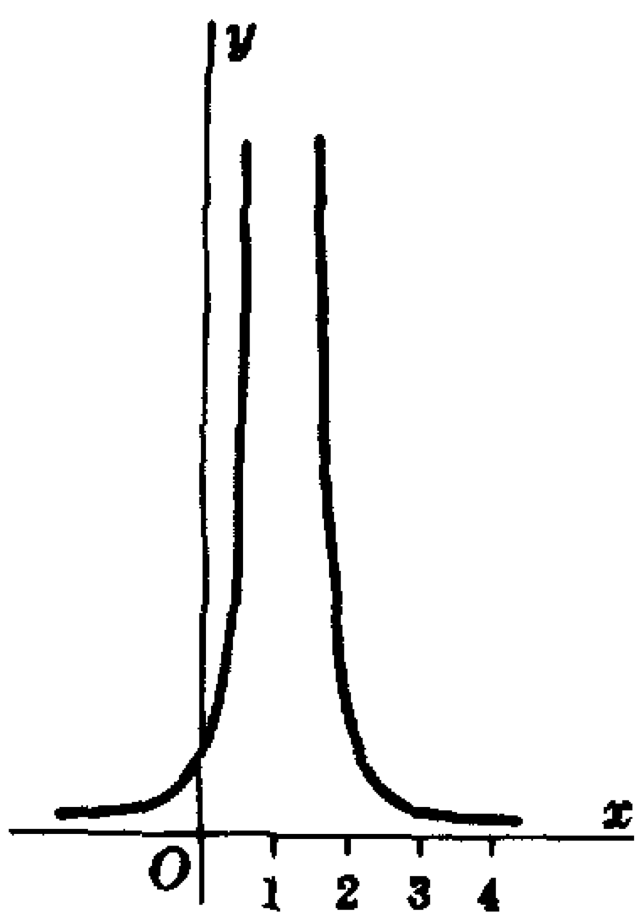
$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon'\to0^+}\int_{1+\epsilon'}^4\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\epsilon\to0^+}\frac{-1}{x-1}\Big]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon'\to0^+}\frac{-1}{x-1}\Big]_{1+\epsilon'}^4 = \lim_{\epsilon\to0^+}\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right) + \lim_{\epsilon'\to0^+}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{\epsilon'}\right)$$

إن النهاية غير موجودة وبالتالى ليس للتكامل معنى .

أما إذا غضضنا النظر عن الانقطاع فإننا نجد $\int_0^4\frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big]_0^4 = -\frac{4}{3}$.

وهذه النتيجة غير معقولة .



شكل ٤٦ — ١

٤ — احسب قيمة $\int_0^4\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ إن الدالة المكاملة تعانى انقطاعا عنـد $x = 1$. لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\epsilon'\to 0^+}\int_{1+\epsilon'}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon'\to 0^+}\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_{1+\epsilon'}^{4}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{3}{2}\left((-\epsilon)^{2/3}-1\right) + \lim_{\epsilon'\to 0^+}\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-\epsilon'^{2/3}) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)$$

وبالتالي فإن $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1).$

٥ — برهن أنه ليس التكامل $\int_0^{\pi/2}\sec x\,dx$ معنى . إن الدالة المكاملة تعانى انقطاعا عند $x = \frac{1}{2}\pi$.

لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\epsilon}\sec x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\ln(\sec x+\tan x)\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\ln\{\sec(\tfrac{1}{2}\pi-\epsilon)+\tan(\tfrac{1}{2}\pi-\epsilon)\}$$

وأن النهاية غير موجودة وبالتالى ليس التكامل معنى .

٦ — احسب قيمة $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx.$ إن الدالة المكاملة تعانى انقطاعا عند $x = \frac{1}{2}\pi$ لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{\frac{1}{2}\pi-\epsilon}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}-2(1-\sin x)^{1/2}\Big]_0^{\frac{1}{2}\pi-\epsilon} = 2\lim_{\epsilon\to 0^+}\{-[1-\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\epsilon)]+1\}$$

$$= 2(0+1) = 2.$$

وبالتالى فإن $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}\,dx = 2.$

٧ — احسب قيمة $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}.$ إن الحد الأعلى التكامل لا نهائى . لذلك نعتبر :

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^{u}\frac{dx}{x^2+4} = \lim_{u\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x\Big]_0^{u} = \frac{1}{4}\pi.$$

وبالتالى $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4}\pi.$

٨ — احسب قيمة $\int_{-\infty}^{0}e^{2x}\,dx.$ إن الحد الأدنى التكامل لا نهائى لذلك نعتبر ،

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^0 e^{2x}\,dx = \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_u^0 = \frac{1}{2}(1) - \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2u} = \frac{1}{2}-0.$$

، بالتالى فإن $\int_{-\infty}^{0}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}.$

٩ — بين أنه ليس التكامل $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ معنى . إن الحد الأعلى التكامل نهائى لذلك نعتبر .

$$\lim_{u\to+\infty}\int_1^{u}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to+\infty}2\sqrt{x}\Big]_1^{u} = \lim_{u\to+\infty}(2\sqrt{u}-2).$$

والنهاية غير موجودة .

١٠ — احسب قيمة $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$. إن حدى التكامل لا نهائيان . لذلك نعتبر :

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^{u}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} + \lim_{u'\to-\infty}\int_{u'}^{0}\frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \lim_{u\to+\infty}\arctan e^x\Big]_0^{u} + \lim_{u'\to-\infty}\arctan e^x\Big]_{u'}^{0}$$

$$= \lim_{u\to+\infty}(\arctan e^u - \tfrac{1}{4}\pi) + \lim_{u'\to-\infty}(\tfrac{1}{4}\pi - \arctan e^{u'})$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi - 0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

١١— احسب قيمة $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$. إن الحد الأعلى للتكامل لانهائي . لذلك نعتبر :

$$\lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-x}\sin x\,dx = \lim_{u\to+\infty} -\tfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)\Big]_0^u = \lim_{u\to+\infty}\{-\tfrac{1}{2}e^{-u}(\sin u+\cos u)\} + \tfrac{1}{2}$$

عندما $u\to\infty$ نجد أن $e^{-u}\to 0$ في حين يتغير كل من $\sin u$ و $\cos u$ من 1 الى -1 .

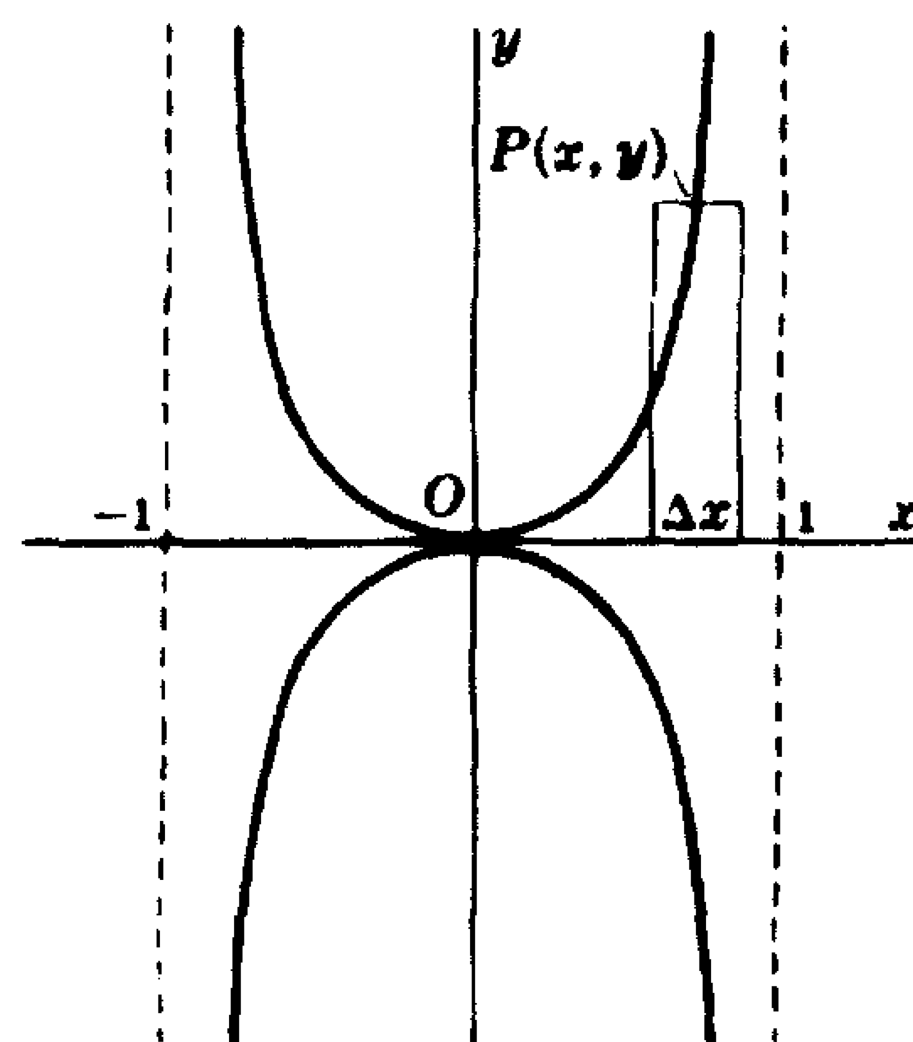
لذلك فإن $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx = \tfrac{1}{2}$.

١٢— احسب المساحة المحصورة بين المنحنى $y^2 = \dfrac{x^4}{1-x^2}$ وخطية المقاربين . أنظر الشكل ٤٦ — ٢ :

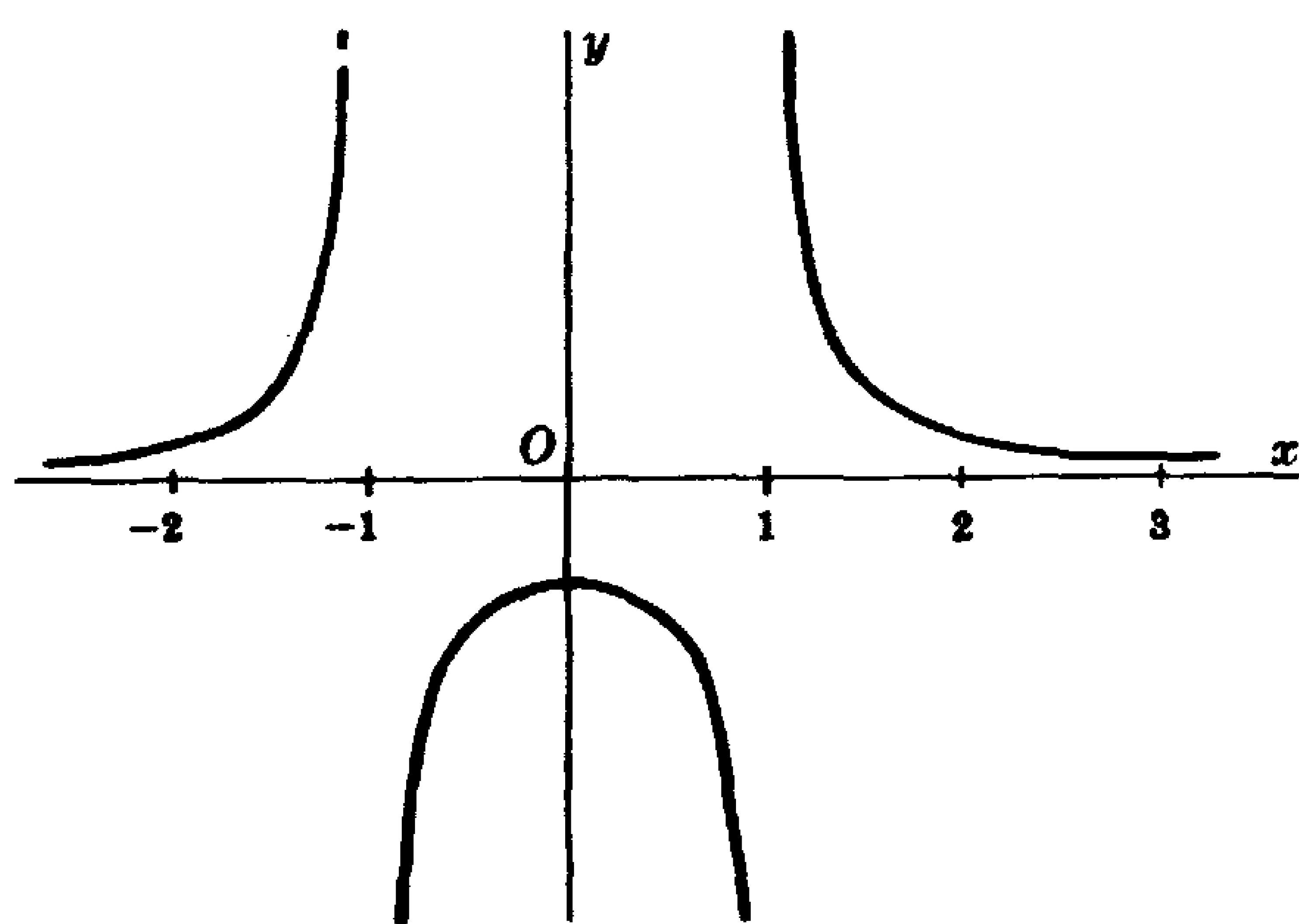
إن $A = 4\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ، ولكن الدالة المكاملة تعاني انقطاعا عند $x = 1$. لذلك نعتبر :

$$\lim_{\epsilon\to0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to0^+} -(1-x^2)^{1/2}\Big]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0^+}(1-\sqrt{2\epsilon-\epsilon^2}) = 1$$

والمساحة المطلوبة تساوي $4(1)=4$ sq. un. .



شكل ٤٦ — ٢



شكل ٤٦ — ٣

١٣— احسب المساحة الواقعة على يمين $x = 3$ بين المنحنى $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ والمحور x .

$$A = \int_3^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \lim_{u\to+\infty}\int_3^u\frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}\Big]_3^u$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty}\ln\frac{u-1}{u+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty}\ln\frac{1-1/u}{1+1/u} + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)\ \text{sq. un.}$$

مسائل اضافية

١ — بين أن :

(أ) $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

(ب) $\int_0^4 \dfrac{dx}{4-x}$ ليس له معنى

(جـ) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$

(د) $\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{3/2}}$ ليس له معنى .

(هـ) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \pi$

(و) $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{x^{1/3}} = 9/2$

(ز) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt[3]{2}$

(ح) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$ ليس له معنى .

(ط) $\int_0^1 \ln x \, dx = -1$

(ى) $\int_0^1 x \ln x \, dx = -1/4$

١٥– احسب المساحة الواقعة بين المنحنى المفروض وخطوطه المقاربة :

(ا) $y^2 = \frac{x^4}{4-x^2}$ ، (ب) $y^2 = \frac{4-x}{x}$ ، (جـ) $y^2 = \frac{1}{x(1-x)}$

ج : (ا) 4π sq. un. (ب) 4π sq. un. (جـ) 2π sq. un. .

١٦– بين أن :

(ا) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

(ب) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4}$

(جـ) $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

(د) $\int_{-\infty}^{4} \frac{dx}{(4-x)^2}$ ليس له معنى .

(هـ) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$

(و) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2/e$

(ز) $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx = 0$

(ح) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \pi/2$

(ط) $\int_{-\infty}^{0} xe^{x} dx = -1$

(ى) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx = 6$

١٧– احسب المساحة الواقعة بين المنحنى المفروض وخطه المقارب :

(ا) $y = \frac{8}{x^2+4}$ ، (ب) $y = \frac{x}{(4+x^2)^2}$ ، (جـ) $y = xe^{-x^2/2}$

ج : (ا) 4π sq. un. (ب) ¼sq. un. (جـ) 2 sq. un.

١٨– احسب المساحة الواقعة :

(ا) تحت $y = \frac{1}{x^2-4}$ وإلى اليمين من $x = 3$. ج : ¼ ln 5 sq. un. .

(ب) تحت $y = \frac{1}{x(x-1)^2}$ وإلى اليمين من $x = 2$. ج : 1 — ln 2 sq. un. .

١٩ – بين أنه لا معنى لـ :

(١) المساحة الواقعة تحت $y = \frac{1}{4-x^2}$ من $x=2$ إلى $x = -2$.

(ب) المساحة الواقعة تحت $xy = 9$ وإلى اليمين من $x = 1$.

٢٠ بين أن المساحة الواقعة تحت المنحنى $y=e^{-2x}$ فى الربع الأول تساوى $\frac{1}{2}$ sq. un. ، وأن الحجم الناتج عن دوران هذه القطعة حول المحور x يساوى $\frac{1}{4}\pi$ cubic units

٢١ – بين أن الحجم الناتج عن دوران السطح المستوى الواقع تحت المنحنى $xy = 9$ وإلى اليمين من $x = 1$ حول المحور x تساوى 81π cu. un. فى حين أن مساحة السطح الناتج لا نهائية .

٢٢– احسب طول كل من الأقواس التالية :

(١) $9y^2 = x(3-x)^2$، العقدة . (ب) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$، المنحنى بأكله . (ﺟ) $9y^2 = x^2(2x+3)$، العقدة .

ج : (١) $4\sqrt{3}$ units . (ب) $6a$ units . (ﺟ) $2\sqrt{3}$ units .

٢٣– احسب عزم القصور الذاتى لدائرة نصف قطرها r بالنسبة إلى أحد مماساتها . ج : $3r^2s/2$.

٢٤ - بين أن التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ متباعد لجميع قيم p .

٢٥– (١) بين أن $\int_a^b \frac{N\,dx}{(x-b)^p}$ موجود عندما $p < 1$ وليس له معنى عندما $p \geq 1$.

(ب) بين أن $\int_a^{+\infty} \frac{N\,dx}{x^p}$ موجود عندما $p > 1$ و ليس له معنى عندما $p \leq 1$.

٢٦ – بفرض أن الدالتين $f(x) \leq g(x)$ معرفتان وليستا سالبتين فى كل موضع فى الفترة $a \leq x \leq b$ بينما $\lim_{x \to b^-} g(x) = +\infty$ ومن الشكل ٤٦ –٤ يبدو من المعقول أن نفرض :

(١) إذا كان $\int_a^b g(x)\,dx$ موجودا فإن $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود .

(٢) إذا كان $\int_a^b f(x)\,dx.$ غير موجود فإن $\int_a^b g(x)\,dx.$ غير موجود كذلك .

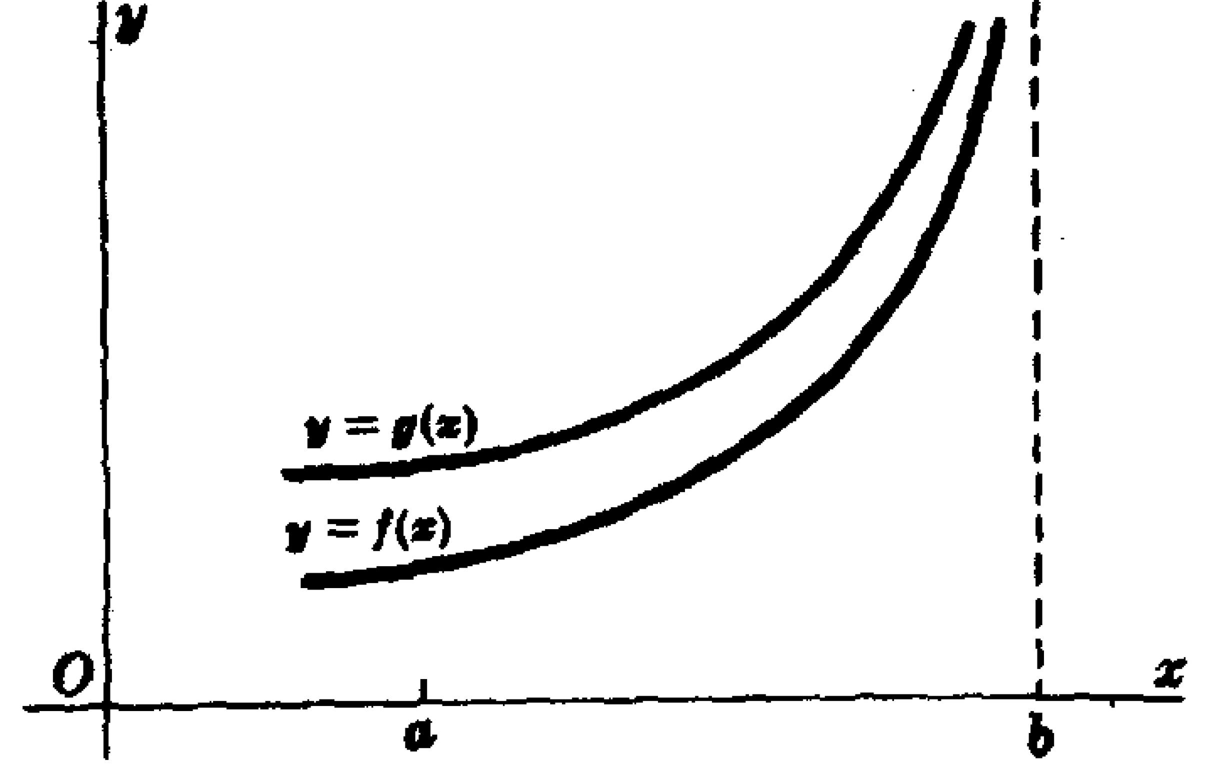
بين فيما إذا كان كل تكامل مما يلى موجود أم غير موجود .

(١) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$. فى الفترة : $0 \leq x < 1$ إن $1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2) < 4(1-x)$ ، $\frac{1}{1-x^4} > \frac{\frac{1}{4}}{-x}$

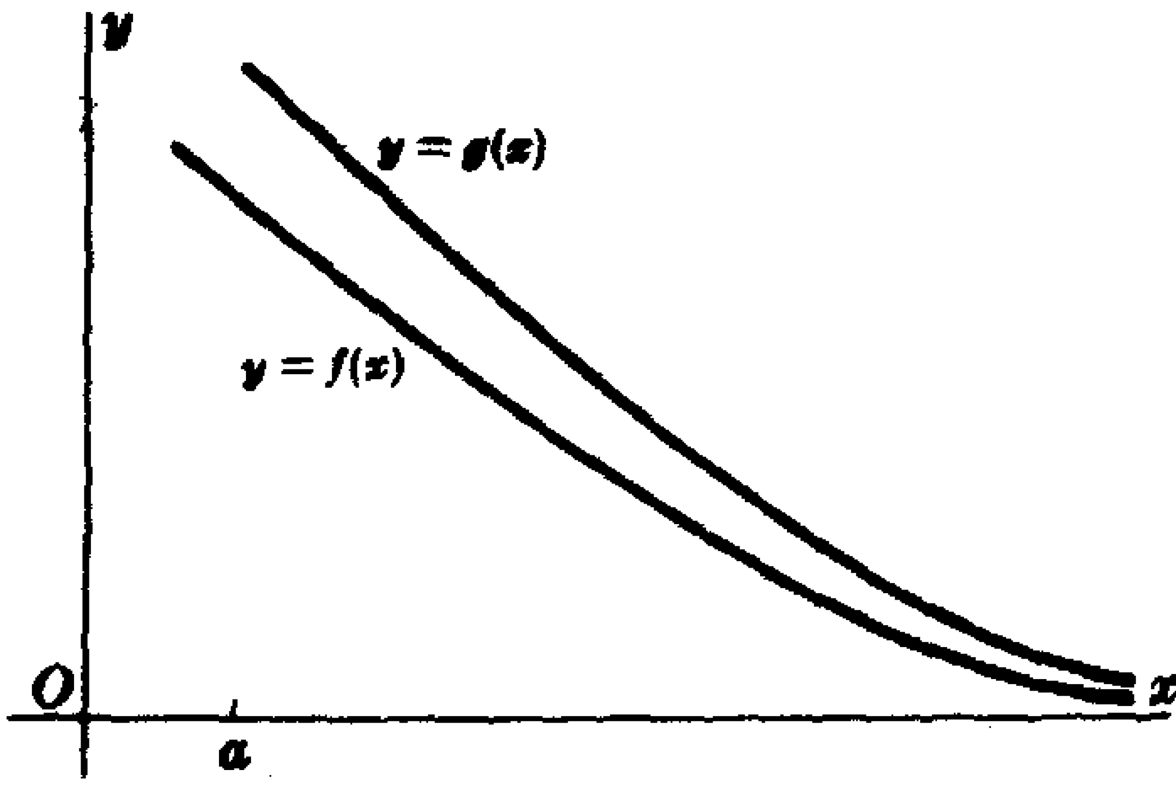
و بما أن التكامل $\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ غير موجود فإن التكامل المفروض غير موجود .

(ب) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$. فى الفترة : $0 < x \leq 1$ إن $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. و بما إن التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ موجود فإن التكامل المفروض موجود كذلك .

(جـ) $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{x^{1/3}}$ موجود (د) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\,dx$ غير موجود (هـ) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ موجود .



شكل ٤٦ — ٤



شكل ٤٦ — ٥

٢٧ — بفرض الدالتين $f(x) \le g(x)$ معرفتين وليستـا سالبتين فى كل موضـع فى الفترة $x \ge a$ بينما $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$ ويبدو من الشكل ٤٦ — ٥ أنه من المعقول أن نقبل أنه :

(٣) إذا كان $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ موجودا فإن $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ موجود .

(٤) إذا كان $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$ غير موجود فإن $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$ غير موجود كذلك .

بين فيما إذا كان كل تكامل مما يلى موجوداً أو غير موجود .

(١) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x+6}}$. فى الفترة $x \ge 1$ أن $\frac{1}{\sqrt{x^4+2x+6}} < \frac{1}{x^2}$. وبما أن $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ موجود فكذلك التكامل المفروض .

(ب) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+2x}}$ موجود (جـ) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ موجود (د) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$ موجود .

الفصل السابع والأربعون

المتواليات والمتسلسلات غير المنتهية
(اللانهائية)

المتوالية غير المنتهية : $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ هي دالة فى n حيز تعريفها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة – (انظر الفصل الأول) .

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها محدودة إذا وجد عددان Q, P بحيث يكون $P \leq s_n \leq Q$ لجميع قيم n . فالمتوالية $3/2, 5/4, 7/6, \ldots, \dfrac{2n+1}{2n}, \ldots$ مثلا محدودة لأنه مهما كانت n فإن $1 \leq s_n \leq 2$. أما المتوالية $2, 4, 6, \ldots, 2n, \cdots$ فليست محدودة .

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها غير متناقصة إذا كان $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots,$ وإنها غير متزايدة إذا كان $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots \geq s_n \geq \cdots$. فالمتواليتان $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\} = 1/2, 4/3, 9/4, 16/5, \ldots$ و $\{2n - (-1)^n\} = 3, 3, 7, 7, \ldots$ مثلا غير متناقصتين ، بينما المتواليتان $\{1/n\} = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ و $\{-n\} = -1, -2, -3, -4, \ldots$ غير متزايدتين .

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها متقاربة إلى عدد منته s كنهاية لها ، $\left[\lim_{n \to +\infty} s_n = s\right]$, إذا وجد لكل عدد موجب ϵ مهما كان صغيرا عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|s - s_n| < \epsilon$. نقول عن المتوالية التى لها نهاية إنها متوالية متقاربة وإذا لم يكن لها نهاية فهى « متوالية متباعدة » .

انظر المسألتين ١ – ٢

نقول عن متوالية $\{s_n\}$ إنها متباعدة إلى ∞ ، $\left[\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty\right]$, إذا وجد ، لكل عدد موجب M مهما كان كبيرا ، عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|s_n| > M$. وإذا كان $s_n > M$ فإن $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty;$ وإذا كان $s_n < -M,$ فإن $\lim_{n \to +\infty} s_n = -\infty.$

نظريات على المتواليات : إن برهان النظرية الأساسية لا يدخل فى إطار هذا الكتاب .

I — كل متوالية محدودة غير متناقصة (غير متزايدة) متقاربة .

II — كل متوالية غير محدودة متباعدة . للبرهان انظر المسألة ٣

إن عددا من النظريات المتبقية ليس إلا إعادة لتلك التى مرت فى الفصل الثانى .

III — إذا كانت المتوالية متقاربة (متباعدة) فإنها تبقى متقاربة (متباعدة) إذا غيرنا بعض أو جميع حدودها الأول n .

IV — إن نهاية المتوالية المتقاربة وحيدة . للبرهان انظر المسألة ٤

إذا كان $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ وكان $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$: فإن :

V — $\lim_{n\to+\infty} (k\cdot s_n) = k \lim_{n\to+\infty} s_n = ks,$ حيث k ثابت .

VI — $\lim_{n\to+\infty} (s_n \pm t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n \pm \lim_{n\to+\infty} t_n = s \pm t.$

VII — $\lim_{n\to+\infty} (s_n\cdot t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n\cdot \lim_{n\to+\infty} t_n = s\cdot t.$

VIII — $\lim_{n\to+\infty} (s_n/t_n) = \lim_{n\to+\infty} s_n \Big/ \lim_{n\to+\infty} t_n = s/t,$ بشرط أن $t \neq 0$ وإن $t_n \neq 0$ مهما كانت n .

IX — إذا كانت $\{s_n\}$ متوالية حدودها غير صفرية وكان $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty,$ فإن $\lim_{n\to+\infty} 1/s_n = 0.$ للبرهان انظر المسألة ٥

X — إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty.$ للبرهان انظر المسألة ٦

XI — إذا كان $|r| < 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0.$

يسمى المجموع المشار اليه :

$$\sum s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \quad (١)$$

لمتوالية غير منتهية $\{s_n\}$ متسلسلة غير منتهية . يرافق كل متسلسله متوالية مجاميع جزئية

$$S_1 = s_1, S_2 = s_1 + s_2, S_3 = s_1 + s_2 + s_3, S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n, \cdots$$

فإذا كان $\lim_{n\to+\infty} S_n = S,$ حيث S عدد محدد ، فإننا نقول عن المتسلسلة (١) إنها متقاربة ونقول عن S إنه مجموعها . أما إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} S_n$ غير موجودة فإننا نقول عن المتسلسلة (١) إنها متباعدة . فالمتسلسلة تكون متباعدة إذا كان $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$ أو إذا كان S_n متزايدا ومتناقصا ، عندما تزداد n دون أن يقترب من نهاية معينة . ويذكر كمثال على النوع الأخير المتسلسلة المتذبذبة $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ فهنا $S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1, S_4 = 0, \ldots$ انظر المسألتين ٧ – ٨

ينتج من النظريات السابقة ما يلي :

XII — إذا كانت المتسلسلة متقاربة (متباعدة) فإنها تبقى متقاربة (متباعدة) إذا غيرنا بعض أو جميع حدودها الـ n الأول . انظر المسألة ٩

XIII — إن مجموع المتسلسة المتقاربة وحيد .

XIV — إذا كانت Σs_n متقاربة إلى S فإن Σks_n حيث k ثابت ، متقاربة إلى kS . وإذا كانت Σs_n متباعدة فإن Σks_n متباعدة كذلك .

XV — إذا كانت Σs_n متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$ للبرهان انظر المسألة ١٠

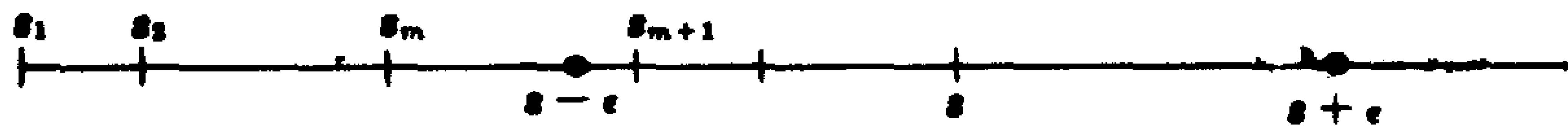
وإن العكس ليس صحيحا ، فى المتسلسلة التوافقية (المسألة ٧ (ج)) $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0.$ ولكن المتسلسلة متباعدة .

XVI — إذا كان $\lim_{n \to +\infty} s_n \neq 0,$ فإن Σs_n متباعدة .

والعكس ليس صحيحا (انظر المسألة ٧ (جـ)) . انظر المسألة ١١

مسـائل محلولة

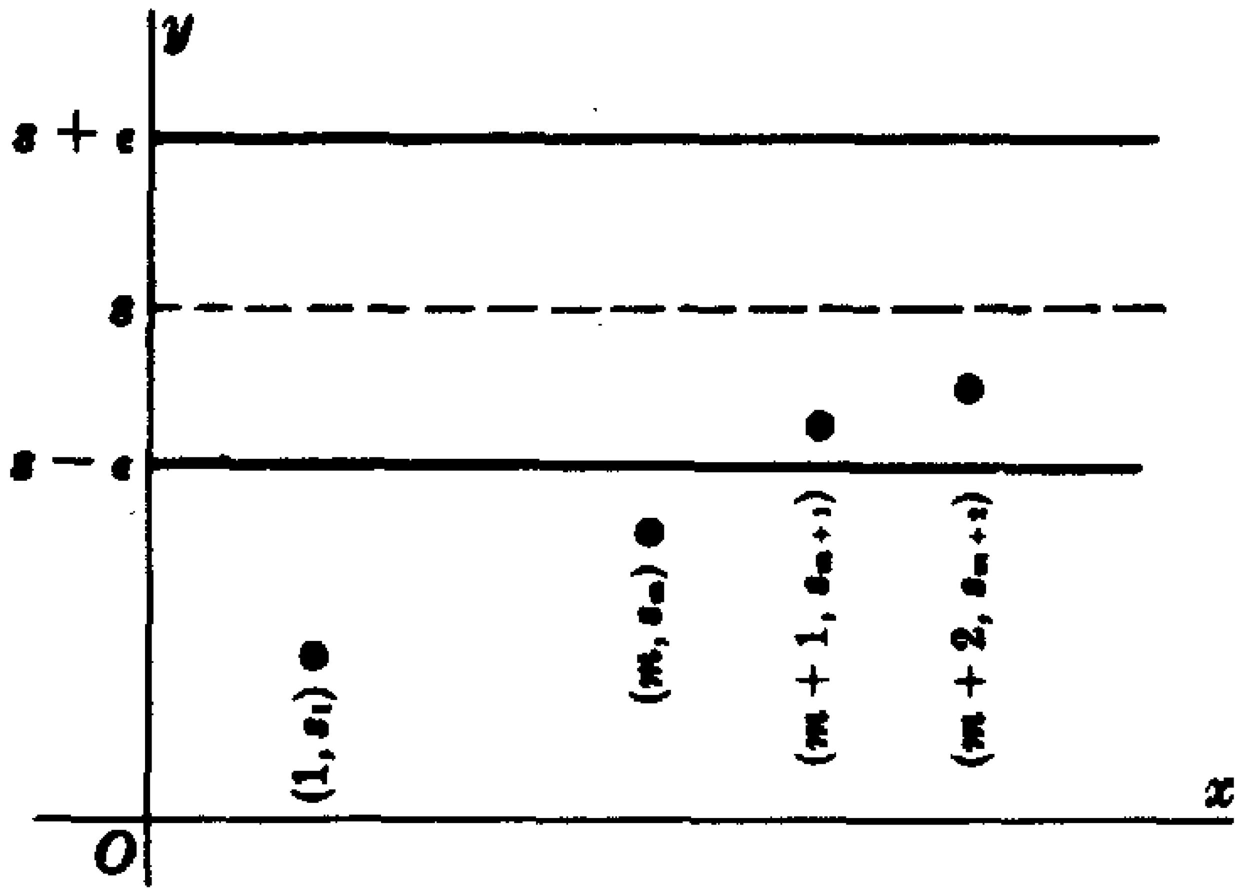
١ — لتكن لدينا المتوالية $\{s_n\}$ المتقاربة إلى s . لنحدد على المستقيم العددى (شكل ٤٧ — ١) النقط $s, s-\epsilon, s+\epsilon,$ حيث ϵ أى عدد موجب صغير . لنحدد الآن مواضع النقط $s_1, s_2, s_3, \ldots$ على الترتيب . إن تعريف التقارب يؤكد لنا أنه بينما تقع النقط m الأول خارج الجوار ϵ لـ s فإن النقطة s_{m+1} و جميع النقط التى تليها تقع داخل هذا الجوار .



شكل ٤٧ — ١

ونجد فى الشكل ٤٧ — ٢ مجموعة محاور إحداثية قائمة عادية . لنرسم أولا المستقيمات $y = s, \ y = s-\epsilon,$ و $y = s+\epsilon,$ معينين بذلك منطقة (مظللة) عرضها 2ϵ . لنحدد بعد ذلك النقط $(1, s_1), (2, s_2), (3, s_3), \ldots$ فنجد كما سبق أن النقطة $(m+1, s_{m+1})$ و جميع النقط التى تليها واقعة ضمن المنطقة .

إنه من المهم جدا أن نلاحظ أن عددا محددا فقط ، من نقط متوالية متقاربة يمكن أن يقع خارج المجال ϵ أو خارج الفترة ϵ .



شكل ٤٧ — ٢

٢ — برهن باستخدام النظرية I ، أن المتواليتين (ا) $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n)}\right\}$ متقاربتان .

(ا) أن المتوالية محدودة لأن $0 \leq s_n \leq 1,$ مهما كانت n .

وبما أن ، $s_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = s_n + \frac{1}{n(n+1)},$ فإن $s_{n+1} \geq s_n$. والمتوالية ليست متناقصة . وهكذا نجد أن المتوالية متقاربة إلى $s \leq 1$.

(ب) أن المتوالية محدودة لأن $0 \leq s_n \leq 1,$ مهما كانت n .

وبما أن $s_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)} = \frac{2n+1}{2n+2} s_n,$ فالمتوالية ليست متزايدة وهكذا نجد أن المتوالية متقاربة إلى $s \geq 0$.

٣ — برهن أن كل متوالية غير محدودة $\{s_n\}$ متباعدة .

لنفرض جدلا أن $\{s_n\}$ متقاربة فيوجد عندئذ ، لكل عدد موجب ϵ مهما كان صغيرا ، عدد صحيح موجب m بحيث $n>m$ إذن $|s_n - s| < \epsilon$. وبما أن جميع حدود المتوالية ، بغض النظر عن عدد محدود منها ، تقع داخل هذه الفترة فإنه ينبغى أن تكون المتوالية محدودة ، وهذا يناقض الفرض إذا فالمتوالية متباعدة .

٤ – برهن أن نهاية المتوالية المتقاربة وحيدة .

لنفرض العكس أن $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$ وأن $\lim_{n\to+\infty} s_n = t$, حيث $|s-t| > 2\epsilon > 0$. عندئذ يكون الجوار ϵ لـ t والجوار ϵ لـ s خواص متناقضة : (i) ليس بينهما أي نقطة مشتركة (ii) يحتوى كل منهما على جميع حدود المتتالية باستثناء عدد محدود من هذه الحدود . إذن $s = t$ والنهاية وحيدة .

٥ – برهن أنه إذا كانت $\{s_n\}$ متوالية من الحدود اللاصفرية . وكان $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} 1/s_n = 0$.

ليكن $\epsilon > 0$ وبما أن $\lim_{n\to+\infty} s_n = \infty$ ينتج أنه يوجد لكل عدد $M > 1/\epsilon$ ، عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|s_n| > M > 1/\epsilon$. ولهذا العدد m يكون $|1/s_n| < 1/M < \epsilon$ عندما $n > m$ وبالتالى فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} 1/s_n = 0.$$

٦ – برهن أنه إذا كان $a > 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

ليكن $M > 0$ ولنفرض $a = 1 + b$ حيث $b > 0$ فيكون عندئذ :

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}b^2 + \cdots > 1 + nb > M$$

عندما يكون $n > M/b$. وهكذا فإن m أكبر عدد صحيح فى M/b .

٧ – برهن أن :

(ا) المتسلسلة الحسابية غير المنتهية $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + [a + (n-1)d] + \cdots$ تتباعد عندما $a^2 + d^2 > 0$

(ب) المتسلسلة الهندسية غير المنتهية $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$, حيث $a \neq 0$ متقاربة إلى $\frac{a}{1-r}$ عندما $|r| < 1$ ومتباعدة عندما $|r| \geq 1$.

(جـ) المتسلسلة التوافقية $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n + \cdots$ متباعدة .

(ا) أن $S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$ ما لم يكن $a = d = 0$.

إذن المتسلسلة متباعدة عندما $a^2 + d^2 > 0$.

(ب) هنا يكون : $S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n,\ r \neq 1.$

فإذا كان $\lim_{n\to+\infty} r^n = 0,$ فإنه يكون $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$

وإذا كان $|r| > 1$ فإن $\lim_{n\to+\infty} r^n = \infty,$ والمتوالية S_n متباعدة . وفى الحالة $|r| = 1$ تكون المتسلسلة على الشكل $a + a + a + \cdots$ أو على الشكل $a - a + a - a + \cdots$ وهما متباعدتان .

(جـ) عندما نشكل المجاميع الجزئية نلاحظ أن :

$$S_4 > 2,\ S_8 > 2.5,\ S_{16} > 3,\ S_{32} > 3.5,\ S_{64} > 4,\ \ldots$$

فتوالية المجاميع الجزئية غير محدودة ومتباعدة والمتسلسلة متباعدة .

٨ – (١) احسب مجموع المتسلسلة : $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots$

أن $S_1=\frac{1}{5}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}\right),\ S_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^2}\right),\ S_3=\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^3}\right),\ \ldots,$

ومنه $S=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{1}{4}$ و $S_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)$

(ب) احسب مجموع المتسلسلة : $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots$

أن $S_1=\frac{1}{1\cdot2}=1-\frac{1}{2},\quad S_2=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3},$

$$S_3=S_2+\frac{1}{3\cdot4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4},\quad\ldots,\quad S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

ومنه $S=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$

٩ – المتسلسلة $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ متقاربة إلى 2 . ادرس المتسلسلة التى تنتج عندما (١) نحذف حدودها الأربعة الأولى (ب) نضيف لها الحدود $8+4+2$.

(١) إن المتسلسلة $\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$ هندسية لا نهائية بـ $r=\frac{1}{2}$ وهى تتقارب إلى :

$$S=2-(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8})=\tfrac{1}{8}$$

(ب) إن المتسلسلة $8+4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ هندسية لا نهائية بـ $r=\frac{1}{2}$ وهى تتقارب إلى :

$$2+(8+4+2)=16$$

١٠ – برهن أنه إذا كان $\Sigma s_n=S$ فإن $\lim_{n\to+\infty}s_n=0$.

بما أن $\Sigma s_n=S,$ فإن $\lim_{n\to+\infty}S_n=S$ و $\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S.$ حيث أن $s_n=S_n-S_{n-1};$ فإنه ينتج :

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}S_n-\lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

١١ – بين أن المتسلسلتين (١) $1/3+2/5+3/7+4/9+\cdots$ (ب) $1/2+3/4+7/8+15/16+\cdots$ متباعدتان .

(١) $s_n=\frac{n}{2n+1}$ و $\lim_{n\to+\infty}s_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2+1/n}=\frac{1}{2}\neq0.$

(ب) $s_n=\frac{2^n-1}{2^n}$ و $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1\neq0.$

١٢ – تتقارب المتسلسلة Σs_n إلى S إذا كانت متوالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة إلى S . أى أنه يوجد لكل $\epsilon>0$ مهما كان صغيرا ، عددا صحيحا m بحيث إذا كان $n>m$ فإن $|S-S_n|<\epsilon$. بين أن متسلسلتى المسألة (٨) متقاربتان وذلك عن طريق إيجاد عدد m لكل ϵ مفروض .

(١) إذا كان $|S-S_n|=\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\right|=\frac{1}{4\cdot5^n}<\epsilon,$ فإن $5^n>\frac{1}{4\epsilon},\ n\ln5>-\ln(4\epsilon),$

ومنه $n>-\frac{\ln4\epsilon}{\ln5}$. وهكذا فإن m أكبر عدد صحيح فى $-\frac{\ln4\epsilon}{\ln5}$

(ب) إذا كان $|S-S_n|=\left|1-\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right|=\frac{1}{n+1}<\epsilon,$ فإن $n+1>\frac{1}{\epsilon}$ ومنه $n>\frac{1}{\epsilon}-1.$

وهكذا فإن m أكبر عدد صحيح فى $1/\epsilon-1$.

مســـائل اضـــافية

١٣ – بين فيما إذا كانت كل متوالية مما يلي محدودة أو غير محدودة ، غــير متزايدة أو غير متناقصة ، متقاربة أو متباعدة أو فيما إذا كانت متذبذبة .

(ا) $\left\{n + \frac{2}{n}\right\}$ (ب) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ (جـ) $\{\sin \frac{1}{4}n\pi\}$ (ﻫ) $\{\sqrt[3]{n^2}\}$ (ﻫ) $\left\{\frac{n!}{10^n}\right\}$ (و) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$

١٤ – برهن أن $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1/n^p} = 1,$ عندما يكون $p > 0$ إرشاد : أن $n^{p/n} = e^{(p \ln n)/n}$

١٥ – المتوالية $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ ، تحقق من أن (ا) الجوار $|1 - s_n| < 0.01$ يحوى جميع حدود المتوالية باستثناء الحدود التسعة والتسعين الأولى . (ب) المتوالية محدودة . (جـ) $\lim_{n \to +\infty} s_n = 1.$

١٦ – برهن أنه إذا كان $|r| < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} r^n = 0.$

١٧ – ادرس تقارب كل من المتسلسلات الهندسية التالية وأوجد مجموع كل متسلسلة متقاربة منها .

(ا) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ (ب) $4 - 1 + 1/4 - 1/16 + \cdots$ (جـ) $1 + 3/2 + 9/4 + 27/8 + \cdots$

ج : (ا) $S = 2$ ، (ب) $S = 16/5$ ، (جـ) متباعدة .

١٨ – احسب مجموع كل من المتسلسلات التالية :

(ا) $\sum 3^{-n}$ (د) $\sum \frac{1}{n(n+2)}$ (ز) $\sum \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

(ب) $\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (ﻫ) $\sum \frac{1}{n(n+3)}$ (جـ) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(جـ) $\sum \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p}\right), \ p > 0$ (و) $\sum \frac{n}{(n+1)!}$

ج : (ا) ½ ، (ب) ½ ، (جـ) 1 ، (د) 3/4 ، (ﻫ) 11/18 ، (و) 1 (ز) 1/4 (ح) 1/4.

١٩ – برهن أن جميع المتسلسلات التالية متباعدة :

(ا) $3 + 5/2 + 7/3 + 9/4 + \cdots$ (جـ) $e + e^2/8 + e^3/27 + e^4/64 + \cdots$

(ب) $2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \cdots$ (د) $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

٢٠ – برهن أنه إذا كان $\lim_{n \to +\infty} s_n \neq 0,$ فإن $\sum s_n$ متباعدة .

٢١ – برهن أن متسلسلات المسألة ١٨ (ا) – (د) متقاربة وذلك عن طريق إيجاد عدد صحيح m لكل $\epsilon > 0$ بحيث يكون $|S - S_n| < \epsilon$ لكل $n > m$.

ج : m أكبر عدد صحيح فى (ا) $-\frac{\ln 2\epsilon}{\ln 3}$ (ب) $\frac{1}{4\epsilon} - ½$. (جـ) $\sqrt[p]{1/\epsilon} - 1$.

(د) الجذر الموجب لـ $2\epsilon m^2 - 2(1 - 3\epsilon)m - (3 - 4\epsilon) = 0.$

الفصل الثامن والأربعون

اختبارات التقارب والتباعد للمتسلسلات الموجبة

المتسلسلات ذات الحدود الموجبة : نقول عن المتسلسلات Σs_n التي جميع حدودها موجبة، إنها متسلسلة موجبة .

I – تكون المتسلسلات الموجبة Σs_n متقاربة إذا كانت متوالية المجاميع الجزئية $\{ S_n \}$ محدودة .

تنتج هذه النظرية من كون متوالية المجاميع الجزئية لمتسلسلة موجبة ليست متناقصة أبداً .

II – **اختبار التكامل** . ليكن $f(n)$ الحد العام s_n المتسلسلة Σs_n ذات الحدود الموجبة .

إذا كانت $0 < (x)\ f$ دالة موجبة و لا تتزايد أبدا فى الفترة $\xi < x$ حيث ξ عدد صحيح موجب . ، فإن المتسلسلة Σs_n تكون متقاربة أو متباعدة تبعا لوجود $\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx$ أو عدم وجوده .

انظر المسائل ١ – ٥

III – **اختبار المقارنة للتقارب** . تكون المتسلسلة الموجبة Σs_n متقاربة إذا كان كل حد من حدودها (ربما بعد عدد محدد من الحدود) أصغر أو يساوى الحد المقابل من متوالية موجبة متقاربة معلومة Σc_n .

IV – **اختبار المقارنة للتباعد** . تكون المتسلسلة الموجبة Σs_n متباعدة إذا كان كل حد من حدودها (ربما بعد عدد محدد من الحدود) أكبر أو يساوى الحد المقابل من متسلسلة موجبة متباعدة معلومة Σd_n .

انظر المسائل ٦ – ١١

V – **اختبار النسبة** . تتقارب المتسلسلة الموجبة Σs_n إذا كان $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1,$ ، وتتباعد إذا كان $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1.$. أما إذا كان $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1,$ فإن هذا الإختبار يفشل فى تقرير تقارب المتسلسلة أو تباعدها

انظر المسائل ١٢ – ١٨

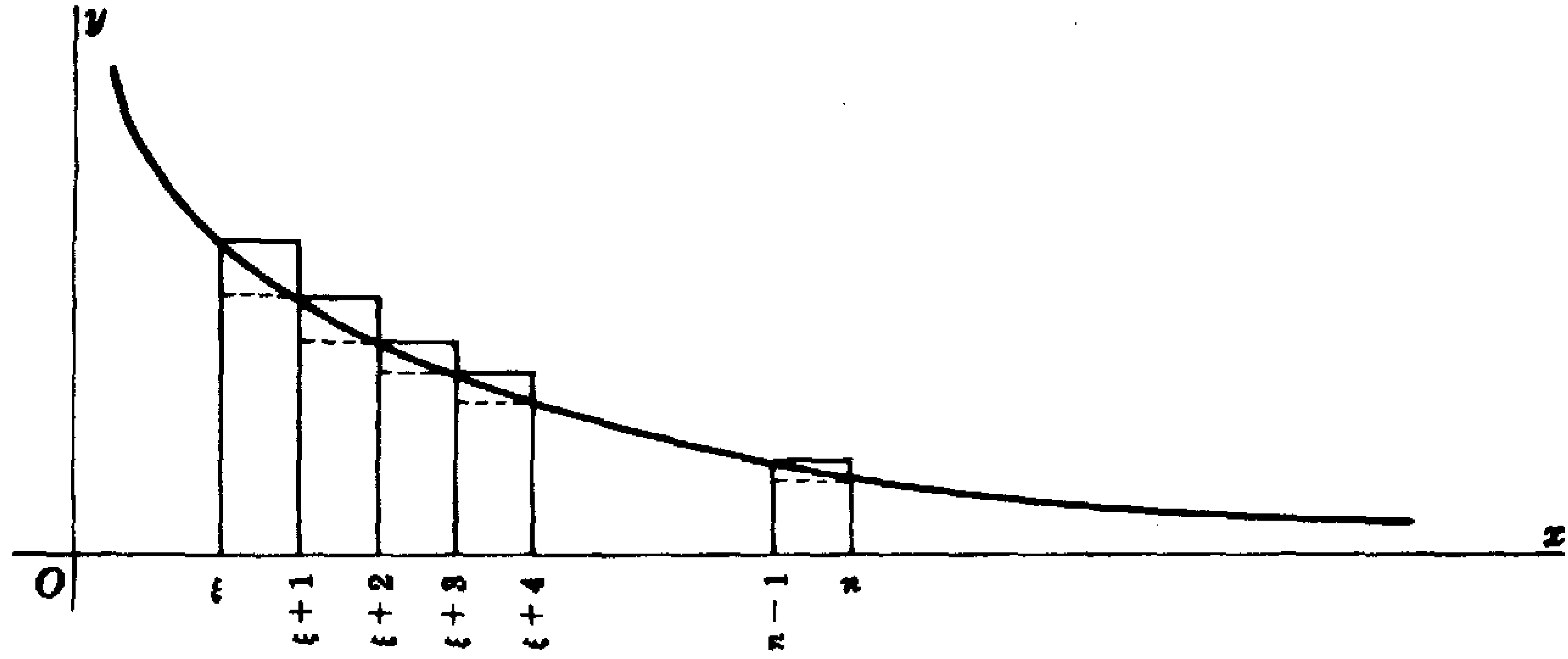
مســـائل محلولة

اختبار التكامل :

١ – برهن اختبار التكامل : بفرض أن $f(n)$ تمثل الحد العام s_n للمتسلسلة الموجبة Σs_n فإذا كانت . $f(x) > 0$ دالة موجبة ولا تتزايد أبدا فى الفترة $\xi < x$ ، حيث ξ عدد صحيح موجب ، فإن المتسلسلة Σs_n تكون متقاربة أو متباعدة تبعا لوجود $\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx$ أو عدم وجوده .

نرى فى الشكل أن مساحة ما تحت المنحنى $y = f(x)$ من $x = \xi$ إلى $x = n$ قد قربت بمجموعتين من المستطيلات المشتركة فى قواعدها . فإذا عبرنا عن كون المساحة المذكورة تنحصر بين مجموع مساحات المستطيلات الصغيرة ومجموع مساحات المستطيلات الكبيرة نجد أن :

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n < \int_\xi^n f(x)\,dx < s_\xi + s_{\xi+1} + \cdots + s_{n-1}$$



شكل ٤٨ — ١

(١) لنفرض أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\xi^n f(x)\,dx = \int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx = A.$ فيكون عندئذ :

ويكون

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n < A$$
$$S_n = s_\xi + s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n$$

محدودا وغير متناقص عندما تتزايد n إذن المتسلسلة Σs_n استنادا إلى النظرية ، متقاربة .

(٢) لنفرض أن $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_\xi^n f(x)\,dx = \int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx$ غير موجود . فيكون عندئذ :

$S_n = s_\xi + s_{\xi+1} + \cdots + s_n$ غير محدود و Σs_n متباعدة .

ادرس التقارب فى المسائل من ٢ الى ٥ مستخدما اختبار التكامل .

٢ — $\cdots + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ أن $f(n) = s_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$; لنأخذ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

أن $f(x) > 0$ فى الفترة $x > 1$ وهى متناقصة عندما تتزايد x . فإذا أخذنا $\xi = 1$ ونظرنا فى :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{u\to+\infty} \sqrt{2x+1}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} \sqrt{2u+1} - \sqrt{3} = \infty$$

نجد أن التكامل غير موجود والمتسلسلة متباعدة

٣ — $\cdots + \frac{1}{64} + \frac{1}{36} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$ أن $f(n) = s_n = \frac{1}{4n^2}$; لنأخذ $f(x) = \frac{1}{4x^2}$.

أن $f(x) > 0$ فى الفترة $x > 1$ وهى متناقصة عندما تتزايد x . لنأخذ $\xi = 1$ ولننظر فى :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_1^u = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}+1\right) = \frac{1}{4}$$

إن التكامل موجود والمتسلسلة متقاربة .

٤ – $\sin\pi + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{9}\sin\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{16}\sin\frac{1}{4}\pi + \cdots$ ؛ إن $f(n) = s_n = \frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{n}\pi$ لنأخذ $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\pi$

أن $f(x) > 0$ فى الفترة $x>2$ والدالة $f(x)$ متناقصة بتزايد x . لنأخذ $\xi = 2$ ولننظر فى :

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_2^u \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\pi\,dx = \frac{1}{\pi}\lim_{u\to+\infty}\cos\frac{1}{x}\pi\Big]_2^u = \frac{1}{\pi}$$

والمتسلسلة متقاربة .

٥ – لتكن لدينا (سلاسل p).$(p>0)$ $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$ أن $f(n) = s_n = \frac{1}{n^p}$؛ لنأخذ $f(x) = \frac{1}{x^p}$.

أن $f(x) > 0$ فى الفترة $x > 1$ والدالة متناقصة عندما تتزايد x .

لنأخذ $\xi = 1$ والنظر فى :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big]_1^u = \frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\},\quad (p\neq 1)$$

فإذا كان $p > 1$ يكون والمتسلسلة متقاربة .

$$\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\} = \frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u^{p-1}} - 1\right\} = \frac{1}{p-1}$$

وإذا كان $p < 1$ يكون $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$ والمتسلسلة متباعدة .

أما إذا كان $p < 1$ فيكون $\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\} = +\infty$ والمتسلسة متباعدة .

لاحظ البرهان الثانى بأن المتسلسلة التوافقية متباعدة .

اختبار المقارنة • فى هذا الاختبار ينبغى مقارنة الحد العام لمتسلسلة المراد دراسة تقاربها مع الحدود العامة لمتسلسلة معلومة التقارب والتباعد وقد تنفع المتسلسلات التالية كتسلسلات مقارنة .

(ا) المتسلسلة الهندسيه $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots,\ a\neq 0,$ ، وهى تتقارب عندما $0 < r < 1$ وتتباعد عند $r \geq 1$.

(ب) المتسلسلات p ، $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ ، التى تتقارب عندما $p > 1$ وتتباعد عندما $p \leq 1$.

(جـ) كل متسلسلة جديدة تم دراسة تقاربها .

ادرس التقارب فى كل من المسائل من ٦ — ١١ مستخدما اختبارات المقارنة .

٦ — $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{n^2+1}+\cdots$

إن الحد العام للمتسلسلة $s_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ ؛ اذن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر من الحد الذى يقابله من المتسلسلة p :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

وبما أن متسلسلة المقارنة متقاربة حيث $p=2$ ، إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة أيضا (يمكن استخدام اختبار التكامل هنا أيضا) .

٧ — $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots$

إن الحد العام للمتسلسلة هو $\frac{1}{\sqrt{n}}$. وبما أن $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{n}$, فكل حد من المتسلسلة المفروضة أكبر من الحد الذى يقابله من المتسلسلة التوافقية أو يساويه ، إذن فالمتسلسلة المفروضة متباعدة — (يمكن استخدام اختبار التكامل هنا أيضا) .

٨ — $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$

إن الحد العام لهذه المتسلسلة $\frac{1}{n!}$. وبما أن $n! \geqq 2^{n-1}, \frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$.

فإن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوى الحد الذى يقابله فى المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\cdots + 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
إذن فالمتسلسلة المفروضة متقاربة (لا يمكن استخدام اختبار التكامل هنا) .

٩ — $2+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{3^3}+\frac{5}{4^3}+\cdots$ الحد العام لهذه المتسلسلة هو $\frac{n+1}{n^3}$

وبما أن $\frac{n+1}{n^3} \leqq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, فكل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوى ضعى الحد الذى يقابله من متسلسلة p المتقاربة $\cdots + 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$ إذن فالمتسلسلة المفروضة متقاربة .

١٠ — $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots$

الحد العام لهذه المتسلسلة $\frac{1}{n^n}$. وبما أن $\frac{1}{n^n} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ فكل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوى الحد الذى يقابله من المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\cdots + 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

كذلك نلاحظ أن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوى الحد الذى يقابله من متسلسلة p المتقاربة حيث $p=2$.

١١– $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \cdots$

الحد العام هو $\frac{n^2+1}{n^3+1} \geqq \frac{1}{n}$. وبما أن كل حد من المتسلسلة المفروضة أكبر أو يساوى الحد الذى يقابله من المتسلسلة التوافقية فالمتسلسلة المفروضة متباعدة .

اختبار النسبة :

١٢– برهن اختبار النسبة :

تتقارب المتسلسلة الموجبة Σs_n إذا كان $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$ وتتباعد إذا كان $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$.

لنفرض أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L < 1$. عندئذ إذا اخترنا عددا r بحيث $L < r < 1$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $\frac{s_{n+1}}{s_n} < r$ أى أن .

$$\frac{s_{m+2}}{s_{m+1}} < r \qquad \text{أو} \qquad s_{m+2} < r \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+3}}{s_{m+2}} < r \qquad \text{أو} \qquad s_{m+3} < r \cdot s_{m+2} < r^2 \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+4}}{s_{m+3}} < r \qquad \text{أو} \qquad s_{m+4} < r \cdot s_{m+3} < r^3 \cdot s_{m+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

إذن كل حد من المتسلسلة $s_{m+1} + s_{m+2} + s_{m+3} + \cdots$ أصغر أو يساوى الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية $s_{m+1} + r \cdot s_{m+1} + r^2 \cdot s_{m+1} + \cdots$ التى تتقارب لأن $r < 1$. وبهذا نجد أن Σs_n متقاربة استنادا إلى النظرية III .

لنفرض الآن أن $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L > 1$ حيث L أكبر من الواحد أو أنه يساوى $+\infty$. عندئذ يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $\frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$ وبالتالى فإن $s_{n+1} > s_n$ و $\{s_n\}$ ليست متقاربة إلى الصفر وهذا يؤدى إلى أن Σs_n متباعدة بالاعتماد على النظرية XVI (الفصل ٤٧) .

لنفرض أخيرا $\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. مثال ذلك المتسلسلة : $\Sigma \frac{1}{n^p}, p > 0,$ التى لها :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^p = 1$$

وبما أن هذه المتسلسلة متقاربة عندما $p > 1$ ومتباعدة عندما $p \leq 1$ ، فإن اختبار النسبة يفشل فى تقرير التقارب أو التباعد .

ادرس التقارب فى كل من المسائل ١٣ – ٣٣ مستخدما اختبار النسبة :

١٣– $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$ ، إن $s_n = \frac{n}{3^n}$, $s_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$, $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$.

إذن $\frac{1}{3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{3n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n}$ والمتسلسلة متقاربة .

١٤- $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \cdots$ إن $s_n = \frac{n!}{3^n}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{3}.$

إذن $\infty = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{3} = \lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n}$ والمتسلسلة متباعدة

١٥- $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \cdots$

$$s_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

إذن $\frac{1}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2n+1}$ والمتسلسلة متباعدة ؛

١٦- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots$ ، إن $s_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}, \quad s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n}{2(n+1)}.$

إذن $\frac{1}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2(n+1)}$ والمتسلسلة متقاربة .

١٧- $2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4^3} + \cdots$ ، إن $s_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}, \quad s_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{4^n}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2}.$

إذن $\frac{1}{4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2}$ والمتسلسلة متقاربة .

١٨- $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \cdots$

$$s_n = \frac{n^2+1}{n^3+1}, \quad s_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1}, \quad \frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1} \cdot \frac{n^3+1}{n^2+1}.$$

إذن $1 = \lim_{n \to +\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n}$ واختبار النسبة فاشل هنا . انظر المسألة ١١ .

مسائل اضافية

١٩- بين أنه يمكن استخدام اختبار التكامل فيما يلي من المتسلسلات ثم ادرس تقارب وتباعد كل متسلسلة مستخدما هذا الاختبار .

(ا) $\sum \frac{1}{n}$ (جـ) $\sum \frac{1}{n \ln n}$ (هـ) $\sum \frac{n}{n^2+1}$ (ز) $\sum \frac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(ب) $\sum \frac{50}{n(n+1)}$ (د) $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ (و) $\sum \frac{n}{e^n}$ (ح) $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$

ج: (ا) ، (جـ) ، (د) ، (هـ) متباعدة .

٢٠ – عين فيما يلي المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة باستخدام اختبار المقارنة :

(ا) $\sum \frac{1}{n^2-1}$ (هـ) $\sum \frac{n+2}{n(n+1)}$ (ط) $\sum \frac{1}{3^n+1}$ (م) $\sum \frac{n}{3n^2-4}$

(ب) $\sum \frac{n-2}{n^3}$ (و) $\sum \frac{1}{n^{n-1}}$ (ى) $\sum \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (ن) $\sum \frac{1}{1+\ln n}$

(جـ) $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (ز) $\sum \frac{1}{3n+1}$ (ك) $\sum \frac{1}{3^n-1}$ (س) $\sum \frac{n^4+5}{n^5}$

(د) $\sum \frac{1}{n^2+5}$ (ح) $\sum \frac{\ln n}{n}$ (ل) $\sum \frac{\ln n}{n^p}$ (ع) $\sum \frac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$

ج : المتسلسلات (ا) ، (ب) ، (د) ، (و) ، (ط) ، (ك) ، (ل) عندما $p > 2$ جميعها متقاربة .

٢١ – عين مما يلي المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة مستخدما اختبار النسبة :

(ا) $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ (د) $\sum \frac{3^{2n-1}}{n^2+n}$ (د) $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (ى) $\sum \frac{n^n}{n!}$

(ب) $\sum \frac{5^n}{n!}$ (هـ) $\sum \frac{(n+1)2^n}{n!}$ (ح) $\sum \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$ (ك) $\sum \frac{2^n}{2n-1}$

(جـ) $\sum \frac{n}{2^{2n}}$ (و) $\sum n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ (ط) $\sum \frac{2^n}{n(n+2)}$ (ل) $\sum \frac{n^3}{3^n}$

ج : المتسلسلات (ا) ، (ب) ، (جـ) ، (هـ) ، (و) (ح) متقاربة .

٢٢ – عين مما يلي المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة .

(ا) $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots$ (ز) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$

(ب) $3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$ (ح) $\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 4} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{5}{4\cdot 6} + \cdots$

(جـ) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \cdots$ (ط) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^4} + \cdots$

(د) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} + \cdots$ (ى) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^{5/2}} + \frac{1}{4^3} + \cdots$

(هـ) $3 + \frac{3}{4} + \frac{11}{27} + \frac{9}{32} + \cdots$ (ك) $2 + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} + \frac{5}{17} + \cdots$

(و) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2\cdot 3^2} + \frac{4}{3\cdot 3^3} + \frac{5}{4\cdot 3^4} + \cdots$ (ل) $\frac{2}{5} + \frac{2\cdot 4}{5\cdot 8} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 8\cdot 11} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14} + \cdots$

ج : المتسلسلات (ا) ، (د) ، (و) ، (ز) ، (ط) ، (ى) ، (ل) متقاربة .

٢٣ – برهن اختبار المقارنة للتقارب . إرشاد : إذا كان $\sum c_n = C$ فإن $\{s_n\}$ محدود .

٢٤ – برهن اختبار المقارنة للتباعد . إرشاد : إن $\sum_1^n s_i \geq \sum_1^n d_i > M$ عندما $n > m$.

٢٥ – برهن اختبار متعددة الحدود : إذا كان $P(n)$ و $Q(n)$ متعددى حدود من الدرجة p ، q على التوالى فإن المتسلسلة $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ متقاربة عندما $q > p + 1$ ومتباعدة عندما $q \leq p + 1$ إرشاد : قارن مع $1/n^{q-p}$.

٢٦ – استخدم اختبار متعددة الحدود لتعيين التقارب أو التباعد فيما يلي :

(ا) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$ (هـ) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-2}+\frac{3}{4^2-3}+\frac{4}{5^2-4}+\cdots$

(ب) $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+\cdots$ (و) $\frac{1}{2^3-1^2}+\frac{1}{3^3-2^2}+\frac{1}{4^3-3^2}+\frac{1}{5^3-4^2}+\cdots$

(جـ) $\frac{3}{2}+\frac{5}{10}+\frac{7}{30}+\frac{9}{68}+\cdots$ (ز) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{5}{4\cdot 6}+\cdots$

(د) $\frac{3}{2}+\frac{5}{24}+\frac{7}{108}+\frac{9}{320}+\cdots$

ج : المتسلسلات (ا) ، (جـ) ، (د) ، (و) متقاربة .

٢٧ – برهن اختبار الجذر : تتقارب المتسلسلة الموجبة Σs_n إذا كان $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{s_n} < 1$ وتتباعد إذا كان $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{s_n} > 1$. والاختبار فاشل إذا كان $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{s_n} = 1$.

إرشاد : إذا كان $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{s_n} < 1,$ فإن $\sqrt[n]{s_n} < r < 1,$ عندما $n > m$ ، ومنه $s_n < r^n$.

٢٨ – عين التقارب أو التباعد فيما يلي باستخدام اختبار الجذر .

(ا) $\Sigma\frac{1}{n^n},$ ، (ب) $\Sigma\frac{1}{(\ln n)^n},$ ، (جـ) $\Sigma\frac{2^{n-1}}{n^n},$ ، (د) $\Sigma\left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$

ج : جميع المتسلسلات متقاربة .

الفصل التاسع والأربعون

المتسلسلات ذات الحدود السالبة

المتسلسلة التي جميع حدودها سالبة يمكن دراستها على أنها السالب للمتسلسلة الموجبة .

المتسلسلة المتناوبة . تسمى المتسلسلة التي تأخذ حدودها بالتناوب إشارة موجبة وسالبة ، مثل :

$$\sum (-1)^{n-1} s_n = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + (-1)^{n-1} s_n + \cdots \quad (١)$$

حيث جميع الـ s_i موجبة ، متسلسلة متناوبة .

١ – تتقارب المتسلسلة المتناوبة (١) عندما (i) $s_n > s_{n+1}$ لكل قيمة لـ n و (ii) $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$

انظر المسألتين ١ – ٢

التقارب المطلق . نقول عن متسلسلة $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$ ، ذات الحدود المختلطة (موجبة وسالبة) بأنها متقاربة تقاربا مطلقا إذا كانت $\Sigma |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \cdots + |s_n| + \cdots$ متقاربة .

– كل متسلسلة موجبة متقاربة هي متقاربة تقاربا مطلقا .

كل متسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا تكون متقاربة . للبرهان انظر المسألة ٣ .

التقـــارب المشروط . إذا كانت Σs_n متقاربة في حين $\Sigma \mid s_n \mid$ متباعدة فإننا نقول عن المتسلسلة إنها متقاربة تقاربا مشروطا .

فالمتسلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ مثلا ، تقاربها مشروط لأنها متقاربة في حين $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ متباعدة .

اختبار النسبة للتقارب المطلق . تكون المتسلسلة Σs_n ذات الحدود المختلطة متقاربة تقاربا مطلقا إذا كان $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| < 1$ ومتباعدة إذا كان $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| > 1$. أما إذا كانت النهاية تساوى 1 فإن الاختبار يفشل في إعطائنا أية معلومات .

انظر المسائل ٤ – ١٢

مســـائل محلولة

١ – برهن أن المتسلسلة المتناوبة $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \ldots$ متقاربة عندما (i) $s_n > s_{n+1}$ لجميع قيم n و (ii) $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$

لننظر فى المجموع الجزئى :

$$S_{2m} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + s_{2m-1} - s_{2m}$$

الذى يمكن تجميعه على النحو التالى :

(ا) $S_{2m} = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4) + \cdots + (s_{2m-1} - s_{2m})$

(ب) $S_{2m} = s_1 - (s_2 - s_3) - \cdots - (s_{2m-2} - s_{2m-1}) - s_{2m}$

ولكن من الفرض $s_n > s_{n+1}$ و $s_n - s_{n+1} > 0$ إذن من (ا) نجد أن $S_{2m} > 0$ ، (ب) نجد أن $S_{2m} < s_1$. والمتواليه $\{S_{2m}\}$ محدودة وهى متقاربة إلى نهاية $L < s_1$. لننظر بعد ذلك فى المجموع الجزئى $S_{2m+1} = S_{2m} + s_{2m+1}$;

إذن : $\lim_{m \to +\infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to +\infty} S_{2m} + \lim_{m \to +\infty} s_{2m+1} = L + 0 = L$

وبهذا نجد أن $\lim_{n \to +\infty} S_n = L$ والمتسلسلة متقاربة .

٢ – برهن أن المتسلسلات المتناوبة التالية متقاربة :

(ا) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

إن $s_n = \frac{1}{n^2}$ و $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$; ومنه نجد أن $s_n > s_{n+1}$ وأن $\lim_{n \to +\infty} s_n = 0$, والمتسلسلة متقاربة .

(ب) $1/2 - 1/5 + 1/10 - 1/17 + \cdots$

إن $s_n = \frac{1}{n^2+1}$ و $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$ ومنه نجد أن $s_n \geq s_{n+1}$. وأن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ والمتسلسلة متقاربة .

(ﺟ) $\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} - \frac{4}{e^4} + \cdots$

إن المتسلسلة متقاربة لأن $s_n \geq s_{n+1}$ و $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{e^n} = 0.$

٣ – برهن أن كل متسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا هى متقاربة .

لتكن لدينا المتسلسلة (ا) $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \cdots + s_n + \cdots,$

التى لها حدود موجبة وحدود سالبة ، ولتكن .

(ب) $\Sigma |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \cdots + |s_n| + \cdots$

هى المتسلسلة المقابلة التى جميع حدودها موجبة والتى تتقارب إلى S'. لنفرض أن المجموع الجزئى الـ n هو $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$ للمتسلسلة (١) المكونة من r حد موجب مجموعه P_r ومن $t = n - r$ حد سالب مجموعه $-Q_t$. عندئذ يكون $S_n = P_r - Q_t$ فى حين يكون المجموع الجزئى المقابل فى (ب) هو $S'_n = P_r + Q_t$. ولكن بما أن $\lim_{n\to+\infty} S'_n = S'$، إذن فالمجاميع الجزئية S'_n محدودة ومنه نرى أنه عندما تزداد n تبقى المتواليتان $\{P_r\}$ و $\{Q_t\}$ محدودتين وغير متناقصتين . ليكن $\lim_{n\to+\infty} P_r = P$ و $\lim_{n\to+\infty} Q_t = Q$، فيكون $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} P_r - \lim_{n\to+\infty} Q_t = P - Q$ والمتسلسلة Σs_n متقاربة .

التقارب المطلق والمشروط :

ادرس التقارب المطلق والمشروط لكل من المتسلسلات التالية :

٤ - $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

إن المتسلسلة $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, التى نحصل عليها بجعل جميع حدود المتسلسلة المفروضة موجبة ، متقاربة لأنها متسلسلة هندسية أساسها $r = \frac{1}{2}$. وعلى هذا فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

٥ - $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \cdots$

إن المتسلسلة $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots$, التى نحصل عليها بجعل جميع حدود المتسلسلة المفروضة موجبة ، متقاربة استنادا إلى اختبار النسبة ، وبالتالى فإن المتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

٦ - $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

إن المتسلسلة $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ متباعدة لأنها متسلسلة p حيث $p = \frac{1}{2} < 1$. والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مشروطا .

٧ - $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots$

المتسلسلة $1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots$ متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوى الحد المقابل فى متسلسلة p مع $p = 3$ والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

٨ - $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \cdots$

إن المتسلسلة $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \cdots$ متباعدة لأن كل حد من حدودها أكبر من نصف الحد المقابل فى المتسلسلة التوافقية والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مشروطا .

٩ - $2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \cdots$

إن المتسلسلة $2 + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!} + \cdots + \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$ متقاربة (استنادا إلى اختبار النسبة) والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

١٠ - $\frac{1}{2} - \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} - \frac{16}{4^3+1} + \cdots$

إن المتسلسلة $\frac{1}{2}+\frac{4}{2^3+1}+\frac{9}{3^3+1}+\frac{16}{4^3+1}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+1}+\cdots$ متباعدة (استنادا إلى اختبار التكامل) والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مشروطا .

١١ — $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^3+1}+\frac{3}{3^3+1}-\frac{4}{4^3+1}+\cdots$

إن المتسلسلة $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^3+1}+\frac{3}{3^3+1}+\frac{4}{4^3+1}+\cdots+\frac{n}{n^3+1}+\cdots$ متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوى الحد المقابل فى متسلسلة p مع $p=2$ والمتسلسلة المفروضه متقاربة تقاربا مطلقا .

١٢ — $\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

إن المتسلسلة $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$ متقاربة لأن كل حد من حدودها أصغر أو يساوى الحد المقابل فى المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ والمتسلسلة المفروضة متقاربة تقاربا مطلقا .

مسائل اضافية

١٣ — ادرس تقارب وتباعد كل متسلسلة من المتسلسلات المتناوبة التالية :

(ا) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ (جـ) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$ (هـ) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(ب) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$ (د) $\sum (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{3n+2}$ (و) $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

ج : المتسلسلات (ا) ، (ب) ، (د) ، (هـ) متقاربة .

١٤ — ادرس التقارب المشروط والمطلق فى كل من المتسلسلات التالية :

(ا) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ (جـ) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$ (هـ) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ (ز) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

(ب) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ (د) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2}$ (و) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$ (ح) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^4+2}$

ج : المتسلسلات (ا) ، (جـ) ، (د) ، (و) ، (ح) تقاربها مطلق .

الفصل الخمسون

الحسابات بالمتسلسلات

عمليات على المتسلسلات . لتكن لدينا المتسلسلة

$$\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \quad (١)$$

ولنفرض Σt_n متسلسلة نحصل عليها من السابقة بإدخال الأقواس ، أى بتجميع حدودها مثل :

$$\Sigma t_n \;:\; (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4 + s_5) + (s_6 + s_7) + (s_8 + s_9 + s_{10} + s_{11}) + \cdots$$

I — إن كل متسلسلة نحصل عليها بإدخال الأقواس فى متسلسلة متقاربة ، تتقارب هى أيضا إلى مجموع المتسلسلة الأصلية ذاته .

II — إن كل متسلسلة نحصل عليها بإدخال الأقواس فى متسلسلة موجبة متباعدة ، هى متباعدة كذلك . أما إذا كانت المتسلسلة الأصلية ذات حدود مختلفة فإن المتسلسلة الناتجة قد تتباعد وقد تتقارب .

انظر المسألتين ١ — ٢

لتكن الآن المتسلسلة Σu_n التى نحصل عليها من (١) بتغيير ترتيب حدودها . مثلا :

$$\Sigma u_n = s_1 + s_3 + s_2 + s_4 + s_6 + s_5 + \cdots$$

III — إن كل متسلسلة نحصل عليها بتغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا ، هى كذلك متسلسلة تقاربها مطلق ، ومجموعها يساوى مجموع المتسلسلة الأصلية .

IV — يمكن تغيير ترتيب حدود متسلسلة متقاربة تقاربا مشروطا لنحصل إما على متسلسلة متباعدة أو على متسلسلة متقاربة مجموعها يساوى عدداً نختاره مسبقا .

انظر المسألة ٣

الجمع والطرح والضرب . إذا كانت Σs_n و Σt_n متسلسلتين فإننا نعرف مجموعهما Σu_n وناتج طرحهما Σv_n وحاصل ضربهما Σw_n على النحو التالى :

$$\Sigma u_n = \Sigma(s_n + t_n)$$

$$\Sigma v_n = \Sigma(s_n - t_n)$$

$$\Sigma w_n = s_1t_1 + (s_1t_2 + s_2t_1) + (s_1t_3 + s_2t_2 + s_3t_1) + \cdots$$

V — إذا كانت Σs_n متقـاربة إلى S و Σt_n متقـاربة إلى T ، فإن $\Sigma(s_n + t_n)$ تتقارب إلى $S + T$ و $\Sigma(s_n - t_n)$ تتقارب إلى $S - T$. وإذا كانت Σs_n و Σt_n متقاربتين تقاربا مطلقا فإن $\Sigma(s_n \pm t_n)$ تقاربها مطلق أيضا .

VI — إذا تقاربت كل من Σs_n و Σt_n فإن متسلسلة حاصل ضربهما Σw_n قد تتقارب وقد تتباعد . وإذا تقاربت كل من Σs_n و Σt_n وكانت واحـدة منهما متقاربة تقاربا مطلقا فإن Σw_n تتقـارب إلى $S\,T$. وإذا كان تقارب Σt_n و Σs_n مطلقا فإن تقارب Σw_n يكون مطلقا أيضا .

انظر المسألتين ٤ — ٥

الحساب بالمتسلسلات يمكن الحصول على مجموع متسلسلة متقاربة بسهولة إذا أمكن التعبير عن مجموعها الجزئى الـ n كدالة فى n . مثال ذلك أية متسلسلة هندسية متقاربة . ويمكن من جهة أخرى اعتبار أى مجموع جزئى لمتسلسلة متقاربة كمجموع تقريبى للمتسلسلة ، ولكى يكون التقريب S_n لـ S مفيـدا فإنه ينبغى أن تكون معلومـة لدينا درجـة كبر $|S_n - S|$.

ولمتسلسلة متقاربة Σs_n مجموعها S ؛ نكتب :

$$S = S_n + R_n$$

حيث تعطينا R_n ، والتى نسميها الباقى بعد n حداً ، مقدار الخطأ الناتج عن استعمال s_n ، المجموع الجزئى n ، بدلا من المجموع الحقيقى S . وتعطينا النظريات التالية تقريبا لهذا الخطأ من الشكل $R_n < \alpha$ فى حالة المتسلسلات الموجبة ومن الشكل $|R_n| \leq \alpha$ فى حالة المتسلسلات ذات الحدود المختلطة .

ولقد رأينا فى المسألة ١ من الفصـل ٤٩ إن المتسلسلة المتناوبة $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots$, يكون :

$$R_{2m} = s_{2m+1} - s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + \cdots < s_{2m+1}$$

و

$$R_{2m+1} = -s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + s_{2m+5} - \cdots > -s_{2m+2}$$

لذلك :

VII — للمتسلسلة المتناوبة يكون $|R_n| < s_{n+1}$; ويكون R_n بالإضافة إلى ذلك موجبا إذا كانت n زوجية . وسالبا إذا كانت n فردية .

انظر المسألة ٦

VIII — للمتسلسلة الهندسية المتقاربة Σar^{n-1} يكون :

$$|R_n| = \left|\frac{ar^n}{1-r}\right|$$

IX — إذا كانت متسلسلة موجبة Σs_n متقاربة استنادا إلى اختبار التكامل فإن :

عندما $n > \xi$. $R_n < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ انظر المسائل ٧ — ٩

وإذا كانت Σc_n متسلسلة موجبة متقاربة معروفة وإذا صح بالنسبة لمتسلسلة موجبة Σs_n إن $s_n \leq c_n$ لـكل قيمة لـ n تحقق الشرط $n > n_1$ فإن :

عندما $n > n_1$. $R_n \leq \sum_{n+1}^{+\infty} c_j$ انظر المسائل ١٠ — ١٢

مسائل محلولة

١ ــ لتكن المتسلسلة الموجبة $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots$ ولتكن $\Sigma t_n = (s_1 + s_2) + s_3 + (s_4 + s_5) + s_6 + \cdots$ المتسلسلة التي نحصل عليها منها بإدخال الأقواس وفق النموذج ....,2,1,2,1,2,1

فيكون بالنسبة للمجاميع الجزئية لـ Σt_n : $T_1 = S_2,\ T_2 = S_3,\ T_3 = S_5,\ T_4 = S_6, \cdots$ فإذا كانت Σs_n متقاربة إلى S فإن Σt_n تكون كذلك أيضا لأن $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$. أما إذا كانت Σs_n متباعدة فإن $\{S_n\}$ غير محدودة وبالتالى $\{T_n\}$ غير محدودة والمتسلسلة Σt_n متباعدة .

٢ ــ إن المتسلسلة $\Sigma (-1)^{n-1}\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$ متباعدة (لماذا ؟) ، ولكن إذا جمعنا حدودها وفق

$$\left(3-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{4}\right)+\left(\frac{11}{5}-\frac{13}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{4m-1}{2m-1}-\frac{4m+1}{2m}\right)+\cdots$$

فإن المتسلسلة الناتجة متقاربة لأن حدها العام يحقق العلاقة . $\left(\dfrac{4m-1}{2m-1}-\dfrac{4m+1}{2m}\right) = \dfrac{1}{4m^2-2m} < \dfrac{1}{m^2}$

٣ ــ إن المتسلسلة (ا) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$ متقاربة ويمكن تجميع حدودها على الشكل $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots$ لتعطى المتسلسلة المتقاربة $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots = A.$

أما إذا غيرنا ترتيب حدودها وفق النموذج $+--+--\cdots,$ فإننا نحصل على

$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots$ أو $\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\cdots = \frac{1}{2}A.$

٤ ــ برهن أن $\frac{3+1}{3\cdot 1}+\frac{3^2+2^3}{3^2\cdot 2^3}+\frac{3^3+3^3}{3^3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{3^n+n^3}{3^n\cdot n^3}+\cdots$ متقاربة .

بما أن $\frac{3^n+n^3}{3^n\cdot n^3} = \frac{1}{n^3}+\frac{1}{3^n}$ ، فالمتسلسلة المفروضة تتكون من مجموع المتسلسلتين $\Sigma\ \frac{1}{n^3}$ ، $\Sigma\ \frac{1}{3^n}$ وحيث أن كل واحدة منهما متقاربة فالمتسلسلة المفروضة ، استنادا إلى النظرية V متقاربة .

٥ ــ بين أن المتسلسلة $\frac{3^n+n}{n\cdot 3^n}$ متباعدة .

لنفرض أن $\Sigma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right) = \Sigma\frac{3^n+n}{n\cdot 3^n}$ متقاربة . فعندئذ ينتج من ذلك (استنادا إلى النظرية V) أن $\Sigma\ \frac{1}{n}$ متقاربة لأن $\Sigma\ \frac{1}{3^n}$ متقاربة ولكن هذه النتيجة خاطئة والمتسلسلة المفروضة متباعدة .

٦ ــ (ا) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\Sigma s_n = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$ إلى حدودها العشرة الأولى .

(ب) كم ينبغى أن يكون عدد الحدود التى يلزم أستخدامها للحصول على قيمة المتسلسلة بخطأ لا يتجاوز 0.05 ؟ .

(ا) إن المتسلسلة المفروضة متسلسلة متناوبة متقاربة والخطأ يساوى R_{10} حيث $R_{10} < s_{11} = 1/11^2 = 0.0083.$

(ب) بما أن $|R_n| < s_{n+1},$ نضع $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} = 0.05.$ فيكون $(n+1)^2 = 20$ ومنه $n=3.5$ والحدود المطلوبة هى أربعة .

٧ – استنتج $R_n < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$ كما هو مذكور فى النظرية IX .

نجد التقريب (بالمستطيلات الصغيرة) المساحة الواقعة تحت المنحنى الموضح فى شكل المسألة ١ من الفصل ٤٨ وإلى يمين $x = n$ فنجد عندئذ :

$$R_n = s_{n+1} + s_{n+2} + s_{n+3} + \cdots < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$$

٨ – قدر الخطأ النـاتج عن تقريب المتسلسلة $\Sigma\ \dfrac{1}{4n^2}$ إلى حدودها العشرة الأولى .

إن هذه المتسلسلة بالاعتماد على اختبار التكامل ، متقاربة (انظر المسألة ٣ من الفصل ٤٨) إذن :

$$R_{10} < \frac{1}{4}\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\int_{10}^{u}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{40} = 0.025$$

٩ – كم ينبغى أن يكون عدد الحدود التى يلزم استخدامها لحصول على قيمة المتسلسلة $\Sigma\ \dfrac{1}{n^5+1}$ بخطأ لا يتجاوز 0.000 01

هذه المتسلسلة متقاربة وذلك بالمقارنة مع المتسلسلة $\Sigma\ \dfrac{1}{n^5}$ التى هى بدورها متقـاربة بالاستناد إلى اختبار التكامل . إذن . $R_n < \int_n^{+\infty}\dfrac{dx}{x^5} = \dfrac{1}{4n^4}$. فإذا وضـعنا $\dfrac{1}{4n^4} = 0.000\,01$, نجد $n^4 = 25{,}000$ ومنه $n = 12{,}6$ ، لذلك فإن عدد الحدود المطلوبة 13 حدا .

١٠ – قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\Sigma\ \dfrac{1}{n\,!}$ إلى حدودها الاثنى عشر الأولى .

لقد وجدنا (المسألة ٨ من الفصل ٤٨) أن هذه المتسلسلة متقاربة وذلك عن طريق مقارنتها بالمتسلسلة الهندسـية $\Sigma\ \dfrac{1}{2^{n-1}}$ ولذلك فإن الخطأ R_{12} للمتسلسلة المفروضة أقل من الخطأ R'_{12} للمتسلسلة الهندسية ، إذن $R_{12} < R'_{12} = \dfrac{(\frac{1}{2})^{12}}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^{11}} = 0.0005.$ ولقد كان من الممكن أن نتصرف بشكل أفضل ! . إن $\dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{4^{n-1}}$; عندما $n > 6$ وبالتالى فإن $R_{12} < \dfrac{(\frac{1}{4})^{12}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3\cdot 4^{11}} = 0.000\,000\,08.$

١١ – قدر الخطأ الناتج عن تقريب $\Sigma s_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3 + \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^4 + \cdots$ إلى حدودها العشرة الأولى .

بتطبيق اختبار النسبة $r = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \dfrac{2}{3}.$ والمتسلسلة متقاربة . ونلاحظ أن $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ نجد أن $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} < \dfrac{2}{3},$ لجميع قيم n ، وبالتالى فإن كل حد من المتسلسلة المفروضة أصغر أو يساوى الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية $\Sigma\, s_1 r^{n-1}$ لذلك فإن :

$$\Sigma s_{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \Sigma\frac{1}{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{11}}{11\cdot 3^{10}} = 0.004.$$

ويمكن الحصول على تقريب أفضل إذا لاحظنا أن كل حد من المتسلسلة المفروضة بعد الحد العاشر أصغر من :

$$R_{10} < \left(\frac{2}{3}\right)^{11} + \left(\frac{2}{3}\right)^{12} + \left(\frac{2}{3}\right)^{13} + \cdots = \frac{(2/3)^{11}}{1-2/3} = \frac{2^{11}}{3^{10}} = 0.04.$$

١٢ – قدر الخطأ الناتج عن تقريب $\sum s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$ إلى حدودها العشرة الأولى .

بتطبيق اختبار النسبة $\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ نجد أن $r = {}^1/_3$ ، والمتسلسلة متقاربة ولكننا نلاحظ أن $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \frac{1}{3}$ ، لجميع قيم n ، وبالتالى لا يمكن استخدام المتسلسلة الهندسية $\Sigma\,({}^1/_3)^n$ كمتسلسلة مقارنة . ولكن من جهة أخرى نجد أن المتوالية $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}\right\}$ غير متزايدة وأن $\frac{4}{11} = \frac{s_{12}}{s_{11}}$ وعلى هذا فإن كل حد من حدود المتسلسلة بعد الحد العاشر أصغر أو يساوى الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية $\sum s_{11}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1} = \frac{11}{3^{11}}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1}$.

إذن $R_{10} < \sum \frac{11}{3^{11}}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1} = \frac{121}{7 \cdot 3^{11}} = 0.000\,097\,58 < 0.0001.$

مسائل اضافية

١٣ – غير ترتيب الحدود $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ لتحصل على متسلسلة متقاربة مجموعها (ا) 1 . (ب) 2 –

إرشاد (ا) ضع أولا الحدود الـ n_1 الموجبة الأولى حتى يزيد مجموعها عن 1 . اتبع ذلك بالـ n_2 حد سالبا الأولى كى يقل المجموع عن 1 وهكذا .

١٤ – هل يمكن لمجموع متسلسلتين متباعدتين أن يتقاربا ؟ اعط مثالا على ذلك .

١٥ – (ا) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ إلى حدودها الخمسين الأولى .

(ب) كم ينبغى أن يكون عدد الحدود التى يلزم استخدامها كى لا يتجاوز الخطأ 0.000 005 ؟

ج : (ا) 0.01 (ب) 100,000

١٦ – (ا) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ إلى حدودها الثمانية الأولى .

(ب) كم ينبغى أن يكون عدد الحدود التى يلزم استخدامها كى لا يتجاوز الخطأ 0.000 05 ؟

ج : (ا) 0.0002 . (ب) 11

١٧ – (ا) قدر الخطأ الناتج عن تقريب المتسلسلة الهندسية $\sum \frac{3}{2^n}$ إلى حدودها الستة الأولى .

(ب) كم ينبغى أن يكون عدد الحدود التى يلزم استخدامها كى لا يتجاوز الخطأ 0.000 05 ؟

ج : (ا) 0.05 . (ب) 16 .

١٨ – برهن أنه إذا ثبت لنا تقارب المتسلسلة الموجبة Σs_n عن طريق مقارنتها بالمتسلسلة الهندسية Σr^n حيث $0 < r < 1$ فإن $R_n < \frac{r^{n+1}}{1-r}$.

١٩ – قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل من المتسلسلتين التاليتين إلى حدودها الستة الأولى :

(ا) $\sum \frac{1}{3^n+1} \left(< \sum \frac{1}{3^n}\right)$

(ب) $\sum \frac{1}{3+4^n} \left(< \sum \frac{1}{4^n} \right)$

ج : (ا) 0.0007 . (ب) 0.000 09 .

٢٠ – إن المتسلسلتين (ا) $\sum \frac{n+1}{n \cdot 3^n}$ و (ب) $\sum \frac{n}{(n+1)3^n}$ متقاربتان استنادا إلى اختبار النسبة . قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل منها إلى حدودها الثمانية الأولى .

ج : (ا) 0.000 09 . (ب) 0.000 07 .

٢١ – برهن أن ، بالنسبة للمتسلسلة p المتقاربة ، $R_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$ إرشاد : انظر المسألة ٩ .

٢٢ – إن المتسلسلتين (ا) $\sum \frac{1}{n^3+2}$ و (ب) $\sum \frac{n-1}{n^5}$ متقاربتان اعتمادا على مقارنتهما بالمتسلسلة p . قدر الخطأ الناتج عن تقريب كل منها إلى حدودها الستة الأولى .

وكم ينبغي أن يكون عدد الحدود التي يلزم استخدامها في كل منهما كي لا يتجاوز الخطأ 0.005 .

ج : (ا) 0.014 ، عشرة حدود ، (ب) 0.002 ، خمسة حدود .

الفصل الحادى والخمسون

متسلسلات القــوى

تسمى المتسلسلة غير المنتهية من الشكل

$$\sum c_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad (١)$$

حيث الـ c_i ثوابت ، متسلسلة قوى فى x . وبشكل مماثل تسمى المتسلسلة المنتهية من الشكل

$$\sum c_i (x-a)^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x-a)^i = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \quad (٢)$$

متسلسلة قوى فى $(x-a)$.

لأى قيمة لـ x فإن كلا من المتسلسلتين (١) و (٢) تصبح متسلسلة غير منتهية بحدود ثابتة (أنظر الفصلين ٤٨ ، ٤٩) وإما أن تكون متقاربة أو متباعدة .

فترة التقارب . فترة التقارب . تسمى مجموعة قيم x التى تكون عندها متسلسلة القوى متقاربة بفترة التقارب .

ومن الواضح أن (١) متقاربة عندما $x = 0$ وأن (٢) متقاربة عندما $x = a$. فإذا وجدت قيم أخرى لـ x تتقارب عندها (١) أو (٢) فعندئذ إما أن تتقارب لجميع قيم x أو لجميع قيم x فى فترة زمنية منتهية (فترة مغلقة أو مفتوحة أو نصف مفتوحة) مركزها عند النقطة $x = 0$ المتسلسلة (١) و $x = a$ المتسلسلة (٢) .

ولإيجاد فترة التقارب نستخدم اختبار النسبة للتقارب المطلق أما فيما يتعلق بطرفى الفترة فنستخدم الاختبارات الأخرى التى وردت فى الفصلين ٤٨ و ٤٩ .

أنظر المسائل ١ — ٩

التقارب والتقارب المنتظم . إن الدراسة التى سنوردها فيما يلى مع النظريات خاصة للمتسلسلات من النمط (١) ولكن يمكن تطبيقها على النمط (٢) بعد تغيير بسيط .

لننظر فى متسلسل القوى (١) ولنرمز بـ :

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

للمجموع الجزئى الـ n حدوبـ

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k = c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \cdots$$

للمجموع الباقى بعد n حدا . فيكون عندئذ

$$\sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x) \quad (٣)$$

إذا تقاربت $\Sigma c_i x^i$ عندما $x = x_0$ إلى عدد محدود $S(x_0)$ فإن $\lim_{n \to +\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$. لأن

$|S(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)|$, و $\lim_{n\to+\infty} |S(x_0) - S_n(x_0)| = \lim_{n\to+\infty} |R_n(x_0)| = 0$.

هكذا يتقارب $\Sigma c_i x^i$ عندما $x = x_0$ إذا وجد لكل عدد موجب $\in$ مهما كان صغيرا ، عددا صحيحا موجبا m بحيث يكون $|R_n(x_0)| < \in$ عندما $n > m$.

يلاحظ أن m لا تعتمد فقط على $\in$ (أنظر المسألة ١٢ من الفصل ٤٧) بل تعتمد كذلك على اختيار القيمة x_0 لـ x أنظر المسألة ١٠ .

سنبرهن فى المسألة ١١ .

I – إذا كانت $\Sigma c_i x^i$ متقاربة عندما $x = x_1$ وكان $|x_2| < x_1|$ فإن المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا عندما $x = x_2$

لنفرض الآن أن (١) تقاربها مطلق ، أى أن $\Sigma |c_i x^i|$ متقاربة لجميع قيم x التى تحقق العلاقة $|x| < P$ ، لنأخذ قيمة لـ x أما $x = p$ أو $x = -p$ بحيث يكون $|x| = p < P$ فبما أن (١) متقاربة عندما $|x| = p$ فإنه يوجد لأى عدد $0 < \in$ مهما كان صغيرا عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|R_n(p)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k p^k| < \epsilon$.

لنجعل الآن x تتغير فى الفترة $|x| \leq p$ عندئذ يأخذ كل حد من $|R_n(x)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k x^k|$ قيمته العظمى عند $|x| = p$ ، وبالتالى فإن $|R_n(x)|$ يبلغ قيمته العظمى فى الفترة $|x| \leq p$ عندما $|x| = p$.

لنفرض أننا اخترنا $\in$ ووجدنا m عندما $|x| = p$ عندئذ يكون لهذه القيم لـ $\in$ و m ، $|R_n(x)| < \in$ لجميع قيم x التى تحقق الشرط $|x| \leq p$ أى أن m تعتمد على $\in$ و p ولا تعتمد على x_0 التى نختارها لـ x فى الفترة $|x| \leq p$ كما فى التقارب العادى . لذلك فإننا نقول (١) متقاربة تقاربا منتظما فى الفترة $|x| \leq p$ وبهذا نكون قد برهنا المطلوب

II – إذا كانت $\Sigma c_i x^i$ متقاربة تقاربا مطلقا عندما $|x| < P$ فهى متقاربة تقاربا منتظما عندما $|x| \leq p < P$. (المتسلسلة $\Sigma (-1)^i x^i$ على سبيل المثال ، متقاربة عندما $|x| < 1$. واستنادا إلى النظرية I فإن هذه المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا عندما $|x| \leq 0.99$ واستنادا إلى النظرية II فإنها متقاربة تقاربا منتظما عندما $|x| \leq 0.9$.

III – تمثل متسلسلة القوى دالة متصلة $f(x)$ داخل فترة تقارب المتسلسلة .

للبرهان أنظر المسألة ١٢

IV – إذا تقاربت $\Sigma c_i x^i$ إلى الدالة $f(x)$ فى الفترة I وإذا كان a و b داخل هذه الفترة فعندئذ :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_a^b c_i x^i\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1 x\,dx + \int_a^b c_2 x^2\,dx + \cdots$$
$$+ \int_a^b c_{n-1} x^{n-1}\,dx + \cdots$$

للبرهان أنظر المسألة ١٣

V – إذا تقاربت $\Sigma\, c_i\, x^i$ إلى $f(x)$ فى الفترة I فــإن التكامل غير المحدد $\sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x c_i x^i\, dx$ يتقارب إلى $g(x) = \int_0^x f(x)\, dx$ لجميع قيم x داخل الفترة I .

VI – إذا تقاربت $\Sigma\, c_i\, x^i$ إلى الدالة $f\,(x)$ فى الفترة I فعندئذ تتقارب مشتقة المتسلسلة $\frac{d}{dx}\,(\,c_i\, x^i\,)$ إلى $f'(x)$ لجميع قيم x داخل الفترة I .

VII – إن تمثيل الدالة $f\,(x)$ فى متسلسلة قوى فى x وحيد .

مسائل محلولة

١ – عين فترة تقارب $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$.

باستخدام اختبار النسبة :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$$

المتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا عندما $|\,x\,| < 1$ ومتباعدة عندما $|\,x\,| > 1$.

أما بخصوص طرفى الفترة $x = 1$ و $x = -1$ فينبغى اختبار المتسلسلة بشكل مستقل .

عندما $x = 1$ تصبح المتسلسلة $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ متقاربة تقاربا مشروطا .

وعندما $x = -1$ تصبح المتسلسلة $-\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots)$ متباعدة .

وهكذا فإن المتسلسلة المفروضة تتقارب فى الفترة $-1 < x \le 1$.

٢ – عين فترة تقارب المتسلسلة $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

المتسلسلة المفروضة متقاربة لجميع قيم x .

٣ – عين تقارب المتسلسلة $\frac{x-2}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \cdots + \frac{(x-2)^n}{n} + \cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |x-2|$$

إن المتسلسلة تتقارب تقاربا مطلقا عندما $|x-2| < 1$ أو $3 > x > 1$ وتتباعد عندما $|x-2| > 1$ أى عندما $x < 1$ و $x > 3$. وعندما $x = 1$ فتأخذ المتسلسلة الشكل $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$ وعندما $x = 3$ تأخذ الشكل $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$. وتتقارب الأولى فى حين تتباعد الثانية . وهكذا نرى أن المتسلسلة المفروضة تتقارب فى الفترة $1 \le x < 3$ وتتباعد فيما عدا ذلك .

٤ – أوجد فترة تقارب $1 + \frac{x-3}{1^2} + \frac{(x-3)^2}{2^2} + \frac{(x-3)^3}{3^2} + \cdots + \frac{(x-3)^{n-1}}{(n-1)^2} + \cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-3)^n}{n^2}\cdot\frac{(n-1)^2}{(x-3)^{n-1}}\right| = |x-3|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = |x-3|$$

إن تقارب المتسلسلة مطلق عندما $1 > |x-3|$ أو $2 < x < 4$, وتتباعد عندما $1 < |x-3|$ أو عندما $x < 2$ و $x > 4$

وعندما $x = 2$ تأخذ المتسلسلة الشكل $\cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + 1 - 1$ وعندما $x = 4$ تأخذ الشكل $\cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} + 1 + 1$؛
وبما أن هاتين المتسلسلتين متقاربتان تقاربا مطلقا فإن المتسلسلة المفروضة تتقارب تقاربا مطلقا فى الفترة $2 \le x \le 4$ وتتباعد فيما عدا ذلك . ويلاحظ أن الحد الأول للمتسلسلة لم يعط بالحد العام عندما $n = 0$.

٥ — عين فترة تقارب المتسلسلة $\frac{x+1}{\sqrt{1}} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} + \frac{(x+1)^3}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n}\right| = |x+1|\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x+1|$$

والمتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا عندما $1 > |x+1|$ أو عندما $-2 < x < 0$ ومتباعدة عندما $x < -2$ و $x > 0$.

أما عندما $x = -2$ فتأخذ المتسلسلة الشكل $\cdots - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 -$ وعندما $x = 0$ تأخذ الشكل $\cdots + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$. أن الأولى من هاتين المتسلسلتين متقاربة فى حين نجد أن المتسلسلة الثانية متباعدة (لماذا ؟) .
إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة فى الفترة $-2 \le x < 0$ ومتباعدة فيما عدا ذلك .

٦ — عين فترة تقارب المتسلسلة $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3 + \cdots$.

إن هذه المتسلسلة هى متسلسلة ذات الحدين وهى منتهية عندما تكون m صحيحة موجبة وغير منتهية لجميع القيم الأخرى لـ m وإن :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)x^{n-1}}\right|$$
$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right| = |x|$$

المتسلسلة غير المنتهية متقاربة تقاربا مطلقا عندما $1 > |x|$ ومتباعدة عندما $1 < |x|$. وأما عند طرفى الفترة $x = \pm 1$ فإن المتسلسلة تتقارب إذا كان $m \ge 0$ وتتباعد إذا كان $m \le -1$. أما عندما $-1 < m < 1$ فإن المتسلسلة تتقارب عندما $x = 1$ وتتباعد عندما $x = -1$ ولبرهان هذه الحقائق نحتاج إلى اختبارات أكثر دقة من التى وردت فى الفصل ٤٨ .

٧ — أوجد مجال تقارب $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2$$

والمتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا فى الفترة $x^2 < 1$ أو $-1 < x < 1$ وعندما $x = -1$ تأخذ المتسلسلة الشكل $\cdots - \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 -$ وعندما $x = 1$ تأخذ الشكل $\cdots + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1$ والمتسلسلتان متقاربتان .
إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة عندما $-1 \le x \le 1$ ومتباعدة فيما عدا ذلك .

٨ — عين فترة تقارب $(x-1) + 2!(x-1)^2 + 3!(x-1)^3 + \cdots + n!(x-1)^n + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x-1)^{n+1}}{n!\,(x-1)^n}\right| = |x-1|\lim_{n\to+\infty}(n+1) = \infty$$

المتسلسلة متقاربة عند $x = 1$ فقط .

٩ – أوجد فترة تقارب $\frac{1}{2x}+\frac{2}{4x^2}+\frac{3}{8x^3}+\cdots+\frac{n}{2^n x^n}+\cdots$. إن هذه المتسلسلة هي متسلسلة قوى في $1/x$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}x^{n+1}}\cdot\frac{2^n x^n}{n}\right| = \frac{1}{2|x|}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2|x|}$$

والمتسلسلة متقاربة تقاربا مطلقا عندما $\frac{1}{2|x|} < 1$ أو عندما $|x| > \frac{1}{2}$.

وعندما $x = \frac{1}{2}$ تأخذ المتسلسلة الشكل $1+2+3+4+\cdots$. وعندما $x = -\frac{1}{2}$ تأخذ الشكل $-1+2-3+4-\cdots$ وكل من المتسلسلتين متباعدة . إذن المتسلسلة المفروضة متقاربة في الفترتين $x < -\frac{1}{2}$ و $x > \frac{1}{2}$ ومتباعدة في الفترة $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

١٠ – المتسلسلة $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ متقاربة عندما $|x| < 1$. فإذا فرضنا $\in = 0.000\,001$ فأوجد قيمة m بحيث يكون $|R_n(x)| < \in$ عندما $n > m$ وذلك عندما (أ) $x = \frac{1}{2}$ و (ب) $x = \frac{1}{4}$.

إن $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k x^k$ وبالتالي :

$$|R_n(\tfrac{1}{2})| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k(\tfrac{1}{2})^k\right| = \tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2})^{n-1} \quad \text{و} \quad |R_n(\tfrac{1}{4})| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k(\tfrac{1}{4})^k\right| = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{n-1}$$

(أ) لنبحث عن m بحيث يكون عندما $n > m$ فإن $\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{n-1} < 0.000\,001$ أو $1/2^{n-1} < 0.000\,003.$. وبما أن $1/2^{18} = 0.000\,004$ و $1/2^{19} = 0.000\,002,$ فإن $m = 19$.

(ب) لنبحث عن m بحيث يكون عندما $n > m$ فإن $\frac{1}{3}(\frac{1}{4})^{n-1} < 0.000\,001$ أو $1/4^{n-1} < 0.000\,005.$ هنا $m = 9$

١١ – برهن أنه إذا كانت متسلسلة القوى $\Sigma\, c_i\, x^i$ متقاربة عندما $x = x_1$ وإذا كان $|x_2| < |x_1|$ فإن المتسلسلة تتقارب تقاربا مطلقا عندما $x = x_2$. بما أن $\Sigma\, c_i\, x^i$ متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} c_n x_1^n = 0$ استنادا إلى النظرية XV من الفصل ٤٧ وحيث أن $\{|c_i x_1^i|\}$ متقاربة فهي محدودة ، لنكتب $0 < |c_n x_1^n| < k$ لجميع قيم n .

نفرض $r = |x_2/x_1|$ حيث $0 < r < 1$ عندئذ :

$$|c_n x_2^n| = |c_n x_1^n|\cdot|x_2^n/x_1^n| = |c_n x_1^n|\cdot|x_2/x_1|^n < Kr^n$$

وكل حد من المتسلسلة $\Sigma\, |c_n x_2^n|$ أصغر أو يساوي الحد المقابل من المتسلسلة الهندسية المتقاربة $\Sigma\, k\, r^n$ لذلك فهي متقاربة وفي الحقيقة متقاربة تقاربا مطلقا .

١٢ – برهن أن متسلسلة القوى تمثل دالة متصلة $f(x)$ داخل فترة تقارب المتسلسلة .

لنفرض $f(x) = \Sigma c_i x^i = S_n(x) + R_n(x).$ ولتكن $x = x_0$ داخل فترة التقارب المتسلسلة $\Sigma\, c_i\, x^i$ عندئذ توجد، استنادا إلى النظرية I فترة حول x_0 تكون المتسلسلة فيها متقاربة تقاربا منتظما . لكي نبرهن اتصال $f(x)$ عند $x = x_0$

يلزم أن نبرهن أن $\lim_{\Delta x \to 0} |f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| = 0$ عندما تكون $x_0 + \Delta x$ من الفترة I . أى أنه من الضرورى أن نبرهن أنه إذا كان ϵ عددا موجبا ، مهما كان صغيرا ، فإنه يمكن اختيار Δx بحيث يكون $x_0 + \Delta x$ فى I ويكون $|f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| < \epsilon$ والآن لأى Δx التى يكون عندها $x_0 + \Delta x$ فى الفترة I ، يكون

$$\begin{aligned} |f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| &= |S_n(x_0+\Delta x) + R_n(x_0+\Delta x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)| \qquad (i) \\ &\le |S_n(x_0+\Delta x) - S_n(x_0)| + |R_n(x_0+\Delta x)| + |R_n(x_0)| \end{aligned}$$

لنفرض أننا اخترنا ϵ وبما أن $x_0 + \Delta x$ من فترة تقارب المتسلسلة فإنه يوجد عدد صحيح موجب m بحيث إذا كان $n > m$ فإن $|R_n(x_0+\Delta x)| < \epsilon/3$ و $|R_n(x_0)| < \epsilon/3$. وبما أن $S_n(x)$ متعددة حدود فإنه من الممكن اختيار $|\Delta x|$ صغيرا بقدر كاف بحيث يكون $|S_n(x_0+\Delta x) - S_n(x_0)| < \epsilon/3$ ولهذا الإختيار الجديد Δx تبقى $|R_n(x_0+\Delta x)|$ أصغر من $\epsilon/3$ لأن المتسلسلة متقاربة تقاربا منتظما فى I . أما $|R_n(x_0)|$ فتبقى غير متغيرة . وهكذا نجد من (i) أن :

$$|f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

إذن الدالة $f(x)$ متصلة لجميع قيم x داخل فترة تقارب المتسلسلة .

١٣ — برهن أنه إذا كانت $\Sigma c_i x^i$ متقاربة إلى الدالة $f(x)$ فى فترة ما وكان $x = a$ و $x = b$ ضمن هذه الفترة فـإن :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1 x\,dx + \int_a^b c_2 x^2\,dx + \cdots + \int_a^b c_{n-1} x^{n-1}\,dx + \cdots$$

لنفرض $b > a$ ولنكتب $f(x) = \Sigma c_i x^i = S_n(x) + R_n(x).$ فيكون عندئذ :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b S_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx$$

و

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|$$

وبما أن $\Sigma c_i x^i$ متقاربة فى فترة ما ولتكن $|x| < P$ فإن المتسلسلة متقاربة تقاربا منتظما فى الفترة $|x| \le p < P$ التى تحتوى $x = a$ و $x = b$. إذن لأى قيمة لـ ϵ أكبر من الصفر مهما كانت صغيرة يمكن اختيار عدد n كبيرا بقدر كاف بحيث يكون $|R_n(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$ لجميع قيم x التى تحقق الشرط $|x| \le p$. إذن :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = 0, \quad \text{and} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Sigma \int_a^b c_i x^i\,dx$$

وهو المطلوب .

مسائل اضافية

١٤ — أوجد فترة تقارب كل متسلسلات القوى التالية :

(ا) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

(ب) $\frac{x}{1\cdot 2} + \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^3}{3\cdot 4} + \frac{x^4}{4\cdot 5} + \cdots$

(ج) $x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} - \frac{x^4}{4^4} + \cdots$

(د) $\frac{x}{5} - \frac{x^2}{2\cdot 5^2} + \frac{x^3}{3\cdot 5^3} - \frac{x^4}{4\cdot 5^4} + \cdots$

(ﻫ) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \frac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$

(و) $\frac{x^2}{(\ln 2)^2} + \frac{x^3}{(\ln 3)^3} + \frac{x^4}{(\ln 4)^4} + \frac{x^5}{(\ln 5)^5} + \cdots$

(ز) المتسلسلة التى نحصل عليها من اشتقاق (ا) حدا حدا .

(ح) المتسلسلة التى نحصل عليها من اشتقاق (ب) حدا حدا .

(ط) $x + \frac{x^2}{1+2^3} + \frac{x^3}{1+3^3} + \frac{x^4}{1+4^3} + \cdots$

(ى) المتسلسلة التى نحصل عليها من اشتقاق (ط) حدا حدا .

(ك) المتسلسلة التى نحصل عليها من اشتقاق (ى) حدا حدا .

(ل) المتسلسلة التى نحصل عليها من تكامل (ا) حدا حدا .

(م) المتسلسلة التى نحصل عليها من تكامل (ج) حدا حدا .

(ن) $(x-2) + \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(x-2)^3}{9} + \frac{(x-2)^4}{16} + \cdots$

(س) $\frac{x-3}{1\cdot 3} + \frac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \frac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3} + \frac{(x-3)^4}{4\cdot 3^4} + \cdots$ (ع) $1 - \frac{3x-2}{5} + \frac{(3x-2)^2}{5^2} - \frac{(3x-2)^3}{5^3} + \cdots$

(ف) المتسلسلة التى نحصل عليها من اشتقاق (ن) حدا حدا .

(ص) المتسلسلة التى نحصل من تكامل (ن) حدا حدا .

(ق) $1 + \frac{x}{1-x} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \cdots$ (ر) $1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \cdots$

(ش) $\frac{1}{2} + \frac{x^2+6x+7}{2^2} + \frac{(x^2+6x+7)^2}{2^3} + \frac{(x^2+6x+7)^3}{2^4} + \cdots$

ج : (ا) $-1\ x < 1$ (و) جميع قيم x (ك) $-1 \le x < 1$ (ع) $-1 < x < 7/3$ (ر) $x < -1,$

(ب) $-1 \le x \le 1$ (ز) $-1 < x < 1$ (ل) $-1 < x < 1$ (ف) $1 \le x < 3$ (ش) $x > 1$

(ج) جميع قيم x (ح) $-1 \le x < 1$ (م) جميع قيم x . (ص) $1 \le x \le 3$ (ت) $-5 < x < -3,$ $-3 < x < -1$

(د) $-5 < x \le 5$ (ط) $-1 \le x \le 1$ (ن) $1 \le x \le 3$ (ق) $x < \frac{1}{2}$

(ه) $-1 \le x \le 1$ (ى) $-1 \le x \le 1$ (س) $0 \le x < 6$

١٥ – برهن أنه يمكن اشتقاق متسلسلة القوى حدا حدا داخل فترة تقاربها .

إرشاد : إن كلا من $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$ و $\sum_{j=1}^{+\infty} j c_j x^{j-1} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{d}{d_n}(c_j x^j)$ يتقاربان عندما $|x| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

استخدم النظريات I و II و V لتبين أن $\int_0^x f'(x)\,dx = f(x)$.

١٦ – برهن أن تمثيل الدالة $f(x)$ فى متسلسلة قوى فى x تمثيل وحيد .

إرشاد : ليكن $f(x) = \Sigma s_n x^n$ و $f(x) = \Sigma t_n x^n$ فى الفترة $|x| < a$ حيث $a \neq 0$. لنضع $x = 0$ فى $\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0,$ و $\frac{d}{dx}\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0,\ \frac{d^2}{dx^2}\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0, \ldots$ لنحصل على $s_j = t_j,\ j = 0, 1, 2, 3, \ldots$

الفصل الثانى والخمسون

فك الدوال فى متسلسلات

يمكن توليد متسلسلة قوى فى x بطرق شتى . لنتصور ، على سبيل المثال استمرار عملية القسمة التالية إلى مالا ... فنجــد أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots \qquad (١)$$

(يلاحظ أن هذه العلاقة باطلة تماما عندما $x = 5$ مثلا) . سنبين فى المسألة ١ أن المتسلسلة (١) تمثل $\frac{1}{1-x}$ فى الفترة $|x| < 1$ فقط ، أى أن :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

وسنرى فى المسألتين ٢ — ٣ طرقا أخرى لتوليد متسلسلات قوى .

الطريقة العامة لفك دالة فى متسلسلة قوى فى x وفى $(x - a)$ سنوردها فيما يلى :

نلاحظ أنه يشترط فى فك دالة أن توجد الدالة مع مشتقاتها من جميع الرتب عند $x = 0$ أو عند $x = a$ ، فالدوال ... و $\ln x$ و $\cot x$ لايمكن أن تفك فى متسلسلة قوى .

متسلسلة ماكلورين • إذا افترضنا أنه يمكن تمثيل الدالة المفروضة فى متسلسلة قوى فى x فإن هذه المتسلسلة يجب أن تكون بالضرورة من شكل متسلسلة ماكلورين .

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots \qquad (٢)$$

متسلسلة تايلور : إذا افترضنا أنه يمكن تمثيل الدالة المفروضة فى متسلسلة قوى فى $(x - a)$ فإن هذه المتسلسلة يجب أن تكون بالضرورة من شكل متسلسلة تايلور :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 \qquad (٣)$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

أنظر المسألة ٤

أما السؤال عن الفترة التى تتمثل فيها $f(x)$ بمتسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور فسننظر فيها فى الفصل التالى . غير أنه فيما يتعلق بالدوال التى تمر معنا فى هذا الكتاب فإن الفترة التى تمثل فيها المتسلسلة الدالة المفروضة تنطبق مع فترة تقارب المتسلسلة .

أنظر المسائل ٥ — ١١

يمكن الحصول على شكل آخر مفيد جدا لمتسلسلة تايلور بتبديل x بـ $a+h$ فى (٣) :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \cdots$$

مسائل محلولة

١ — إن متسلسلة القوى $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$ هى متسلسلة هندسية لانهائية فيها $a = 1$ و $r = x$. لذلك فإن هذه المتسلسلة تتقارب إلى $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x}$; عندما $|r| = |x| < 1$. أما إذا كان $|r| = |x| \geq 1$ فالمتسلسلة متباعدة .

٢ — نحصل باشتقاق المتسلسلة التى مرت فى المسألة (١) مرتين متتاليتين على متسلسلتى القوى :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \quad \text{(i)}$$
$$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots + n(n+1)x^{n-1} + \cdots \quad \text{(ii)}$$

ونحصل بتكاملهما بين حدى التكامل 0 و x مرتين متتاليتين على متسلسلتى القوى :

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots \quad \text{(iii)}$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} + \cdots \quad \text{(iv)}$$

٣ — أوجد متسلسلة القوى $y = \Sigma c_n x^n$ التى تحقق الشروط التالية :

(i) $y = 2$ عندما $x = 0$ ، (ii) $y' = 1$ عندما $x = 0$ ، (iii) $y'' + 2y' = 0$.

لننظر فى :

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots \quad (\text{ا})$$
$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots \quad (\text{ب})$$
$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \cdots \quad (\text{ج})$$

وإذا عوضنا $y = 2$ و $x = 0$ فى (ا) نجد $c_0 = 2$. وإذا عوضنا $x = 0$ ، $y' = 1$ فى (ب) نجد $c_1 = 1$ وبما أن $y'' = -2y'$ فإن :

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \cdots = -2c_1 - 4c_2x - 6c_3x^2 - 8c_4x^3 - \cdots$$

ومنها ينتج أن $c_2 = -c_1 = -1,\ c_3 = -\frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3},\ c_4 = -\frac{1}{2}c_3 = -\frac{1}{3}, \cdots$ وعلى هذا فالمتسلسلة المطلوبة هى :

$$y = 2 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$$

٤ — بفرض أن (i) $f(x)$ موجودة مع مشتقاتها من جميع الرتب عند $x = a$ وأن (ii) $f(x)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة قوى فى $(x - a)$ فبين أن هذه المتسلسلة هى :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

لنفرض أن المتسلسلة هى :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots \quad (\text{ا})$$

وبالاشتقاق المتتالى نجـــد :

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots \quad \text{(ب)}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 + \cdots + (n+1)nc_{n+1}(x-a)^{n-1} + \cdots \quad \text{(ج)}$$

$$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + \cdots + (n+2)(n+1)nc_{n+2}(x-a)^{n-1} + \cdots \quad \text{(د)}$$

....

....

لنضع $x = a$ فى (١) ، (ب) ، (ج) . . . . فنجـــد :

$$c_0 = f(a),\; c_1 = f'(a),\; c_2 = \frac{1}{2!}f''(a),\; \ldots,\; c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a),\; \ldots$$

وبالعودة إلى (١) والتعويض بهذه النتائج نجد متسلسلة تايلور المطلوبة .

أوجد مفكوك الدالة المعطاة فى كل من المسائل من ٥ إلى ١٠ فى متسلسلة قوى فى x أو فى $x - a$ حسبما يطلب . وذلك تحت الشروط الواردة فى هذا الباب وعين فترة تقارب المتسلسلة .

٥ – e^{-2x} فى متسلسلة قوى فى x .

إن

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-2x} & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -2e^{-2x} & f'(0) &= -2 \\ f''(x) &= 2^2e^{-2x} & f''(0) &= 2^2 \\ f'''(x) &= -2^3e^{-2x} & f'''(0) &= -2^3 \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

إذن

$$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{2^n}{n!}x^n + \cdots$$

وبما أن

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^nx^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

إذن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

٦ – $\sin x$ فى متسلسلة قوى فى x .

إن

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

ومنه نجد أن قيم المشتقات عند $x = 0$ هى 0 ، 1 ، 0 ، -1 ، . . . . إلخ وبالتالى :

$$\sin x = 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

وبما أن

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0$$

إذن المتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

٧ — $\ln(1+x)$ في متسلسلة قوى في x .

إن

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -1\\
f'''(x) &= \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3} & f'''(0) &= 2!\\
f^{iv}(x) &= -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} & f^{iv}(0) &= -3!\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2!} + 2!\frac{x^3}{3!} - 3!\frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{x^n}{n!} + \cdots\\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots
\end{aligned}$$

واستنادا إلى المسألة ١ من الفصل ١٥ نرى أن فترة تقارب المتسلسلة هي $-1 < x \le 1$

٨ — $\arctan x$ في متسلسلة قوى في x

إن

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arctan x & f(0) &= 0\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots & f'(0) &= 1\\
f''(x) &= -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots & f''(0) &= 0\\
f'''(x) &= -2 + 12x^2 - 30x^4 + \cdots & f'''(0) &= -2!\\
f^{iv}(x) &= 24x - 120x^3 + \cdots & f^{iv}(0) &= 0\\
f^{v}(x) &= 24 - 360x^2 + \cdots & f^{v}(0) &= 4!\\
f^{vi}(x) &= -720x + \cdots & f^{vi}(0) &= 0\\
f^{vii}(x) &= -720 + \cdots & f^{vii}(0) &= -6!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= x - \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 - \frac{6!}{7!}x^7 + \cdots\\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots
\end{aligned}$$

وفترة التقارب ، استنادا إلى المسألة ٧ من الفصل ١٥ هي $-1 \le x \le 1$

٩ — $e^{x/2}$ في متسلسلة قوى في $(x-2)$.

إن

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x/2} & f(2) &= e\\
f'(x) &= \tfrac{1}{2}e^{x/2} & f'(2) &= \tfrac{1}{2}e\\
f''(x) &= \tfrac{1}{4}e^{x/2} & f''(2) &= \tfrac{1}{4}e
\end{aligned}$$

$$e^{x/2} = e\left\{1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{(x-2)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right\}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^n}{2^n n!}\cdot\frac{2^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^{n-1}}\right| = \frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

والمتسلسلة متقاربة لجميع قيم x .

١٠ – $\ln x$ فى متسلسلة قوى فى $(x-2)$.

$$\begin{array}{llll} f(x) = \ln x & & f(2) = \ln 2 \\ f'(x) = x^{-1} & & f'(2) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = -x^{-2} & & f''(2) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) = 2x^{-3} & & f'''(2) = \frac{1}{4} \\ f^{iv}(x) = -6x^{-4} & & f^{iv}(2) = -\frac{3}{8} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \end{array}$$

إن

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots$$
$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$$

وبما أن $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}\cdot\frac{2^n n}{(x-2)^n}\right| = \frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}|x-2|$

إذن المتسلسلة متقاربة عندما $|x-2| < 2$ أو $0 < x < 4$.

وإذا عوضنا بـ $x = 0$ نجد أن المتسلسلة تساوى $\ln 2$ مطروح منها المتسلسلة التوافقية وهى متباعدة . أما إذا عوضنا بـ $x = 4$ فإننا نجد أن المتسلسلة هى $\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ وهى متقاربة . إذن المتسلسلة متقاربة فى الفترة $0 < x \le 4$.

١١ – أوجد مفكوك ماكلورين لـ $\sqrt{1+\sin x} = \sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x.$

لنضع $x\ \frac{1}{2}$ بدلا من x فى مفكوك $\sin\ x$ (المسألة ٦) فنحصل على :

$$\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5\cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7\cdot 7!} + \cdots$$

اشتق هذا المفكوك ، بعد ذلك ، لنحصل على :

$$\cos\frac{1}{2}x = 2\left\{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^3\cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5\cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7\cdot 6!} + \cdots\right\}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} - \frac{x^6}{2^6\cdot 6!} + \cdots$$

إذن :

$$\sqrt{1+\sin x} = \sin\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} + \frac{x^5}{2^5\cdot 5!} - \cdots,$$

لجميع قيم x .

١٢ – أوجد مفكوك ماكلورين لـ $e^{\cos x} = e\cdot e^{(\cos x - 1)}$

باستخدام $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$ و $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots,$ نجد :

$$e^{\cos x} = e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{2x^6}{2!\,4!} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^6}{(2!)^3} + \cdots\right) + \cdots\right\}$$
$$= e\left\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31}{720}x^6 + \cdots\right\}$$

١٣ – برهن ، بفرض أن جميع شروط العمليات الضرورية محققة ، إن (أ) $e^{ix} = \cos x + i\sin x,$ (ب) $e^{-ix} = \cos x - i\sin x,$ (جـ) $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i,$ (د) $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2,$

حيث $i = \sqrt{-1}$:

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

(أ) $$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \cos x + i \sin x$$

(ب) $$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

(جـ) $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x;$ وبالتالي $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i.$

(د) $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x;$ وبالتالي $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2.$

مسائل اضافية

١٤ – تحقق من أن (أ) المتسلسلة (i) والمتسلسلة (ii) من المسألة ٢ متقاربتان عندما $|x| < 1$ ؛ وأن (ب) المتسلسلة (iii) متقاربة عندما $-1 \le x < 1$ ؛ وأن (جـ) المتسلسلة (iv) متقاربة عندما $-1 \le x \le 1$

١٥ – تحقق من أن (أ) المتسلسلة التي نحصل عليها بجمع المتسلسلتين (i) و (ii) من المسألة ٢ متقاربة عندما $|x| < 1$ ؛ وأن (ب) المتسلسلة التي نحصل عليها بجمع المتسلسلتين (iii) و (iv) متقاربة عندما $-1 \le x < 1$.

١٦ – عين متسلسلة القوى $y = \Sigma c_n x^n$ التي تحقق الشروط (i) $y = 2$ عندما $x = 0$ ، (ii) $y' = 0$ عندما $x = 0$ ، (iii) $y'' - y = 0.$

ج : $y = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + \cdots + \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$

١٧ – عين متسلسلة القوى $y = \Sigma c_n x^n$ التي تحقق الشروط (i) $y = 1$ عندما $x = 0$ ، (ii) $y' = 1$ عندما $x = 0$ ، (iii) $y'' + y = 0.$

ج : $y = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

١٨ – أوجد المفكوك في متسلسل ماكلورين :

(أ) $\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$ لجميع قيم x .

(ب) $\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(جـ) $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(د) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \quad -1 < x < 1$

(هـ) $\sin^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$ لجميع قيم x .

١٩ – أوجد المفكوك في متسلسلة تايلور :

(أ) $e^x = e^a\left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right],$ لجميع قيم x .

(ب) $\sin x = \sin a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\sin a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots,$ لجميع قيم x .

(جـ) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - (x - \tfrac{1}{4}\pi) - \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^2}{2!} + \frac{(x - \frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \cdots\right],$ لجميع قيم x .

٢٠ – اشتق مفكوك $\sin x$ (المسألة ٦) لتحصل على مفكوك $\cos x$. تحقق بعد ذلك من أن حل المسألة ١٧ هو :
$y = \sin x + \cos x$

٢١ – ضع فى مفكوك e^{-2x} (المسألة ٥) $\frac{1}{2}x$ بدلا من x لتحصل على مفكوك e^{-x} ، وضع فى هذه المتسلسلة الأخيرة $-x$ بدلا من x لتحصل على مفكوك e^{x} . ثم تحقق من أن حل المسألة ١٦ هو $y = e^{x} + e^{-x}$

٢٢ – أوجد مفكوك ماكلورين : $\sin^2 x = (\sin x)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{3!\,5!} - \frac{96x^8}{3!\,7!} + \cdots$, لجميع قيم x .

٢٣ – برهن أن $\int_0^x e^{-y^2}\,dy = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots$, لجميع قيم x .

٢٤ – أوجد ، بالتقسيم ، مفكوك $\frac{1}{1+x^2}$ ثم احصل على :

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

وقارن بالمسألة ٨ .

٢٥ – برهن باستخدام نظرية ذات الحدين أن $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots$; ثم احصل على :

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

٢٦ – اضرب مفكوك المتسلسلات المتتالية لتحصل على :

(ا) $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots$ (ب) $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \cdots$

٢٧ – أكتب $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$ تخلص من الكسور فى المساواة الأخيرة ثم ساوى بين معاملات قوى x المتساوية لتحصل على مفكوك $\sec x$.

الفصل الثالث والخمسون

صيغ ماكلورين وتايلور مع البواقى

صيغة ماكلورين • إذا كانت الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الـ n الأولى متصلة فى فترة تحوى $x = 0$ ، فعندئذ يوجد عددان x_0 ، x^*_0 بين 0 ، x بحيث يكون :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n, \quad \text{(شكل لاجرانج)}$$

أو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x - x_0^*)^{n-1}x, \quad \text{(شكل كوشى)}$$

صيغة تايلور : إذا كانت الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الـ n الأولى متصلة فى فترة تحوى $x = a$ فيوجد عندئذ عددان x_0 ، x^*_0 بين a ، x بحيث يكون :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

حيث

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \quad \text{(شكل لاجرانج)}$$

أو

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x - x_0^*)^{n-1}(x-a), \quad \text{(شكل كوشى)}$$

إن صيغة ماكلورين هى حالة خاصة $(a = 0)$ من صيغة تايلور ، وإن صيغة تايلور مع الباقى على شكل لاجرانج هى قانون القيمة المتوسطة الموسع مع تحوير بسيط (أنظر الفصل ٢١) . لاستنتاج الصيغة مع الباقى على شكل كوشى أنظر المسألة ١٠ .

ونلاحظ أن مفكوك الدالة $f(x)$ على شكل متسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور التى حصلنا عليه فى الفصل ٥٢ يمثل دالة القيم x التى فقط تحقق الشرط :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

متسلسلات كمرجع : نذكر فيما يلى بعض المتسلسلات مع الفترات التى تمثل عليها الدوال وذلك للرجوع إليها عند الحاجة .

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\sin ax = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(ax)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\cos ax = 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(ax)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\ln(a+x) = \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n} + \cdots \quad -a < x \leq a.$$

$$\arcsin x = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)(2n-1)} + \cdots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)a^{n-1}}(x-a)^{n-1} + \cdots \quad 0 < x \leq 2a$$

$$e^x = e^a\left\{1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right\} \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\sin x = \sin a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\sin a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

$$\cos x = \cos a - (x-a)\sin a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cos a + \frac{(x-a)^3}{3!}\sin a + \cdots \quad (\text{لجميع قيم } x)$$

مسائل محلولة

١ — أوجد الفترة التى يمكن فيها تمثيل e^x بمتسلسلة ماكلورين .

أن $f^{(n)}(x) = e^x$; والباقى على شكل لاجرانج هو e^{x_0}, $|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\right| = \frac{|x^n|}{n!}e^{x_0}$ ، حيث x_0 بين 0 و x .

إن العامل $\frac{x^n}{n!}$ هو الحد العام للمتسلسلة $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ التى نعلم أنها متقاربة لجميع قيم x .

وعلى هذا فإن $\lim_{n \to +\infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0.$ ، أما العامل e^{x_0} فهو محدد لجميع قيم x .

وعلى هذا فإن $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ يساوى حاصل ضرب صفر فى عدد محدد وهو يساوى الصفر ، وبالتالى فإن المتسلسلة تمثل e^x لجميع قيم x .

٢ — أوجد الفترة التى يمكن فيها تمثيل $\sin x$ بمتسلسلة ماكلورين .

إن $f^{(n)}(x)$ بغض النظر عن الإشارة ، تساوى $\sin x$ أو $\cos x$ ، وعلى هذا فإن $|R_n(x)| = \frac{|x^n|}{n!}|\sin x_0|$ أو $\frac{|x^n|}{n!}|\cos x_0|,$ حيث x_0 بين x ، 0 .

ثم إن $\frac{x^n}{n!} \to 0$ عندما $n \to +\infty$ استنادا إلى المسألة ١ ، وبما أنه لا يمكن لـ $|\sin x_0|$ أو $|\cos x_0|$ أن يتجاوز الواحد فإن $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ والمتسلسلة تمثل $\sin x$ لجميع قيم x .

٣ — أوجد الفترة التى يمكن فيها تمثيل $\cos x$ بمتسلسلة تايلور فى $(x - a)$.

باستخدام الباقى على شكل لاجرانج نجد أن $|R_n(x)|$ تساوى $\frac{|(x-a)^n|}{n!}|\sin x_0|$ أو $\frac{|(x-a)^n|}{n!}|\cos x_0|,$ حيث x_0 بين a ، x .

وبما أن $\frac{|(x-a)^n|}{n!} \to 0$ عندما $n \to +\infty$ فى حين لا يمكن لـ $|\sin x_0|$ و $|\cos x_0|$ أن تتجاوز الواحـد فإن $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ والمتسلسلة تمثل $\cos x$ لجميع قيم x .

٤ — أوجد الفترة التى يمكن فيها تمثيل $\ln(1 + x)$ بمتسلسلة ماكلورين .

أن $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n};$ فإذا كانت x_0 و x^*_0 بين 0 . x فإن

(أ) الباقى على شكل لاجرانج هو

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+x_0}\right)^n$$

(ب) الباقى على شكل كوشى هو

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{(x-x_0^*)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x_0^*)^n}x = (-1)^{n-1}\frac{x(x-x_0^*)^{n-1}}{(1+x_0^*)^n}$$

وعندما $0 < x_0 < x \le 1,$ يكون $0 < x < 1 + x_0$ و $\frac{x}{1+x_0} < 1;$ ، وباستخدام (أ) يكون :

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x_0}\right)^n < \frac{1}{n} \quad \text{و} \quad \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

وعندما $-1 < x < x_0^* < 0,$ فإن $0 < 1+x < 1+x_0^*$ ومنه $\frac{1}{1+x_0^*} < \frac{1}{1+x}$ وباستخدام (ب) نجـد

$$|R_n(x)| = \frac{|x-x_0^*|^{n-1}}{(1+x_0^*)^n}|x| = \left|\frac{x_0^*-x}{1+x_0^*}\right|^{n-1}\cdot\frac{|x|}{1+x_0^*} = \left(\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*}\right)^{n-1}\cdot\frac{|x|}{1+x_0^*} < \left(\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*}\right)^{n-1}\cdot\frac{|x|}{1+x}$$

وبما أن $|x| < 1$ فإن $x_0^* < x_0^*|x|,$ و $x_0^* + |x| < |x| + x_0^*|x|$ ومنه . $\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*} < |x|$ وهكذا فإن :

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{1+x} \quad \text{و} \quad \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

وبالتالى فإنه يمكن تمثيل $\ln(1 + x)$ فى متسلسلة ماكلورين فى الفترة $-1 < x \le 1$.

٥ — لمتسلسلة ماكلورين الممثلة لـ e^x برهن أن :

$|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n!}$ عندما $x < 0$ و $R_n(x) < \frac{x^n e^x}{n!}$ عندما $x > 0$.

استنادا إلى المسألة (١) نجد أن $R_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{x_0}$, حيث x_0 بين 0 ، x وعندما $x < 0$ يكون $e^{x_0} < 1$ ، وبالتالى فإن $|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n!}$ وعندما $x > 0$ يكون $e^{x_0} < e^x$ ومنه $R_n(x) < \frac{x^n e^x}{n!}$.

٦ – لمتسلسلة ماكلورين الممثلة لـ $\ln(1+x)$ برهن أن :

$R_n(x) < \frac{x^n}{n}$ عندما $0 < x \leq 1$ و $|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n(1+x)^n}$ عندما $-1 < x < 0$

استنادا إلى المسألة ؛ (١) نجد أن $|R_n(x)| = \frac{1}{n}\left|\frac{x}{1+x_0}\right|^n$, حيث x_0 بين 0 ، x وعندما $0 < x_0 < x \leq 1$ يكون $\frac{1}{1+x_0} < 1$; ومنه $|R_n(x)| < \frac{x^n}{n}$. وعندما $-1 < x < x_0 < 0$, و $1+x_0 > 1+x$ و $\frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{1+x}$; إذن $|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n(1+x)^n}$

مسائل اضافية

٧ – عين الفترة التى يمكن فيها تمثيل $\cos x$ بمتسلسلة ماكلورين

ج : جميع قيم x

٨ – عين الفترة التى يمكن فيها تمثيل (١) e^x و(ب) $\sin x$ بمتسلسلة تايلور فى $(x-a)$

ج : جميع قيم x .

٩ – بين أنه يمكن تمثيل $\ln x$ بمتسلسلة تايلور فى $(x-a)$ فى الفترة $0 < x \leq 2a$

إرشاد : إن $|R_n(x)| = \left|\frac{(x-a)(x-x_0^*)^{n-1}}{(x_0^*)^n}\right|$ وعندما $0 < x < a$ و $a < x \leq 2a$ يكون $\left|\frac{x-x_0^*}{x_0^*}\right| < 1.$

١٠ – لتكن T معرفة بـ

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + T(b-a)$$

ولنعرف

$$F(x) = -f(b) + f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + T(b-x)$$

اتبع خطوات المسألة ١٥ فى الفصل ٢١ لتحصل على صيغة تايلور بباق على شكل كوشى .

١١ – (١) ضع $x^*_0 = a + \theta(x-a)$ حيث $0 < \theta < 1$ فى باق متسلسلة تايلور على شكل كوشى . لتبرهن أن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n$$

(ب) برهن أن $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}x^n$ فى صيغة ماكلورين .

١٢ – برهن أنه يمكن تمثيل $\frac{1}{1-x}$ بمتسلسلة ماكلورين فى الفترة $-1 \leq x < 1$

إرشاد : استنادا إلى المسألة (١١) (ب)، $R_n(x) = \frac{n(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}$, حيث $0 < \theta < 1$ وعندما $|x| < 1$ يكون $\frac{1-\theta}{1-\theta x} < 1$ و $1 - \theta x > 1 - |x|$.

١٣ – (١) برهن أن $xe^x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n$, لجميع قيم x وأن $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} = e$. برهن أيضا أن $(x^2+x)e^x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}x^n$ أن $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e.$ (ب) برهن أن $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!} = 5e$ و $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n^4}{n!} = 15e.$

الفصل الرابع والخمسون

حسابات عددية باستخدام متسلسلات قوى

جداول اللوغاريتمات . لقد تم حساب الدوال المثلثية وغيرها بالإستعانة بمتسلسلات قوى ، وسنقترح استخدامات أخرى لهذه المتسلسلات فى المسائل التالية .

وينبغى بإستمرار أن يكون لدينا تقدير عن مدى صلاحية مجموع الحدود الـ n الأولى من المتسلسلة فى تمثيل الدالة المفروضة لقيمة مفروضة للمتغير . وسنذكر لهذا الغرض نظريتين من فصل سابق .

١ – إذا كانت الدالة $f(x)$ ممثلة بمتسلسلة متناوبة وكان $x = \xi$ فى فترة تقارب المتسلسلة ، فإن الخطأ الذى ينتج من استخدام مجموع قيم الحدود الـ n الأولى كقيمة تقريبية لـ $f(\xi)$ لا يتجاوز القيمة العددية لأول حد نهمله .

٢ – أما إذا كانت الدالة $f(x)$ ممثلة بمتسلسلة تايلور وكان $x = \xi$ فى فترة تقارب المتسلسلة . فإن الخطأ الذى ينتج من استخدام مجموع قيم الحدود الـ n الأولى كقيمة تقريبية لـ $f(\xi)$ لا يتجاوز القيمة العددية $\frac{M}{n!} \mid x - a \mid ^n$ ، حيث M أكبر من القيمة العظمى لـ $\mid f^{(n)}(x) \mid$ فى الفترة من a إلى ξ . أو مساوها .

ويكون فى حالة متسلسلة ماكلورين $a = 0$.

مســائل محلولة

١ – أوجد قيمة $1/e$ لخمسة أرقام عشرية صحيحة .

$$
\begin{aligned}
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \\
e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots \\
&= 1 - 1 + 0.500\,000 - 0.166\,667 + 0.041\,667 - 0.008\,333 + 0.001\,389 \\
&\qquad - 0.000\,198 + 0.000\,025 - 0.000\,003 + \cdots \\
&= 0.367\,88
\end{aligned}
$$

٢ – أوجد قيمة $\sin 62^\circ$ لخمسة أرقام صحيحة .

إن متسلسلة تايلور لـ $\sin u$ فى قوى $(x - a)$ هى :

$$\sin x = \sin a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\sin a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots$$

فإذا أخذنا $a = 60^\circ$ ، حيث أنها قريبة من 62° ودوالها المثلثية معروفة ، فإننا نجـد :

$$x - a = 62^\circ - 60^\circ = 2^\circ = \pi/90 = 0.034\,907$$

ومنـه

$$\begin{aligned}\sin 62^\circ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(0.034\,907) - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,(0.034\,907)^2 - \tfrac{1}{12}(0.034\,907)^3 + \cdots \\ &= 0.866\,025 + 0.017\,454 - 0.000\,528 - 0.000\,004 + \cdots = 0.882\,95\end{aligned}$$

٣ – أوجد قيمة $\ln 0.97$ لسبعة أرقام عشرية صحيحة :

$$\ln(a - x) = \ln a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \cdots - \frac{x^n}{na^n} - \cdots$$

لنأخذ $a = 1$ و $x = 0.03$ فنجـد :

$$\ln 0.97 = -0.03 - \tfrac{1}{2}(0.03)^2 - \tfrac{1}{3}(0.03)^3 - \tfrac{1}{4}(0.03)^4 - \tfrac{1}{5}(0.03)^5 - \cdots = -0.030\;4592$$

٤ – كم عدد الحدود التي ينبغي أن نستخدمها من مفكوك $\ln(1 + x)$ كي نتأكد من الحصول على $\ln 1.02$ بخطأ لايتجاوز $0.000\,000\,05$ ؟

إن :

$$\ln 1.02 = 0.02 - \frac{(0.02)^2}{2} + \frac{(0.02)^3}{3} - \frac{(0.02)^4}{4} + \cdots$$

وبما أن هذه المتسلسلة متقاربة فإن الخطأ الناتج عن إهمال جميع الحدود التي تلي الحدود الـ n الأولى لايتجاوز القيمة العددية لأول حد نهمله . والمسألة هنا إذن تنحصر في إيجاد أول حد تكون قيمته العددية أقل من $0.000\,000\,05$ ، وهذا الأمر يتم بالتجريب :

$$\frac{(0.02)^4}{4} = 0.000\,000\,04 \quad , \quad \frac{(0.02)^3}{3} = 0.000\;0027$$

ونحصل على الدقة المطلوبة إذا اقتصرنا على الحدود الثلاثة الأولى .

٥ – لأية قيمة لـ x يمكن التعويض عن $\sin x$ بـ x إذا كان الخطأ المسموح به 0.0005 ؟ .

بما أن $\sin x = x - x^3/3! + \cdots$ متسلسلة متناوبة . إذن الخطأ الناتج عن استخدام الحد الأول فقط لايتجاوز $|x^3|/3!$.

وهنا يجب أن يكون $|x^3|/3! = 0.0005$ ومنه $|x^3| = 0.003$.

أو $|x| = 0.1442$ أي $|x| < 8^\circ\;15'$

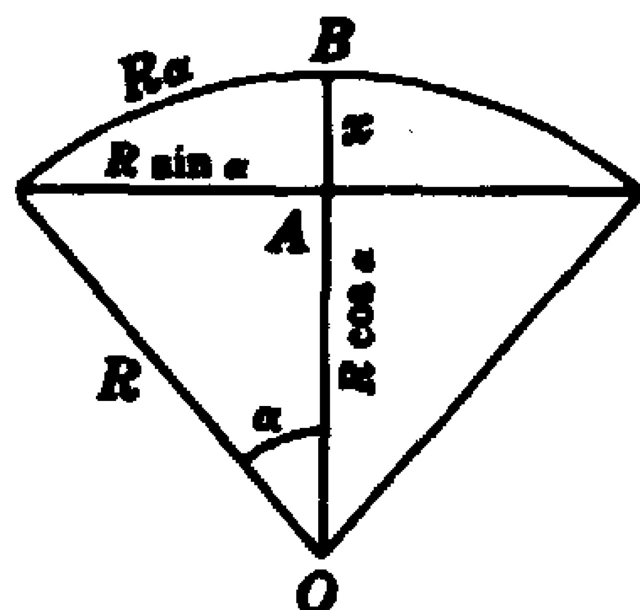
٦ – ماقيمة الزاوية التي يجب استخدامها لحساب قيمة $\cos x$ من ثلاثة حدود من متسلسلة تايلور في قوى $(x - \pi/3)$ ، بشرط ألا يزيد الخطأ عن $0.000\,05$ ؟

بما أن $f'''(x) = \sin x,\ |R_3| = \frac{|\sin x_0|}{3!}|x - \pi/3|^3,$ حيث x_0 بين $\pi/3$ و x .

وبما أن $|\sin x_0| \le 1$ و $|R_3| \le \frac{1}{6}|x-\pi/3|^3 = 0.000\,05.$.

فإن $|x - \pi/3| \le \sqrt[3]{0.0003} = 0.0669 = 3°50'.$ وعلى هذا فإنه يمكن لـ x أن تأخذ أية قيمة محصورة بين $56°16'$ و $63°50'$.

٧ – احسب بالتقريب أقصى بعد لقوس دائرة عظمى على الكرة الأرضية طوله 160 km عن وتره .



شكل ٥٤ – ١

لنفرض x البعد المطلوب . فيتضح من الشكل ٥٤ – ١ أن $x = OB - OA = R - R\cos\alpha,$ حيث R نصف قطر الأرض . وبما أن الزاوية α صغيرة فإن $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}x^2$ تقريباً ، وبالتالي :

$$x = R\{1 - (1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2)\} = \tfrac{1}{2}R\alpha^2 = (R\alpha)^2/2R = (80)^2/2R$$

وإذا أخذنا : $R = 6400$ km نجـد : $x = 0.5$ km

٨ – استنتج الصيغة التقريبية $\sin(\frac{1}{4}\pi + x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+x)$ ثم استخدمها فى حساب $\sin 43°$.

باستخدام الحدين الأولين من مفكوك تايلور نجد :

$$\sin(\tfrac{1}{4}\pi + x) = \sin\tfrac{1}{4}\pi + x\cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1+x)$$
$$\sin 43° = \sin[\tfrac{1}{4}\pi + (-\pi/90)] = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 - 0.0349) = 0.6824$$

٩ – حل المعادلة $\cos x - 2x^2 = 0$

لنستبدل بـ $\cos x$ الحدين الأولين $1 - \frac{1}{2}x^2$ من مفكوك ماكلورين لـ $\cos x$ فيكون :

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x^2 = 0 \quad \text{أو} \quad 2 - 5x^2 = 0$$

والجذران هى $\pm\sqrt{10}/5 = \pm 0.632.$. أما إذا استخدمنا طريقة نيوتن فإنها تعطينا الجذران ± 0.635

١٠ – استخدم مفكوك متسلسلات القوى لتحسب $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

إن :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x + 2x^3/3! + \cdots}{x - x^3/3! + \cdots} = \lim_{x\to 0}\frac{2 + x^2/3 + \cdots}{1 - x^2/6 + \cdots} = 2$$

١١ – أوجد مفكوك $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ فى متسلسلة قوى فى $(x - 3)$ ثم احسب $\int_3^{3.2} f(x)\,dx.$

إن : $f(3) = 5,\ f'(3) = 9,\ f''(3) = -4,\ f'''(3) = 6,\ f^{iv}(3) = 24.$

و بالتالى : $f(x) = 5 + 9(x-3) - 2(x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4$

$$\int_3^{3.2} f(x)\,dx = 5x + \tfrac{9}{2}(x-3)^2 - \tfrac{2}{3}(x-3)^3 + \tfrac{1}{4}(x-3)^4 + \tfrac{1}{5}(x-3)^5 \Big|_3^{3.2} = 1.185$$

١٢ – احسب قيمة $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx.$

إن الصعوبة هنا تكمن فى عدم إمكان التعبير عن $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ بدوال ابتدائية . ومع هذا فإن :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots \Big|_0^1 = 0.946\,083$$

والخطأ الناتج عن استخدام الحدود الأربعة الأولى أقل من $\frac{1}{9.9!}$ أى أقل من 0.000 0003 .

مسائل اضافية

١٣ – احسب لأربعة أرقام عشرية : (ا) $e^{-2} = 0.1353,$ ، (ب) $\sin 32° = 0.5299,$

(ﺣ) $\cos 36° = 0.8090,$ ، (د) $\tan 31° = 0.6009.$

١٤ – إلى أى مدى لـ x يمكن :

(ا) استبدال e^x بـ $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ إذا كان الخطأ المسموح به 0.0005 ؟

(ب) استبدال $\cos x$ بـ $1 - \frac{1}{2}x^2$ إذا كان الخطأ المسموح به 0005 ؟

(ﺣ) استبدال $\sin x$ بـ $x - x^3/6 + x^5/120$ إذا كان الخطأ المسموح به 0.000 05 ؟

ج : (ا) $|x| < 0.1$ ، (ب) $|x| < 18°57'$ ، (ﺣ) $|x| < 47°$.

١٥ – استخدم مفكوك متسلسلات القوى لتحسب قيمة :

(ا) $\lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2}e,$ ، (ب) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{6},$ ، (ﺣ) $\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{\sinh x - \sin x} = \infty.$

١٦ – احسب القيم

(ا) $\int_0^{\pi/2} (1 - \frac{1}{2}\sin^2\phi)^{-1/2}\,d\phi = 1.854,$ (ب) $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = 0.76355,$ (ﺣ) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4} = 0.4940.$

١٧ – أوجد طول المنحنى $y = x^3/3$ من $x = 0$ إلى $x = 0.5$ ج : 0.5031

١٨ – أوجد المساحة الواقعة تحت المنحنى $y = \sin x^2$ من $x = 0$ إلى $x = 1$ ج : 0.3103

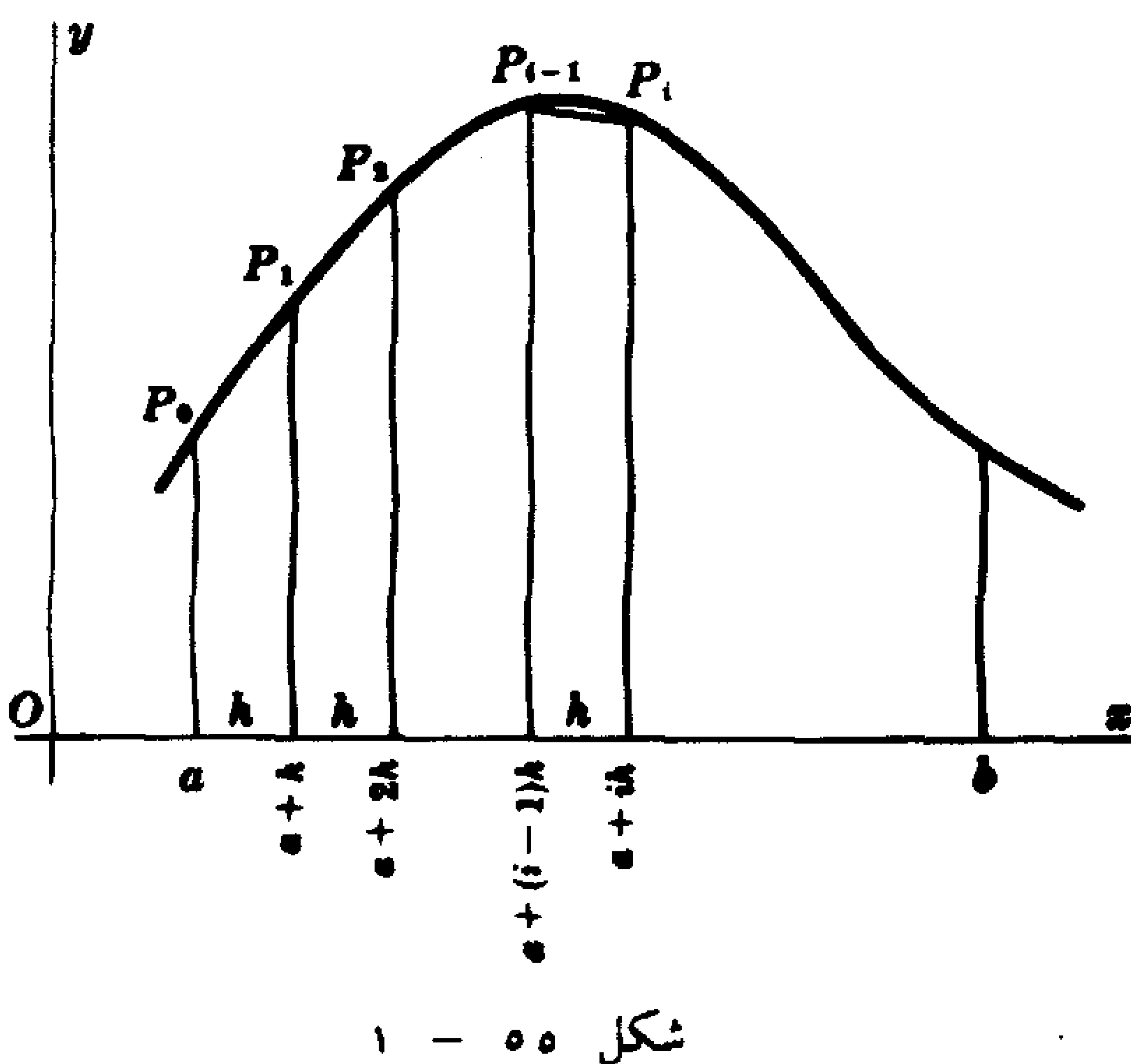
الفصل الخامس والخمسون

القيمة التقريبية للتكامل

يمكن الحصول على القيمة التقريبية لـ $\int_a^b f(x)$ باستخدام صيغ معينة أو بالتكاملات الميكانيكية . وتبرز ضرورة حساب قيمة التكامل التقريبية عندما يكون من الصعب إجراء التكامل بالطرق العادية ، أو عندما يتعذر التعبير عن التكامل غير المحدد بدوال ابتدائية أو عندما تعرف دالة التكامل بجدول لقيم عددية .

ولقد حصلنا فى الفصل ٣٤ على تقريب لـ $\int_a^b f(x)\,dx$ بالمجموع $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x.$ والحصول على S_n فسرنا التكامل المحدود على أنه مساحة سطح وقسمنا هذا السطح إلى n شريحة وقربنا كل شريحة بمستطيل ثم جمعنا مساحات المستطيلات المقربة . وفيما يلى سنذكر بعض الصيغ التى لاتختلف عن بعضها إلا بطريقة تقريب مساحات الشرائح .

قاعدة شبه المنحرف . لتكن المساحة محددة من أعلى بالمنحنى $y = f(x)$ ومن أسفل بالمحور x ، ومن الجانبين بالمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ ولنقسم هذه المساحة إلى n شريحة عرض كل منها $h = (b - a)/n$ كما هو موضح فى الشكل ٥٥ – ١ للنظر فى الشريحة الـ i المحددة من أعلى بالقوس $P_{i-1}P_i$ من المنحنى $y = f(x)$ ، وكتقريب لمساحة هذه الشريحة نأخذ .



شكل ٥٥ – ١

$$\tfrac{1}{2}h\{f[a + (i - 1)h] + f(a + ih)\}$$

ومساحة شبه المنحرف نحصل عليها باعتبار الخط المستقيم $P_{i-1}P_i$ بدلا من القوس $P_{i-1}P_i$. وإذا قربنا كل شريحة بنفس الطريقة فإننا نجد (حيث يقرأ الرمز $\approx$ يساوى تقريباً) .

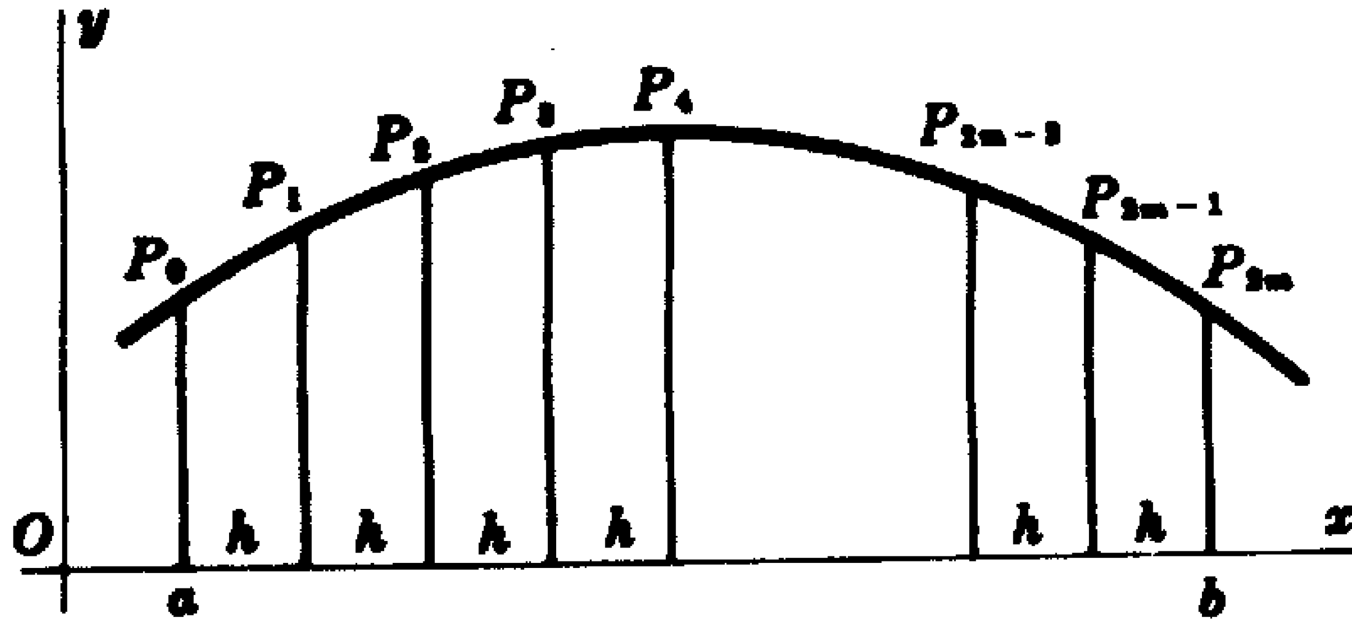
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + f(a+h)\} + \frac{h}{2}\{f(a+h) + f(a+2h)\} + \cdots + \frac{h}{2}\{f[a+(n-1)h] + f(b)\}$$

أو

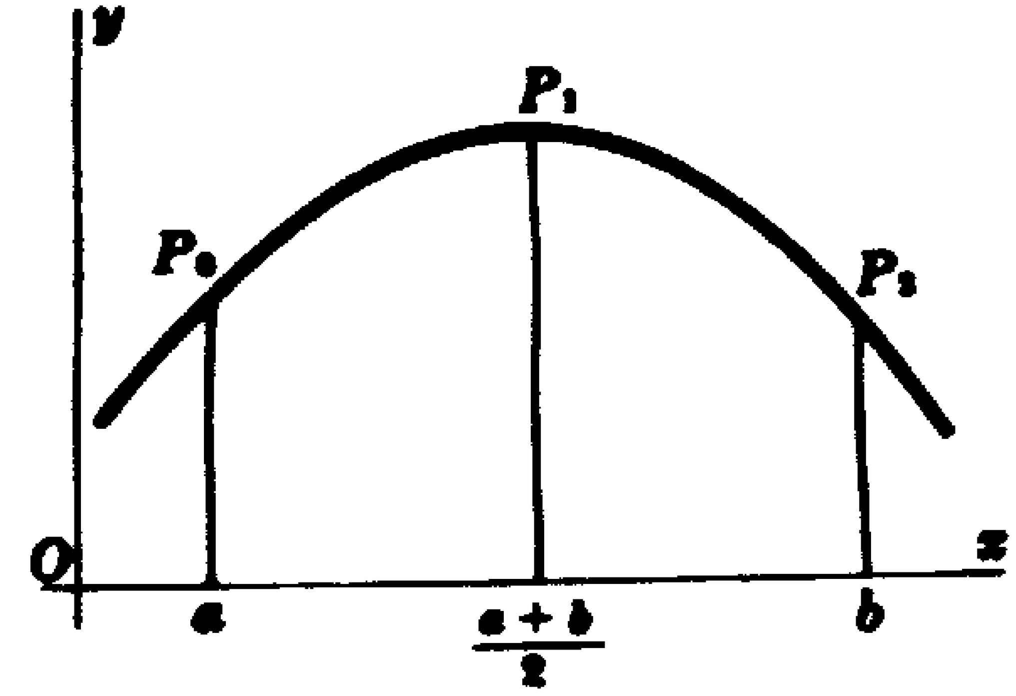
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f[a+(n-1)h] + f(b)\} \qquad (1)$$

قاعدة شبه المنشور . إذا فصلت المساحة المعرفة بـ $\int_a^b f(x)dx$ إلى شريحتين عموديتين عرض كل منهما $h = \frac{1}{2}(b-a)$. وإذا استبدلنا القوس $P_0P_1P_2$ للمنحنى $y = f(x)$ بقوس القطع المكافىء $y = Ax^2 + Bx + c$ الذى يمر بالنقط P_0, P_1, P_2 كما فى الشكل ٥٥ — ٢ . فإننا نحصل بعد إجراء بعض التغيرات فى رموز نتيجة المسألة (١) على :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} \quad (٢)$$



شكل ٥٥ — ٣



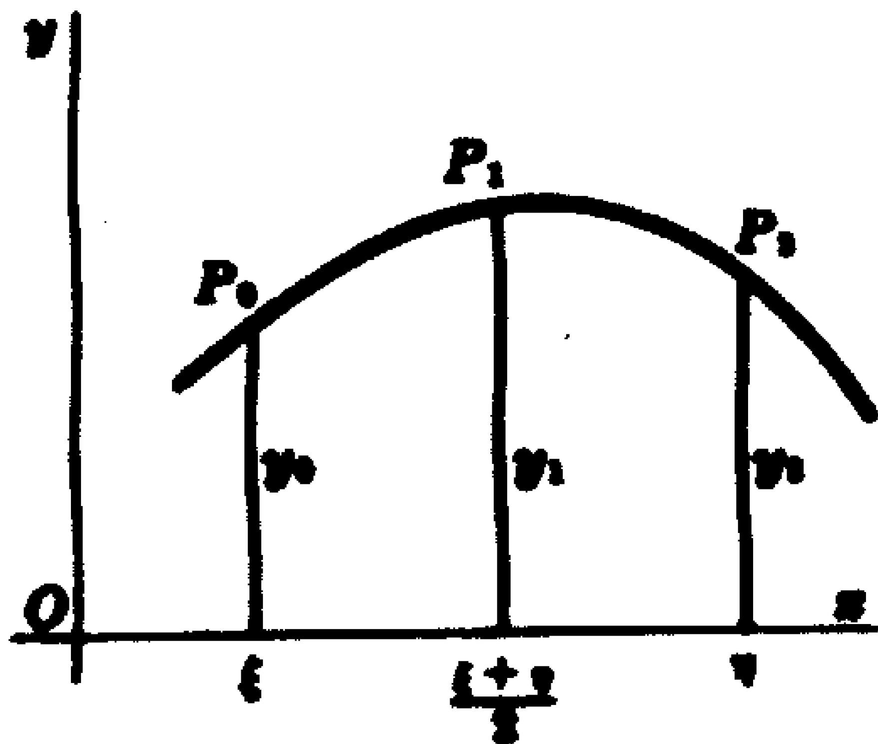
شكل ٥٥ — ٢

قاعدة سمبسون. لنفرض أن السطح المراد حساب مساحته قد قسم إلى $n = 2m$ شريحة عرض كل منها $h = (b - a)/n$ كما هو مبين بالشكل ٥٥ — ٣ . وباستخدام قاعدة شبه المنشور لتقريب المساحة الواقعة تحت كل قوس من الأقواس : $P_0P_1P_2,\ P_2P_3P_4,\ \ldots,\ P_{2m-2}P_{2m-1}P_{2m},$ نجد :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) \quad (٣)$$
$$+ \cdots + 2f[a+(2m-2)h] + 4f[a+(2m-1)h] + f(b)\}$$

طريقة مفكوك متسلسلات القوى. وتتلخص هذه الطريقة فى أن نستبدل بدالة التكامل $f(x)$ الحدود الـ n الأول من متسلسلة ماكلورين أو متسلسلة تايلور الموافقة لهـا . وتكون هذه الطريقة ناجحة إذا أمكن فك دالة التكامل وكان حدا التكامل ضمن فترة تقارب المتسلسلة (أنظر الفصل ٥٤) .

مسـائل محلولة



شكل ٥٥ — ٤

١ — للقطع المكافىء $y = Ax^2 + Bx + c$ الذى يمر بالنقط : $P_0(\xi, y_0),\ P_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, y_1\right),$ و $P_2(\eta, y_2),$ كما هو مبين فى الشكل ٥٥ — ٤ برهن أن :

$$\int_\xi^\eta y\,dx = \frac{\eta-\xi}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

لدينا :
$$\int_\xi^\eta y\,dx = \int_\xi^\eta (Ax^2 + Bx + C)\,dx$$
$$= \frac{\eta-\xi}{3}[A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \tfrac{3}{2}B(\xi+\eta) + 3C].$$

ولكن بما أن $y = Ax^2 + Bx + c$ يمر بالنقط P_0, P_1, P_2 فإنه يكون :

$$y_0 = A\xi^2 + B\xi + C$$
$$y_1 = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2 + B\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + C$$
$$y_2 = A\eta^2 + B\eta + C$$

و $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2[A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \tfrac{3}{2}B(\xi + \eta) + 3C]$$

إذن : $$\int_\xi^\eta y\,dx = \frac{\eta - \xi}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

٢ – احسب القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$ بكل من الطرق الأربع ثم تحقق من الأجوبة بالتكامل .

قاعدة شبه المنحرف : بأخذ $n = 5$

فإن : $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{5} = 0.1.$ ومنه $a = 0,\ a + h = 0.1,\ a + 2h = 0.2,\ a + 3h = 0.3,\ a + 4h = 0.4,\ b = 0.5.$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0.1}{2}[f(0) + 2f(0.1) + 2f(0.2) + 2f(0.3) + 2f(0.4) + f(0.5)]$$
$$\approx \frac{1}{20}\left(1 + \frac{2}{1.01} + \frac{2}{1.04} + \frac{2}{1.09} + \frac{2}{1.16} + \frac{1}{1.25}\right) = 0.4631$$

قاعدة شبه المنشور :

إن : $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{2} = \frac{1}{4}$ ومنه $f(a) = f(0) = 1,\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{17},\ f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}.$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(1 + \frac{64}{17} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{12}(1 + 3.764\ 71 + 0.8) = 0.4637$$

قاعدة سمبسون : بأخذ $n = 4$

فإن : $h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{4} = \frac{1}{8}.$ ومنه $a = 0,\ a + h = \frac{1}{8},\ a + 2h = \frac{1}{4},\ a + 3h = \frac{3}{8},\ b = \frac{1}{2}.$

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{24}\left(1 + 4\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\right)$$
$$\approx \frac{1}{24}\left(1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{5}\right) = 0.4637$$

طريقة متسلسلات القوى : باستخدام سبعة حدود

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \int_0^{1/2} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12})\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13}\right]_0^{1/2}$$

نجـد أن : $$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{13\cdot 2^{13}}$$

$$\approx 0.500\ 00 - 0.041\ 67 + 0.006\ 25 - 0.001\ 12 + 0.000\ 22 - 0.000\ 04 + 0.000\ 01 = 0.4636$$

وبالتكامل $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big]_0^{1/2} = \arctan\tfrac{1}{2} = 0.4636$$

٣ – احسب مساحة السطح الواقعة تحت المنحنى $y = e^{-x^2}$ وفوق المحور x وبين المستقيمين $x = 0$ و $x = 1$ مستخدماً :

(ا) قاعدة سمبسون وأخذ $n = 4$ ؛ (ب) طريقة متسلسلات القوى .

(ا) أن : $h = \frac{1}{4};\ a = 0,\ a + h = \frac{1}{4},\ a + 2h = \frac{1}{2},\ a + 3h = \frac{3}{4},\ b = 1.$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{\frac{1}{4}}{3}(1 + 4e^{-1/16} + 2e^{-1/4} + 4e^{-9/16} + e^{-1})$$

$$\approx \tfrac{1}{12}\{1 + 4(0.9399) + 2(0.7788) + 4(0.5701) + 0.3679\} = 0.747 \text{ square units}$$

(ب)

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right)dx$$

$$\approx \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13\cdot 6!}\right]_0^1$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!}$$

$$\approx 1 - 0.3333 + 0.1 - 0.0238 + 0.0046 - 0.0008 + 0.0001 = 0.747 \text{ square units}$$

٤ – تقع قطعة أرض بين نهر من جهة وسياج (حاجز) مستقيم من جهة أخرى . فإذا فرضنا أن عرض قطعة الأرض y m على بعد x m من أحد طرفي السياج يعطى بالجدول التالي :

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

أوجد القيمة التقريبية لمساحة قطعة الأرض باستخدام قاعدة سمبسون .

هنا $h = 20$ و

$$\int_0^{120} f(x)\,dx \approx \tfrac{20}{3}(0 + 4\cdot 22 + 2\cdot 41 + 4\cdot 53 + 2\cdot 38 + 4\cdot 17 + 0)$$

$$\approx 3507 \text{ m}^2$$

٥ – يعطى منحنى بالأزواج التالية من الإحداثيات القائمة .

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0.6	0.9	1.2	1.4	1.5	1.7	1.8	2

(ا) احسب القيمة التقريبية لمساحة السطح الواقع تحت المنحنى وفوق المحور x وبين المستقيمين $x = 1$ و $x = 9$ مستخدماً قاعدة سمبسون .

(ب) احسب القيمة التقريبية للحجم الناشىء عن دوران السطح السابق حول المحور x باستخدام قاعدة سمبسون .

(ا) هنا $h = 1$ و

$$\int_1^9 y\,dx \approx \frac{1}{3}\{0 + 4(0.6) + 2(0.9) + 4(1.2) + 2(1.4) + 4(1.5) + 2(1.7) + 4(1.8) + 2\}$$

$$\approx 10.13 \text{ square units}$$

(ب)

$$\pi\int_1^9 y^2\,dx \approx \frac{\pi}{3}\{0 + 4(0.6)^2 + 2(0.9)^2 + 4(1.2)^2 + 2(1.4)^2 + 4(1.5)^2 + 2(1.7)^2 + 4(1.8)^2 + 4\}$$

$$\approx 46.58 \text{ cubic units}$$

مسـائل اضـافية

٦ – استنتج قاعدة سمبسون

٧ – احسب القيمة التقريبية لـ $\int_2^6 \frac{dx}{x}$ مستخدماً (١) قاعدة شبه المنحرف حيث $n = 4$ (ب) قاعدة المنشور .

(جـ) قاعدة سمبسون حيث $n = 4$. تحقق من النتائج عن طريق التكامل .

ج : (١) 1.117 ، (ب) 1.111 ، (جـ) 1.100; 1.099

٨ – احسب القيمة التقريبية لـ $\int_1^5 \sqrt{35 + x}\, dx$ كما في المسألة ٧ .

ج : (١) 24.654 ، (ب) 24.655 ، (جـ) 24.655; 24.655

٩ – احسب القيمة التقريبية لـ $\int_1^3 \ln x\, dx$ مستخدماً (١) قاعدة شبه المنحرف حيث $n = 5$ و (ب) قاعدة سمبسون

حيث $n = 8$ ، تحقق من النتائج عن طريق التكامل .

ج : (١) 1.2870 ، (ب) 1.2958; 1.2958

١٠ – احسب القيمة التقريبية لـ $\int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx$ مستخدماً (١) قاعدة شبه المنحرف حيث $n = 5$ و (ب) قاعدة سمبسون

حيث $n = 4$.

ج : (١) 1.115 . (ب) 1.111 .

١١ – احسب القيمة التقريبية لـ $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx$ باستخدام قاعدة سمبسون حيث $n = 6$

ج : 1.852 .

١٢ – استخدم قاعدة سمبسون لحساب (١) مساحة السطح الواقع تحت المنحنى .

(ب) الحجم الناشيء عن دوران السطح حول المحور مستخدماً البيانات الآتية :

x	1	2	3	4	5
y	1.8	4.2	7.8	9.2	12.3

ج : (١) 27.8 ، (ب) 228.44π .

الفصل السادس والخمسون

المشــــتقات الجــزئية

الدوال متعددة المتغيرات : إذا ألحقنا بكل نقطة (x, y) من جزء (منطقة) من المستوى xy عدداً حقيقياً z ، فإننا نقول عن z إنها دالة $z = f(x, y)$ للمتغيرين المستقلين x ، y ، والمحل الهندسى لجميع النقط (x, y, z) التى تحقق العلاقة $z = f(x, y)$ هو سطح فى الفراغ العادى . ويمكن بشكل مماثل تعريف دوال $w = f(x, y, z, \ldots)$ بعدة متغيرات وإن لم تكن هنالك صورة هندسية متوفرة .

وفيما يتعلق بحساب التفاضل والتكامل فإن هنالك عدة فروق بين حالة متغير واحد وحالة متغيرين ، فى الوقت الذى لايختلف فيه حساب التفاضل والتكامل للدوال فى ثلاثة متغيرات أو أكثر عن الدوال لمتغيرين إلا بقدر يسير . ولذا فاننا سنقصر الدراسة هنا ، بشكل رئيسى على الدوال فى متغيرين اثنين .

نقول عن دالة $f(x, y)$ إنها ذات نهاية A عندما $x \to x_0$ و $y \to y_0$. إذا وجد لكل عدد موجب مفروض ϵ ، مهما كان صغيراً ، عدد $\delta > 0$ بحيث يتحقق لجميع قيم (x, y) الشرط :

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \qquad \text{(i)}$$

إذن $|f(x, y) - A| < \epsilon$. تعرف (i) هنا جواراً محذوفاً لـ (x_0, y_0) . أى أنها جميع النقط الواقعة داخل دائرة نصف قطرها δ ومركزها (x_0, y_0) باستثناء المركز نفسه .

نقول عن دالة $f(x, y)$ إنها متصلة عند (x_0, y_0) إذا كانت الدلة $f(x_0, y_0)$ معرفة وكان $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

أنظــر المسألتين ١ – ٢

المشتقات الجزئية : لتكن $z = f(x, y)$ دالة فى المتغيرين المستقلين x ، y . وبما أن x و y مستقلان فإنه يمكننا أن (i) نسمح لـ x أن تتغير ونترك y ثابتة أو أن (ii) نسمح لـ y أن تتغير ونترك x ثابتة أو ,أن (iii) نسمح لـ x و y أن تتغيرا فى آن واحد . وفى كل من الحالتين الأولى والثانية تكون z فى الواقع دالة لمتغير واحد ويمكن اشتقاقها استناداً إلى القواعد المعتادة .

وإذا تغير x مع بقاء y ثابتة فعندئذ تكون z دالة فى x ومشتقتها بالنسبة لـ x هى :

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

وتسمى المشتقة الجزئية (الأولى) لـ $z = f(x, y)$ بالنسبة لـ x .

أما إذا تغيرت y مع بقاء x ثابتة فإن z دالة فى y . ومشتقتها بالنسبة لـ y هى :

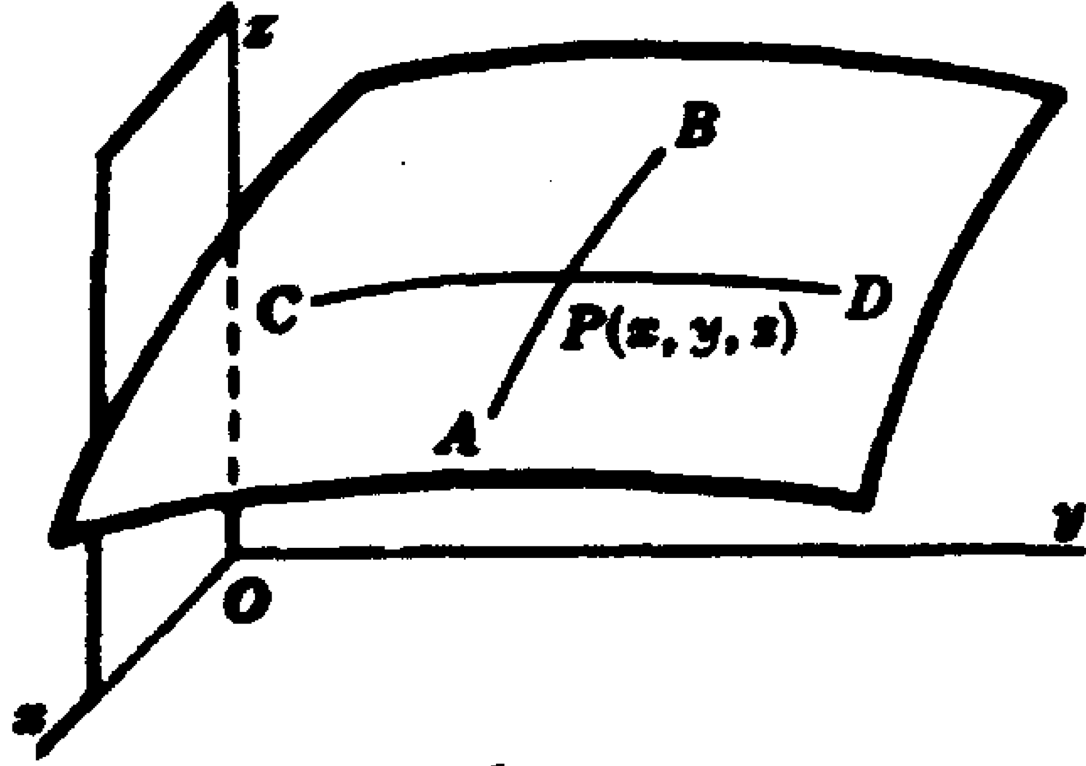
$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

وتسمى المشتقة الجزئية (الأولى) لـ $z = f(x, y)$ بالنسبة لـ y

أنظــر المسائل ٣ — ٨

وإذا كانت z معرفة بشكل ضمنى (غير ظاهر) كدالة فى x و y ، بالعلاقة $F(x, y, z) = 0$ فإنه يمكن إيجاد المشتقتين الجزئتين $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ باستخدام قاعدة الاشتقاق الضمنى التى مرت فى الفصل السادس .

أنظــر المسائل ٩ — ١٢



شكل ٥٦ — ١

وللمشتقة الجزئية التى عرفناها توضيح هندسى بسيط . باعتبار السطح $z = f(x, y)$ المبين بالشكل ٥٦ — ١ وبفرض APB و CPD مقطعى السطح بالمستويين المارين بـ P والموازيين لـ yOz و xOz على الترتيب . فإذا جعلنا x تتغير وتركنا y ثابتة فإن P تتحرك على المنحنى APB وتكون قيمة $\frac{\partial z}{\partial x}$ عند P ميل المنحنى APB عند P .

وبشكل مماثل إذا جعلنا y تتغير وتركنا x ثابتة فإن P تتحرك على المنحنى CPD وتكون قيمة $\frac{\partial z}{\partial y}$ عند P هى ميل المنحنى CPD عند P .

أنظــر المسألة ١٣

التفاضلات الجزئية ذات الرتب العليا . يمكن أيضاً اشتقاق $\frac{\partial z}{\partial x}$ المشتقة الجزئية لـ $z = f(x, y)$ جزئياً بالنسبة لـ x وبالنسبة لـ y فنحصل على المشتقات الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ ويمكن ، بشكل مماثل ، الحصول من $\frac{\partial z}{\partial y}$ على

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

إذا كانت الدالة $z = f(x, y)$ ومشتقاتها الجزئية متصلة فإن ترتيب عملية الاشتقاق ليس بذى بال ، أى أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

أنظر المسألتين ١٤ — ١٥

مســـائل محلولة

١ – ناقش اتصال $z = x^2 + y^2$.

لأى فئة محددة القيمة $(x, y) = (a, b)$ يكون $z = a^2 + b^2$.

و عندما $x \to a$ و $y \to b$ فإن $x^2 + y^2 \to a^2 + b^2$.

و الدالة متصلة فى كل موضع .

٢ – إن الدالتين التاليتين متصلتان فى كل موضع باستثناء نقطة الأصل $(0, 0)$. حيث أنهما غير معرفتين هناك . فهل يمكن جعلهما متصلتين هناك .

(أ) $z = \dfrac{\sin(x + y)}{x + y}$.

لنجعل $(x, y) \to (0, 0)$ على المستقيم $y = mx$ فنجد $z = \dfrac{\sin(x + y)}{x + y} = \dfrac{\sin(1 + m)x}{(1 + m)x} \to 1$. لذا يمكن جعل الدالة متصلة فى كل موضع إذا عدلنا تعريفها على النحو التالى $z = \dfrac{\sin(x + y)}{x + y},\ (x, y) \neq (0, 0);\ \ z = 1,\ (x, y) = (0, 0)$.

(ب) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

لنجعل $(x, y) \to (0, 0)$ على المستقيم $y = mx$ فنجد أن $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2} = \dfrac{m}{1 + m^2}$ تعتمد على المستقيم الذى نختاره و لذا لا يمكن جعل الدالة المفروضة متصلة عند $(0, 0)$.

أوجد فى كل من المسائل ٣ ـــ ٧ المشتقة الجزئية الأولى :

٣ – $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$.

لنعتبر y ثابتاً و لنشتق بالنسبة إلى x فنجــد : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$.

لنعتبر x ثابتاً و لنشتق بالنسبة إلى y فنجــد : $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3x + 8y$.

٤ – $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$.

لنعتبر y ثابتاً و لنشتق بالنسبة إلى x فنجــد : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2}$.

لنعتبر x ثابتاً و لنشتق بالنسبة إلى y فنجــد : $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$.

٥ – $z = \sin(2x + 3y)$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x + 3y),\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x + 3y)$

٦ – $z = \arctan x^2y + \arctan xy^2$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2xy}{1 + x^4y^2} + \dfrac{y^2}{1 + x^2y^4},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{1 + x^4y^2} + \dfrac{2xy}{1 + x^2y^4}$

٧ – $z = e^{x^2 + xy}$. $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 + xy}(2x + y) = z(2x + y),\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 + xy}(x) = xz$

٨ – تعطى مساحة مثلث بـ $K = \frac{1}{2}ab\sin C$. فإذا كان $a = 20, b = 30, C = 30^\circ$ فأوجد :

(١) معدل تغير K بالنسبة إلى a باعتبار b و C ثابتين .

(ب) معدل تغير K بالنسبة إلى C باعتبار a و b ثابتين .

(جـ) معدل تغير b بالنسبة إلى a باعتبار K و C ثابتين .

(١) $\frac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2}b\sin C = \frac{1}{2}(30)(\sin 30^\circ) = \frac{15}{2}$

(ب) $\frac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}(20)(30)(\cos 30^\circ) = 150\sqrt{3}$

(جـ) $b = \frac{2K}{a\sin C};\quad \frac{\partial b}{\partial a} = -\frac{2K}{a^2\sin C} = -\frac{2(\frac{1}{2}ab\sin C)}{a^2\sin C} = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$

اوجد فى المسائل ٩ ــ ١١ المشتقة الجزئية الأولى لـ z بالنسبة الى كل من المتغيرين المستقلين x و y .

٩ – $x^2 + y^2 + z^2 = 25.$

حل أول : لنحل المعادلة بالنسبة لـ z فنجد $z = \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}$. إذن :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{x}{z} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}} = -\frac{y}{z}$$

حل ثان : لنشتق ضمنيا بالنسبة لـ x معتبرين y ثابتاً فنجد :

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

ثم نشتق ضمنيا بالنسبة لـ y معتبرين x ثابتاً فنجد :

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{ومنه} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

١٠ – $x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz.$

إن طريقة الحل الأولى فى المسألة ٩ غير مناسبة هنا :

لذلك نشتق ضمنيا بالنسبة إلى x فنجد :

$$2x(2y + 3z) + 3x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2 - 4y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z(x - 2y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

ومنه $$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 6xz + 3y^2 + z^2 - yz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

ثم نشتق ضمنيا بالنسبة إلى y فنجد :

$$2x^2 + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2y(3x - 4z) - 4y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2z(x - 2y)\frac{\partial z}{\partial y} - 2z^2 = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

ومنه $$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 + 6xy - 8yz - 2z^2 - xz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

١١ - $xy + yz + zx = 1.$

نشتق ضمنيا بالنسبة إلى x فنجد $y + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial x} + z = 0$ ومنه $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{x+y}.$

ثم نشتق ضمنيا بالنسبة إلى y فنجد $x + y\frac{\partial z}{\partial y} + z + x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ومنه $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{x+y}.$

١٢ - إذا كان $x=e^{2r}\cos\theta, y=e^{3r}\sin\theta$. أوجد باعتبار x و y متغيرين مستقلين كلا من $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$

لنشتق العلاقتين جزئياً بالنسبة إلى x فنجـد :

$$1 = 2e^{2r}\cos\theta\frac{\partial r}{\partial x} - e^{2r}\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \text{و} \quad 0 = 3e^{3r}\sin\theta\frac{\partial r}{\partial x} + e^{3r}\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنيا نجد $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\cos\theta}{e^{2r}(2+\sin^2\theta)}$ ، $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{3\sin\theta}{e^{2r}(2+\sin^2\theta)}.$

ثم نشتق العلاقتين المفروضتين ضمنيا بالنسبة إلى y فنجد :

$$0 = 2e^{2r}\cos\theta\frac{\partial r}{\partial y} - e^{2r}\sin\theta\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{و} \quad 1 = 3e^{3r}\sin\theta\frac{\partial r}{\partial y} + e^{3r}\cos\theta\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

وبحل هاتين المعادلتين آنيا نحصل على $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\sin\theta}{e^{3r}(2+\sin^2\theta)}$ و $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{2\cos\theta}{e^{3r}(2+\sin^2\theta)}.$

١٣ - أوجد ميل كل من المنحنيين اللذين نحصل عليهما من تقاطع السطح $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ مع المستويين المارين بالنقطة $(1,1,1,)$ والموازيين للمستويين الاحداثيين yOz و xOz .

إن المستوى $x = 1$ الموازى للمستوى yOz يقطع السطح فى المنحنى $z = 4y^2 - 3, x = 1.$ ، وعلى هذا فإن $\partial z/\partial x = 8y = 8\cdot 1 = 8$ هو الميل المطلوب .

إن المستوى $y = 1$ الموازى للمستوى xOz يقطع السطح فى المنحنى $z = 3x^2 - 2, y = 1.$ ، وعلى هذا فإن $\partial z/\partial y = 6x = 6$ هو الميل المطلوب الآخر .

أوجـد فى كل من المسـألتين ١٤ ـ ١٥ جميع المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لـ z .

١٤ - $z = x^2 + 3xy + y^2.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2$$

١٥ - $z = x\cos y - y\cos x.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y\sin x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\sin y - \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y\cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\sin y + \sin x = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -x\cos y$$

مســـائل اضـــافية

١٦ – ادرس كلا من الدوال التالية لتبين فيما إذا كان من الممكن جعلها متصلة عند $(0,0)$.

(ا) $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ ، (ب) $\dfrac{x-y}{x+y}$ ، (ﺟ) $\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$ ، (د) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

ج : (ا) لا ، (ب) لا ، (ﺟ) نعم ، (د) لا .

١٧ – أوجد $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال التالية :

(ا) $z = x^2+3xy+y^2$ ج : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x+3y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x+2y$

(ب) $z = \dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}$ ج : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2}+\dfrac{2y}{x^3},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^3}-\dfrac{1}{x^2}$

(ﺟ) $z = \sin 3x \cos 4y$ ج : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3\cos 3x\cos 4y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4\sin 3x \sin 4y$

(د) $z = \arctan\dfrac{y}{x}$ ج : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(ﻫ) $x^2-4y^2+9z^2 = 36$ ج : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{9z},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4y}{9z}$

(و) $z^3-3x^2y+6xyz = 0$ ج : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2y(x-z)}{z^2+2xy},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x(x-2z)}{z^2+2xy}$

(ز) $yz+xz+xy = 0$ ج : $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y+z}{x+y},\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+z}{x+y}$

١٨ – (ا) إذا كان $z = \sqrt{x^2+y^2}$, فبين أن $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z.$

(ب) إذا كان $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, فبين أن $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 1.$

(ﺟ) إذا كان $z = e^{x/y}\sin\dfrac{x}{y}+e^{y/x}\cos\dfrac{y}{x}$, فبين أن $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0.$

(د) إذا كان $z = (ax+by)^2+e^{ax+by}+\sin(ax+by)$, فبين أن $b\dfrac{\partial z}{\partial x} = a\dfrac{\partial z}{\partial y}.$

١٩ – أوجد معادلة المستقيم المماس :

(ا) للقطع المكافئ $z = 2x^2-3y^2,\ y = 1$ عند النقطة $(-2, 1, 5)$ ج : $8x+z+11 = 0,\ y = 1$

(ب) للقطع المكافئ $z = 2x^2-3y^2,\ x = -2$ عند النقطة $(-2, 1, 5)$ ج : $6y+z-11 = 0,\ x = -2$

(ﺟ) للقطع الزائد $z = 2x^2-3y^2,\ z = 5$ عند النقطة $(-2, 1, 5)$ ج : $4x+3y+5 = 0,\ z = 5$

برهن أن هذه المستقيمات الثلاثة تقع فى المستوى $8x+6y+z+5 = 0$.

٢٠ – أوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. لكل من الدوال التالية :

(ا) $z = 2x^2 - 5xy + y^2$ ج : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -5, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

(ب) $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$ ج : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{6y}{x^4}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$

(جـ) $z = \sin 3x \cos 4y$ ج : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -12 \cos 3x \sin 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z$

(د) $z = \arctan \frac{y}{x}$ ج : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$

٢١ – (ا) إذا كان $z = \frac{xy}{x-y}$, فبين أن $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(ب) إذا كان $\beta = \pm\alpha$, و $z = e^{\alpha x} \cos \beta y$ فبين أن $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(جـ) إذا كان $z = e^{-t}(\sin x + \cos y)$, فبين أن $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial t}$.

(د) إذا كان $z = \sin ax \sin by \sin kt\sqrt{a^2+b^2}$, فبين أن $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right\}$

٢٢ – لقانون الغازات $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = ct$, حيث a و b و c ثوابت .

أثبت أن :

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{2a(v-b) - (p + a/v^2)v^3}{v^3(v-b)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{cv^3}{(p + a/v^2)v^3 - 2a(v-b)}, \quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v-b}{c}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right) = -1$$

الفصل السابع والخمسون

التفاضلات الكلية والمشتقات الكلية

التفاضلات الكلية • لقد سبق أن عرفنا فى الفصل ٢٣ التفاضلين dx و dy للدالة $y=f(x)$ فى المتغير المستقل الوحيد x بالشكل .

$$dx = \Delta x, \qquad dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}dx$$

لنعتبر الدالة $z=f(x,y)$ فى المتغيرين المستقلين x و y ولنعرف $dx=\Delta x$ و $dy=\Delta y$ فإذا جعلنا x تتغير وتركنا y ثابتة فإن z دالة فى x فقط ، والتفاضل الجزئى لـ z بالنسبة لـ x يعرف بـ $d_xz = f_x(x,y)\,dx = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx.$ وبشكل مماثل نعرف التفاضل الجزئى لـ z بالنسبة لـ y على أنه $d_yz = f_y(x,y)\,dy = \dfrac{\partial z}{\partial y}dy.$ ويعرف التفاضل الكلى dz على أنه مجموع التفاضلين الجزئيين أى :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

ويعرف التفاضل الكلى dw لدالة $w=F(x,y,z,\dots,t)$ بـ :

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial w}{\partial t}dt \qquad (1')$$

أنظر المسألتين ١ – ٢

وكما فى حالة دالة لمتغير واحد فإن التفاضل الكلى لدالة لعدة متغيرات تعطى تقريبا جيدا للتزايد الكلى الذى يطرأ على الدالة عندما تكون تزايدات المتغيرات المستقلة المتعددة صغيرة .

مثال :

إذا كان $z=xy$ فإن $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy;$ ولكن إذا أعطينا لـ x و y التزايدين $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ فإن التزايد Δz يكون :

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy\\ &= x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y\\ &= x\,dy + y\,dx + dx\,dy\end{aligned}$$

والشكل ٥٧ – ١ يوضح تمثيلا هندسيا لذلك . ويتضح أن dz و Δz تختلفان عن بعضهما بالمستطيل الذى مساحته $\Delta x\,\Delta y = dx\,dy$.

Δy | $x\cdot\Delta y$ | $\Delta x\cdot\Delta y$
y | $x\cdot y$ | $y\cdot\Delta x$
x | Δx

شكل ٥٧ – ١

انظر المسائل ٣ – ٩

قاعدة السلسلة لدوال الدوال : إذا كانت $z = f(x, y)$ دالة متصلة فى المتغيرين x و y ولها مشتقتان جزئيتان متصلتان $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ ، و إذا كانت x و y دالتين قابلتين للاشتقاق $x = g(t),\ y = h(t)$ فى المتغير t ، فعندئذ يكون z دالة فى t ويعطى dz/dt الذى نسميه المشتقة الكلية لـ z بالنسبة لـ t بـ :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (٢)$$

وبشكل مماثل إذا كانت $w = f(x, y, z, ...)$ دالة متصلة فى المتغيرات $x, y, z, ...$ وكانت مشتقاتها الجزئية متصلة ، وإذا كانت $x, y, z, ...$ دالة قابلة للاشتقاق فى المتغير t فإن المشتقة الكلية لـ w بالنسبة لـ t تعطى بـ :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \cdots \qquad (٢')$$

انظر المسائل ١٠-١٦

وإذا كانت $z = f(x, y)$ دالة متصلة فى المتغيرين y, x وكانت مشتقاتها الجزئية $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ متصلة . وإذا كانت y و x دالتين متصلتين فى المتغيرين المستقلين r و s ، أى أن $x = g(r, s), y = h(r, s)$ فإن z دالة فى r و s وإن :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad (٣)$$

وبشكل مماثل إذا كانت $w = f(x, y, z, ...)$ دالة متصلا فى n متغيرا $x, y, z, ...$ وكانت مشتقاتها الجزئية $\partial w/\partial x, \partial w/\partial y, \partial w/\partial z, ...$ متصلة ، وإذا كانت $x, y, z, ...$ دوال متصلة فى m متغيرا مستقلا $r, s, t, ...$ فإن :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \cdots \qquad (٣')$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \cdots \qquad \text{الخ} \ldots.$$

انظر المسائل ١٧ — ١٩

مسائل محلولة

اوجد فى كل من المسألتين ١ — ٢ التفاضل الكلى.

١ — $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + y^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

ومنه

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (3x^2y + 2xy^2 + y^3)\,dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)\,dy$$

٢ — $z = x\sin y - y\sin x.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y - y\cos x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y - \sin x$$

ومنه

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (\sin y - y\cos x)\,dx + (x\cos y - \sin x)\,dy$$

٣ – قارن بين dz و Δz بفرض أن $z = x^2 + 2xy - 3y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \quad dz = 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x+dx)^2 + 2(x+dx)(y+dy) - 3(y+dy)^2] - (x^2+2xy-3y^2) \\ &= 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy + (dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2 \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن dz و Δz يختلفان بـ $(dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2$.

٤ – احسب القيمة التقريبية لمساحة مستطيل بعداه 35.02 units و 24.97 units .

أن مساحة مستطيل ، بعداه x و y هى $A = xy$ وبالتالى فإن $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy.$

فإذا أخذنا $x = 35, dx = 0.02, y = 25; dy = -0.03$ فإننا نجد $A = 35 \times 25 = 875$

و $dA = 25(.02) + 35(-.03) = -0.55.$ والمساحة التقريبية : $A + dA = 874.47$ sq. un. .

٥ – احسب القيمة التقريبية للتغير الذى يطرأ على وتر مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة 15 cm و 20 cm إذا أطلنا الضلع القصير بمقدار 5/8 cm وقصرنا الضلع الطويل بمقدار 5/16 cm .

ليكن x, y, z أطوال الضلع القائم القصير والضلع القائم الطويل والوتر على الترتيب فيكون .

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

وعندما يكون $x = 15, y = 20, dx = 5/8, dy = -5/16$ فإن $dz = \frac{15(5/8) + 20(-5/16)}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = 1/8$ cm.

ولذلك فإن الوتر يزداد طولا بـ $^1/_8$ cm تقريبا .

٦ – تعطى القدرة الكهربائية التى يستهلكها جهاز كهربائى بـ $P = E^2/R$ watts . فإذا كانت E تساوى 200 volts و R تساوى 8 ohms فاحسب التغير الذى يطرأ على القدرة عندما تزداد E بمقدار 5 volts وتزداد R بمقدار 0.2 ohms ؟

أن
$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}, \quad dP = \frac{2E}{R}dE - \frac{E^2}{R^2}dR$$

وعندما $dR = -0.2,$ و $E = 200, R = 8, dE = -5,$ يكون :

$$dP = \frac{2 \cdot 200}{8}(-5) - \left(\frac{200}{8}\right)^2(-0.2) = -250 + 125 = -125$$

وبذلك تكون القدرة قد نقصت 125 watts تقريبا .

٧ – لدينا قطعة خشب على شكل متوازى مستطيلات ، قيست أبعادها فوجدت 25 cm و 30 و 50 مع احتمال خطأ قدره 0.125 cm فى كل من هذه القياسات الثلاثة . أوجد تقريبا أكبر خطأ فى حساب مساحة سطح قطعة الخشب والنسبة المئوية للخطأ فى المساحة الناتج عن الأخطاء فى القياسات المفردة .

بما أن مساحة السطح تعطى بـ $S = 2(xy + yz + zx);$ فإن :

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 2(y+z)\,dx + 2(x+z)\,dy + 2(y+x)\,dz$$

ونحصل على أكبر خطأ فى S عندما تكون الأخطاء فى الأطوال لها نفس الإشارة ، لنفرض هذه الإشارة موجبة مثلا فيكون عندئذ :

$$dS = 2(30 + 50)(0{\cdot}125) + 2(25 + 50)(0{\cdot}125) + 2(30 + 25)(0{\cdot}125) = 52{\cdot}5 \text{ cm}^2.$$

والنسبة المئوية لخطأ تساوى (الخطأ / المساحة) (100) وهذا يساوى 5250/7000 أى % 0.75 .

٨ — أوجد أكبر خطأ الناتج عن استخدام الصيغة $R = E/C$. وأوجد الخطأ النسبى ، وذلك بفرض أن $C = 20$ بخطأ 0.1 وأن $E = 120$ بخطأ 0.05 .

$$dR = \frac{\partial R}{\partial E}dE + \frac{\partial R}{\partial C}dC = \frac{1}{C}dE - \frac{E}{C^2}dC$$

ويحدث أكبر خطأ عندما $dE = 0.05$ ، $dC = -0.1$. إذن :

$$dR = \frac{0.05}{20} - \frac{120}{400}(-0.1) = 0.0325$$ وهو القيمة التقريبية لأكبر خطأ

والنسبة المئوية لخطأ تساوى $\frac{dR}{R}(100) = \frac{0.0325}{8}(100) = 0.406\,25 = 0.41\%.$

٩ — قيس ضلعا مثلث والزاوية المحصورة بينهما فكانت النتائج 50 m ، 65 m ، 60° ، فإذا كانت الأخطاء المحتملة 0.06 m فى قياس الأطوال و 1° فى قياس الزاوية فما هو الخطأ الأعظم فى حساب المساحة ؟

$$A = \tfrac{1}{2}xy\sin\theta, \quad \partial A/\partial x = \tfrac{1}{2}y\sin\theta, \quad \partial A/\partial y = \tfrac{1}{2}x\sin\theta, \quad \partial A/\partial\theta = \tfrac{1}{2}xy\cos\theta$$

إذن $$dA = \tfrac{1}{2}y\sin\theta\,dx + \tfrac{1}{2}x\sin\theta\,dy + \tfrac{1}{2}xy\cos\theta\,d\theta$$

فإذا كان $x = 50,\ y = 65,\ \theta = 60^\circ,\ dx = 0{\cdot}06,\ dy = 0{\cdot}06$ و $d\theta = 1^\circ = \pi/180,$

فإن $$dA = \tfrac{1}{2}(65)(\sin 60^\circ)(0{\cdot}06) + \tfrac{1}{2}(50)(\sin 60^\circ)(0{\cdot}06) + \tfrac{1}{2}(50)(65)(\cos 60^\circ)(\pi/180) = 17{\cdot}169 \text{ m}^2$$

١٠ — إذا كان $z = x^2 + 3xy + 5y^2;\ x = \sin t,\ y = \cos t.$ فأوجد dz/dt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

إذن $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x + 3y)\cos t - (3x + 10y)\sin t$$

١١ — إذا كان $z = \ln(x^2 + y^2);\ x = e^{-t},\ y = e^t.$ فأوجد dz/dt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

إذن $$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2 + y^2}(-e^{-t}) + \frac{2y}{x^2 + y^2}(e^t) = 2\frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2 + y^2}$$

١٢ — لتكن $z = f(x, y)$ دالة متصلة فى x و y ولتكن مشتقتيها الجزئيتين $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ متصلتين . لتكن بعد ذلك y دالة قابلة للاشتقاق فى x عندئذ تكون z دالة قابلة للاشتقاق فى x ويكون استنادا إلى (٢) :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

يلاحظ أننا استخدمنا الرمز f بدلا من z منعا للالتباس الذى يمكن أن يحدث من استخدام $\partial z/\partial x$ و dz/dx فى نفس العلاقة .

١٣ – إذا كان $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2,\ y = e^{ax}$. فأوجد dz/dx

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (2x+2y) + (2x+8y)ae^{ax} = 2(x+y) + 2a(x+4y)e^{ax}$$

١٤ – إذا كان $z = f(x, y) = xy^2 + x^2y,\ y = \ln x$.
فأوجد (ا) dz/dx و (ب) dz/dy

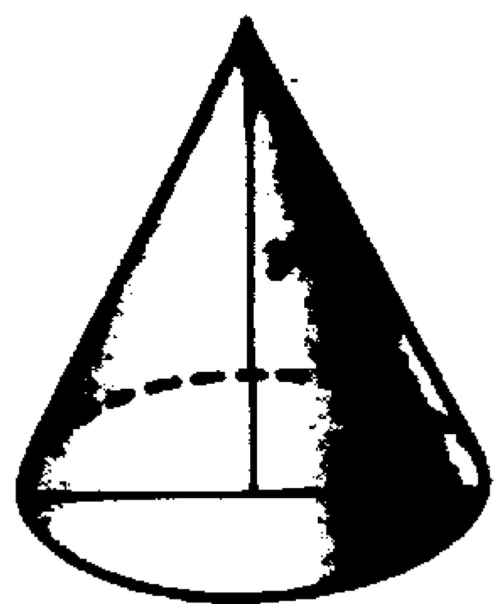
(ا) إن x هنا هو المتغير المستقل ولذلك .

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (y^2+2xy) + (2xy+x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = y^2 + 2xy + 2y + x$$

(ب) إن y هنا هو المتغير المستقل ولذلك .

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2+2xy)x + (2xy+x^2) = xy^2 + 2x^2y + 2xy + x^2$$

١٥ – إذا كان ارتفاع مخروط دائرى قائم 15 cm ونصف قطر قاعدته 10 cm فبأى معدل يتغير الحجم إذا كان ازدياد ارتفاع المخروط $0.2\ \text{cm s}^{-1}$ ومعدل نقصان نصف قطر القاعدة $0.3\ \text{cm s}^{-1}$.


شكل ٥٧ – ٢

ليكن x نصف قطر المخروط و y ارتفاعه . أن $V = {}^1/_3\,\pi x^2 y$ لنعتبر x و y دالتين فى t فيكون ،

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi[2\cdot 10\cdot 15\cdot(-0.3) + 10^2\cdot(0.2)] = -70\pi/3\ \text{cm}^3\text{s}^{-1}$$

١٦ – تتحرك نقطة على منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$ بالاسطوانة $x^2 + y^2 = 5$, حيث تقاس x و y و z بـ cm . فإذا كانت x تزداد بمعدل $0.2\ \text{cm s}^{-1}$ ، فما هو معدل تغير z عندما $x = 2$ ؟

من $z = \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}$, ينتج $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{x}{8}\frac{dx}{dt} - \frac{2y}{9}\frac{dy}{dt}$.

وبما أن $x^2 + y^2 = 5$ فإن $y = \pm 1$ عندما $x = 2$ ويكون كذلك $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$. ،

وعندما $y = 1$ يكون $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = -\frac{2}{1}(0.2) = -0.4$ و $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-0.4) = \frac{5}{36}\ \text{cms}^{-1}$

وعندما $y = -1$ يكون $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} = 0.4$ و $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{8}(0.2) - \frac{2}{9}(-1)(0.4) = \frac{5}{36}\ \text{cms}^{-1}$

١٧ – إذا كان $z = x^2 + xy + y^2;\ x = 2r + s,\ y = r - 2s$. فأوجد $\partial z/\partial r$ و $\partial z/\partial s$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y,\quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2,\quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1,\quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1,\quad \frac{\partial y}{\partial s} = -2$$

إذن
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x+y)(2) + (x+2y)(1) = 5x + 4y$$

ومنه
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x+y)(1) + (x+2y)(-2) = -3y$$

١٨ – أوجد $\frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$,

اذا كان $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2,\ x = \rho \sin\beta \cos\theta,\ y = \rho \sin\beta \sin\theta,\ z = \rho \cos\beta.$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = 2x \sin\beta\cos\theta + 4y\sin\beta\sin\theta + 4z\cos\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 2x\rho\cos\beta\cos\theta + 4y\rho\cos\beta\sin\theta - 4z\rho\sin\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2x\rho\sin\beta\sin\theta + 4y\rho\sin\beta\cos\theta$$

١٩ – إذا كان $u = f(x,y,z) = xy + yz + zx,\ y = 1/x,\ z = x^2.$ فأوجد du/dx .

باستخدام (٣) نجد أن

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = (y+z) + (x+z)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + (y+x)2x = y + z + 2x(x+y) - \frac{x+z}{x^2}$$

٢٠ – إذا كانت $z = f(x,y)$ دالة متصلة فى x و y وكانت مشتقتيها الجزئيتين $\partial z/\partial y$ و $\partial z/\partial x$ متصلتين فاستنتج الصيغة الأساسية :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \qquad (١)$$

حيث يئول كل من ϵ_1 و ϵ_2 إلى الصفر عندما Δx و Δy يئولان إلى الصفر .

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \end{aligned} \qquad (i)$$

حيث تتغير x وحدها فى العبارة الأولى بين القوسين الكبيرين وتتغير y وحدها فى العبارة الثانية . وعلى هذا يمكن تطبيق قانون القيمة المتوسطة [(V) من الفصل ٢١] على كل من هاتين العبارتين .

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) \qquad (ii)$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \cdot f_y(x, y+\theta_2\Delta y) \qquad (iii)$$

حيث $0 < \theta_1 < 1$ ، $0 < \theta_2 < 1$ وحيث المشتقات هنا هى مشتقات جزئية .

وبما أن $\partial z/\partial x = f_x(x,y)$ و $\partial z/\partial y = f_y(x,y)$ دالتان متصلتان فى x و y حسب الفرض فإن :

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) \quad , \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y)$$

وبالتالى $f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) + \epsilon_1,\quad f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y) + \epsilon_2$

حيث ϵ_1 ، ϵ_2 يئولان إلى الصفر عندما تئول كل من Δx و Δy إلى الصفر .

لنعوض فى (ii) و (iii) ثم فى (i) فنجد العلاقة المطلوبة :

$$\begin{aligned} \Delta z &= \{f_x(x,y) + \epsilon_1\}\Delta x + \{f_y(x,y) + \epsilon_2\}\Delta y \\ &= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \end{aligned}$$

لاحظ أن التفاضل التام dz هو تقريب جيد جدا للتزايد الكلى Δz عندما تكون $|\Delta x|$ ، $|\Delta y|$ صغيرتين

مسـائل اضـافية

٢١ ـ أوجد التفاضل الكلي لكل من الدوال التالية :

(أ) $z = x^3y + 2xy^3$ ج : $dz = (3x^2 + 2y^2)y\,dx + (x^2 + 6y^2)x\,dy$

(ب) $\theta = \text{arc}\tan y/x$ ج : $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

(جـ) $z = e^{x^2 - y^2}$ ج : $dz = 2z(x\,dx - y\,dy)$

(د) $z = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ ج : $dz = \dfrac{y(y\,dx - x\,dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

٢٢ ـ إذا كان التردد الأساسي لاهتزاز خيط أو سلك ذا مقطع دائري تحت شد مقداره T هو $n = \dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi d}}$, حيث l طول الخيط و r نصف قطره و d كثافته . أوجد القيمة التقريبية لتغير n بسبب (أ) تغير l بالكمية الصغيرة dl ، (ب) تغير T بالكمية الصغيرة dT ، (جـ) تغير l و T في آن واحد .

ج : (أ) $-\dfrac{n}{l}dl$, (ب) $\dfrac{n}{2T}dT$, (جـ) $n\left(-\dfrac{dl}{l} + \dfrac{dT}{2T}\right)$.

٢٣ ـ احسب ، باستخدام التفاضلات .

(أ) حجم صندوق قاعدته مربعة وطول ضلعه 8.005 cm وارتفاعه 9.996 cm ج : 640.544 cm³ .

(ب) قطر صندوق على شكل متوازي مستطيلات أبعاده 0.924 m و 2.824 m و 1.833 m ج : 2.747 m

٢٤ ـ احسب القيمة التقريبية للخطأ الأعظم المحتمل والنسبة المئوية للخطأ إذا كانت z تعطى بالصيغ التالية :

(أ) $z = \pi r^2h;\ \ r = 5 \pm 0.05,\ \ h = 12 \pm 0.1.$ ج : 8.5π; 2.8%

(ب) $1/z = 1/f + 1/g;\ \ f = 4 \pm 0.01,\ \ g = 8 \pm 0.02.$ ج : 0.0067; 0.25%

(جـ) $z = y/x;\ \ x = 1.8 \pm 0.1,\ \ y = 2.4 \pm 0.1.$ ج : 0.13; 10%

٢٥ ـ احسب القيمة العظمى التقريبية للنسبة المئوية للخطأ في :

(أ) $\omega = \sqrt[3]{g/b}$ إذا كان هنالك خطأ محتمل قدره 1 % في قياس g ، ½% في قياس b .

إرشاد : $\omega = \frac{1}{3}(\ln g - \ln b);\ \ \dfrac{\partial\omega}{\omega} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{dg}{g} - \dfrac{db}{b}\right),\ \ \left|\dfrac{dg}{g}\right| = 0.01,\ \ \left|\dfrac{db}{b}\right| = 0.005.$

ج : 0.005 .

(ب) $g = 2s/t^2$ إذا كان هنالك خطأ محتمل قدره 2% في قياس s ، ¼% في قياس t .

ج : 0.015 .

٢٦ ـ أوجد du/dt بفرض أن :

(أ) $u = x^2y^3,\ \ x = 2t^3,\ \ y = 3t^2.$ ج : $6xy^2t(2yt + 3x)$.

(ب) $u = x\cos y + y\sin x,\ \ x = \sin 2t,\ \ y = \cos 2t.$

ج : $2(\cos y + y\cos x)\cos 2t\ -\ 2(-x\sin y + \sin x)\sin 2t$

(جـ) $u = xy + yz + zx,\ \ x = e^t,\ \ y = e^{-t},\ \ z = e^t + e^{-t}.$

ج : $(x + 2y + z)e^t\ -\ (2x + y + z)e^{-t}$

٢٧ ـ نصف قطر اسطوانة دائرية قائمة فى لحظة معينة يساوى 15 cm وارتفاعها 20 cm فإذا كان نصف القطر يزداد بمعدل 0.5 cm s^{-1} وكان الارتفاع يتناقص بمعدل 1 cm s^{-1} .

فأوجد معدل التغير الزمنى لـ (أ) حجم الاسطوانة (ب) سطحها فى تلك اللحظة .

ج : (أ) $75\pi \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$ ، (ب) $20\pi \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$.

٢٨ ـ يتحرك جسيم فى المستوى بحيث يكون إحداثيا الجسيم عند أى لحظة t هما $y = t^2 + 4$ و $x = 2 + 3t$ حيث تقاس x ، y بـ metres و t بـ sec . بأى سرعة يتغير بعد الجسيم عن نقطة الأصل عندما $t = 1$.

ج : $5/\sqrt{2} \text{ ms}^{-1}$.

٢٩ ـ تتحرك نقطة على منحنى تقاطع $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$ مع المستوى $x - 2y + 4 = 0$ ، فإذا فرضنا أن x تساوى 2 وأنها تتزايد بمعدل 3 وحدات فى الثانية فأوجد (أ) كيف تتغير y . (ب) كيف تتغير z . (ج) سرعة النقطة .

ج : (أ) تتزايد بمعدل 3/2 units/sec . (ب) تتزايد بمعدل 75/14 units/sec . عند (2, 3, 7) ومتناقصة بمعدل 75/14 units/sec عند (2, 3, —7) ، (ج) 6.3 units/sec .

٣٠ ـ أوجد $\partial z/\partial s$ ، $\partial z/\partial t$ بفرض أن

(أ) $z = x^2 - 2y^2,\ x = 3s + 2t,\ y = 3s - 2t.$ ج : $6(x - 2y),\ 4(x + 2y)$

(ب) $z = x^2 + 3xy + y^2,\ x = \sin s + \cos t,\ y = \sin s - \cos t.$ ج : $5(x + y)\cos s,\ (x - y)\sin t$

(ج) $z = x^2 + 2y^2,\ x = e^s - e^t,\ y = e^s + e^t.$ ج : $2(x + 2y)e^s,\ 2(2y - x)e^t$

(د) $z = \sin(4x + 5y),\ x = s + t,\ y = s - t.$ ج : $9\cos(4x + 5y),\ -\cos(4x + 5y)$

(هـ) $z = e^{xy},\ x = s^2 + 2st,\ y = 2st + t^2.$ ج : $2e^{xy}\{tx + (s + t)y\},\ 2e^{xy}\{(s + t)x + sy\}$

٣١ ـ (أ) إذا كانت $u = f(x, y)$ و $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ فبين أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

(ب) إذا كانت $u = f(x, y)$ و $x = r\cosh s, y = r\sinh s$ فبين أن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$$

٣٢ ـ (أ) إذا كان $z = f(x + \alpha y) + g(x - \alpha y),$ فبين أن $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

إرشاد : اكتب $z = f(u) + g(v),\ u = x + \alpha y,\ v = x - \alpha y.$

(ب) إذا كان $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right),$ فبين أن $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz.$

(ج) إذا كان $z = f(x, y),\ x = g(t),\ y = h(t),$ فبين ، إذا تحققت شروط الاتصال (صفحة ٣٣٠) .

فإن

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = f_{xx}(g')^2 + 2f_{xy}g'h' + f_{yy}(h')^2 + f_x g'' + f_y h''$$

(د) إذا كان $z = f(x, y),\ x = g(r, s),\ y = h(r, s),$ فبين . إذا تحققت شروط الاتصال ، أن

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx}(g_r)^2 + 2f_{xy}g_r h_r + f_{yy}(h_r)^2 + f_x g_{rr} + f_y h_{rr}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s} = f_{xx}g_r g_s + f_{xy}(g_r h_s + g_s h_r) + f_{yy}h_r h_s + f_x g_{rs} + f_y h_{rs}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = f_{xx}(g_s)^2 + 2f_{xy}g_s h_s + f_{yy}(h_s)^2 + f_x g_{ss} + f_y h_{ss}$$

٣٣ – نقول عن دالة $f(x, y)$ إنها متجانسة من المرتبة n إذا كان $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ، مثلا إن الدالة $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ متجانسة من المرتبة الثانية ، والدالة $f(x, y) = x \sin y/x + y \cos y/x$ متجانسة من المرتبة الأولى ، اشتق $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. بالنسبة لـ t ثم عوض عن t بـ 1 لتبين أن $xf_x + yf_y = nf$. تحقق من هذه الصيغة باستخدام دالتي المثالين المذكورين انظر كذلك المسألة ٣٢ (ب)

٣٤ – إذا كان $z = \phi(u, v)$ حيث $u = f(x, y)$ و $v = g(x, y),$ وكان $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$ فبين أن :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{ا})$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\right) \qquad (\text{ب})$$

٣٥ – استخدم الجزء (ا) من المسألة ٢٠ لتستنتج قاعدة السلسلة (٢) و (٣) .

إرشاد : لـ (٢) اقسم على Δt .

الفصل الثامن والخمسون

الدوال الضمنية

اشتقاق دالة لمتغير واحد ، معرفة بشكل ضمني بالعلاقة $f(x, y) = 0$ قد تمت معالجته بشكل هندسي فى الفصل السادس . وسنذكر هنا ، لهذه الحالة ما يلى دون برهان :

I – إذا كانت $f(x, y)$ متصلة فى منطقة تحوى نقطة (x_0, y_0) وكان عندها $f(x_0, y_0) = 0$ ، وإذا كانت $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ متصلتين فى هذه المنطقة وكان $\partial f/\partial y \neq 0$ عند (x_0, y_0) فإنه يوجد جوار لـ (x_0, y_0) يمكن فيه حل والمعادلة $f(x, y) = 0$ لنحصل على y كدالة متصلة قابلة للاشتقاق فى x : $y = \phi(x)$ مع $y_0 = \phi(x_0)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}.$$ و

انظر المسائل ١ – ٣

II – إذا كانت $F(x, y, z)$ متصلة فى منطقة تحوى نقطة (x_0, y_0, z_0) وكان عندها $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. وإذا كانت $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ متصلة فى هذه المنطقة وكان $\partial F/\partial z \neq 0$ عند (x_0, y_0, z_0) فإنه يوجد جوار لـ (x_0, y_0, z_0) يمكن فيه حل المعادلة $F(x, y, z) = 0$ لنحصل على z كدالة قابلة للاشتقاق فى x و y : $z = \phi(x, y)$ مع $z_0 = \phi(x_0, y_0)$ و

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

انظر المسألتين ٤ – ٥

III – إذا كانت الدالتان $f(x, y, u, v)$ و $g(x, y, u, v)$ متصلتين فى منطقة تحوى النقطة (x_0, y_0, u_0, v_0) التى عندها $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ ، $g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ وإذا كانت المشتقات الجزئية الأولى لـ f و g متصلة فى هذه المنطقة وإذا كان المحدد $J\left(\frac{f, g}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \partial f/\partial u & \partial f/\partial v \\ \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \end{vmatrix} \neq 0,$ عند (x_0, y_0, u_0, v_0) فإنه يوجد جوار (x_0, y_0, u_0, v_0) يمكن عنده حل المعادلتين $F(x, y, u, v) = 0$ و $g(x, y, u, v) = 0$ آنيا لنحصل على u و v كدالتين متصلتين قابلتين للاشتقاق فى x ، y : $u = \phi(x, y), v = \psi(x, y)$ وإذا كان المحدد $J\left(\frac{f, g}{x, y}\right) \neq 0,$ عند (x_0, y_0, u_0, v_0) فإنه يوجد جوار لـ (x_0, y_0, u_0, v_0) يمكن عنده حل المعادلتين $f(x, y, u, v) = 0$ و $g(x, y, u, v) = 0$ لنحصل على x و y كدالتين متصلتين قابلتين للاشتقاق فى u و v . $x = h(u, v), \ y = k(u, v).$

انظر المسألتين ٦ – ٧

مسائل محلولة

١ – استخدم النظرية I لتبرهن أن $x^2 + y^2 - 13 = 0$ ، تعرف y على أنها دالة متصلة فى x وقابلة للاشتقاق فى أى جوار للنقطة $(2, 3)$ لا يحوى نقطة من المحور x .

أوجد المشتقة عند تلك النقطة .

لنفرض $f(x, y) = x^2 + y^2 - 13$. فنجد عندها $f(2,3) = 0$ ويكون فى أى جوار لـ $(2, 3)$ تكون فيه المشتقتان الجزئيتان $\partial f/\partial x = 2x$ و $\partial f/\partial y = 2y$ متصلتين كما أن $\partial f/\partial y \neq 0$ وفى هذه الحالة يكون :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \text{ at } (2,3)$$

٢ — بفرض $f(x, y) = y^2 + xy - 12 = 0$. أوجد dy/dx أن $\frac{\partial f}{\partial x} = y,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x,$

و $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{y}{3y^2 + x}$.

٣ — بفرض $e^x \sin y + e^y \sin x = 1$. أوجد dy/dx .

لنضع $f(x, y) = e^x \sin y + e^y \sin x - 1$. فيكون $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{e^x \sin y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \sin x}$.

٤ — بفرض $F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$. أوجد $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$.

لننظر إلى z على أنها دالة فى x و y معرفة بالعلاقة المفروضة ولنشتق جزئيا بالنسبة لـ x ثم بالنسبة لـ y فنحصل على :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 3y + 3z) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = (3x - 4y) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

ومن (i) ينتج $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\frac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z}$; . ومن (ii) ينتج $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{3x - 4y}{3x + 2z}$.

٥ — بفرض $\sin xy + \sin yz + \sin zx = 1$. أوجد $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$.

لنضع $F(x, y, z) = \sin xy + \sin yz + \sin zx - 1$; فيكون

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos xy + z \cos zx, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x \cos xy + z \cos yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y \cos yz + x \cos zx$$

ومنه

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{y \cos yz + x \cos zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x \cos xy + z \cos yz}{y \cos yz + x \cos zx}$$

٦ — بفرض أن u و v معرفتين كدالتين فى x و y بالمعادلتين

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0, \quad g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

أوجد (i) $\partial u/\partial x, \partial v/\partial x$ و (ii) $\partial u/\partial y, \partial v/\partial y$.

(i) لنشتق f و g جزئيا بالنسبة لـ x فنجد :

$$1 + 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

وبحل هاتين العلاقتين آنيا بالنسبة لـ $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v + u(y-2x)}{2(u^2 - v^2)} \quad و \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2x-y) - u}{2(u^2 - v^2)}$$

(ii) لنشتق f و g جزئيا بالنسبة لـ y فنجد :

$$2y + 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad و \quad -x + 2y + 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ومنه

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(x-2y) + 2vy}{2(u^2 - v^2)} \quad و \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(2y-x) - 2uy}{2(u^2 - v^2)}$$

٧ — بفرض $u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$ و $uv + x - y = 0,$ أوجد (ا) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$,

(ب) $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$.

(ا) نعتبر هنا x و y متغيرين مستقلين :

نشتق المعادلتين المفروضتين جزئيا بالنسبة لـ x فنجد :

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2 = 0 \quad و \quad v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0$$

وبحل هاتين العلاقتين آنيا نحصل على $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u+v}{u^2+v^2}$ و $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v-u}{u^2+v^2}$.

ثم نشتقها جزئيا بالنسبة لـ y فنحصل على :

$$2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y} + 3 = 0 \quad و \quad v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

وبالحل الآني لهاتين المعادلتين نجد $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2u+3v}{2(u^2+v^2)}$. و $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2v-3u}{2(u^2+v^2)}$

(ب) نعتبر هنا u و v متغيرين مستقلين .

نشتق المعادلتين المفروضتين جزئيا بالنسبة لـ u فنجد :

$$2u + 2\frac{\partial x}{\partial u} + 3\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \quad و \quad v + \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} = 0.$$

ومنه $\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{2u+3v}{5}$ ، $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2(v-u)}{5}$

ثم نشتقها جزئيا بالنسبة لـ v فنجد :

$$-2v + 2\frac{\partial x}{\partial v} + 3\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \quad و \quad u + \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} = 0.$$

ومنه $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2v-3u}{5}$ ، $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(u+v)}{5}$.

مسائل اضافية

٨ — أوجد dy/dx بفرض أن

(ا) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 1$ (ب) $xy - e^x \sin y = 0$ (جـ) $\ln(x^2+y^2) - \arctan y/x = 0$

ج : (أ) $\frac{3x^2-2xy+y^2}{x^2-2xy+3y^2}$ ، (ب) $\frac{e^x \sin y - y}{x - e^x \cos y}$ ، (جـ) $\frac{2x+y}{x-2y}$

٩ – أوجد $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ بفرض أن :

(أ) $3x^2+4y^2-5z^2 = 60$ ج : $\partial z/\partial x = \frac{3x}{5z}, \ \partial z/\partial y = \frac{4y}{5z}$

(ب) $x^2+y^2+z^2+2xy+4yz+8zx = 20$ ج : $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+y+4z}{4x+2y+z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+y+2z}{4x+2y+z}$

(جـ) $x+3y+2z = \ln z$ ج : $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1-2z}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z}{1-2z}$

(د) $z = e^x \cos(y+z)$ ج : $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{1+e^x \sin(y+z)}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-e^x \sin(y+z)}{1+e^x \sin(y+z)}$

(هـ) $\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x) = 1$

ج : $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos(x+y)+\cos(z+x)}{\cos(y+z)+\cos(z+x)}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(z+x)}$

١٠ – بفرض $x^2+2yz+2zx = 1$ أوجد جميع المشتقات الجزئية الأولى والثانية لـ z .

ج : $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x+z}{x+y}, \ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z}{x+y}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x-y+2z}{(x+y)^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{x+2z}{(x+y)^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2z}{(x+y)^2}$

١١ – إذا كان $F(x,y,z)=0$ فبين أن $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$

١٢ – إذا كان $z=f(x,y)$ و $g(x,y)=0$ فبين أن

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} = \frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}} J\left(\frac{f,g}{x,y}\right).$$

١٣ – إذا كان $f(x,y)=0$ و $g(z,x)=0$ فبين أن $\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial z}.$

١٤ – بفرض $2u-v+x^2+xy = 0, \ u+2v+xy-y^2 = 0.$ أوجد المشتقات الجزئية الأولى لـ u و v بالنسبة x و y والمشتقات الجزئية الأولى لـ x ، y بالنسبة لـ u و v .

ج : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{5}(4x+3y), \ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{5}(2x-y), \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{5}(2y-3x), \ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4y-x}{5}$

$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{4y-x}{2(x^2-2xy-y^2)}, \ \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{y-2x}{2(x^2-2xy-y^2)}, \ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{3x-2y}{2(x^2-2xy-y^2)}, \ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-4x-3y}{2(x^2-2xy-y^2)}$

١٥ – إذا كان $u = x+y+z, \ v = x^2+y^2+z^2, \ w = x^3+y^3+z^3,$ فبين أن .

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{yz}{(x-y)(x-z)}, \ \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x+z}{2(x-y)(y-z)}, \ \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{3(x-z)(y-z)}$$

الفصل التاسع والخمسون

المنحنيات والسطوح الفراغية

المستوى المماس والمستوى العمودى لمنحنى فراغى . يمكن تعريف المنحنى الفراغى بارامتريا بالمعادلات

$$x = f(t), \;\; y = g(t), \;\; z = h(t) \qquad (١)$$

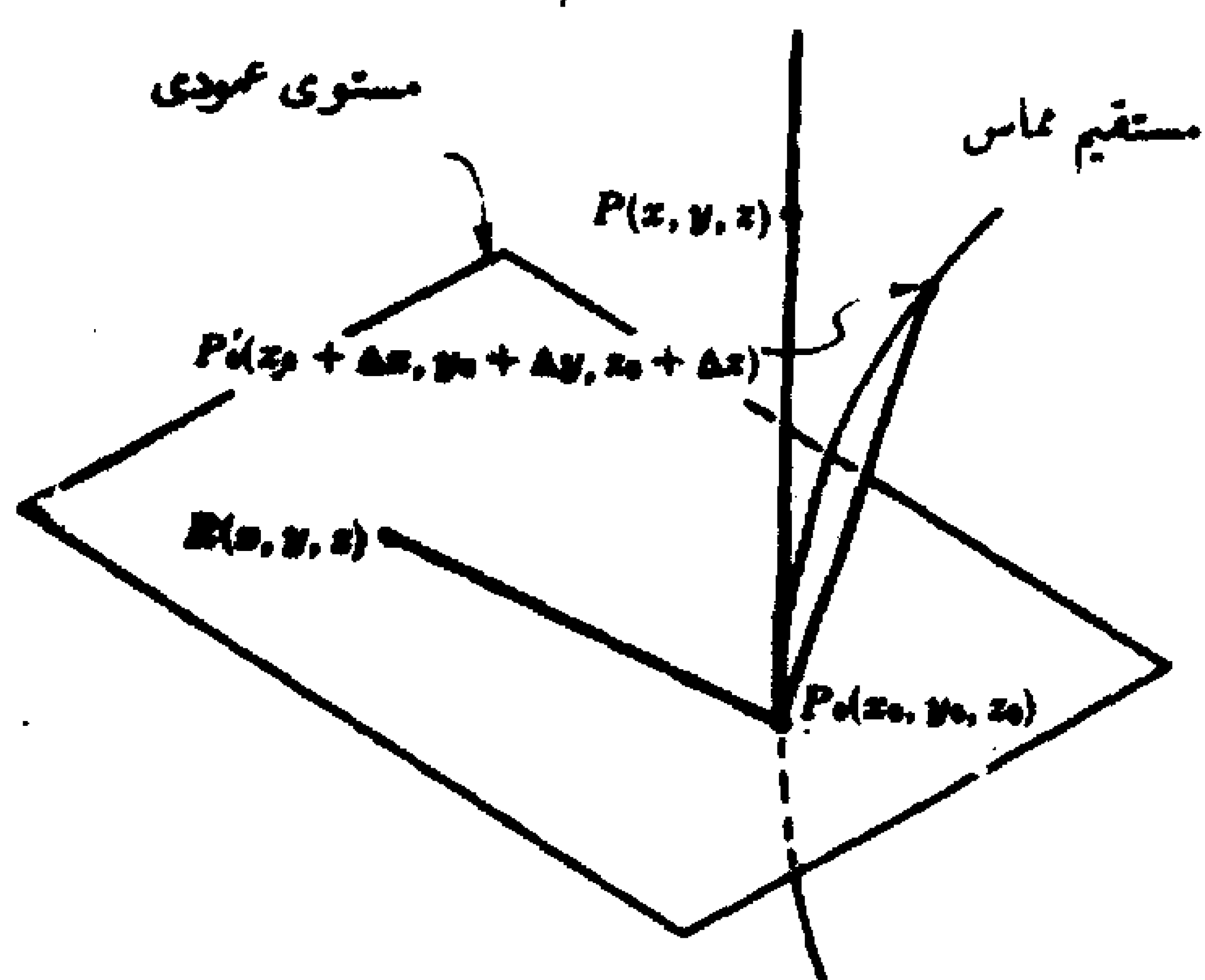
ومعادلتى المستقيم المماس لهذا المنحنى عند إحدى نقاطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (المعينة بـ $t = t_0$) هما :

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{dz}{dt}} \qquad (٢)$$

ومعادلة المستوى العمودى (المار بـ P_0 والعمودى على المستقيم المماس) هى :

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0 \qquad (٣)$$

على أن تحسب المشتقات فى (٢) و (٣) عند النقطة P_0 .



شكل ٥٩ — ١

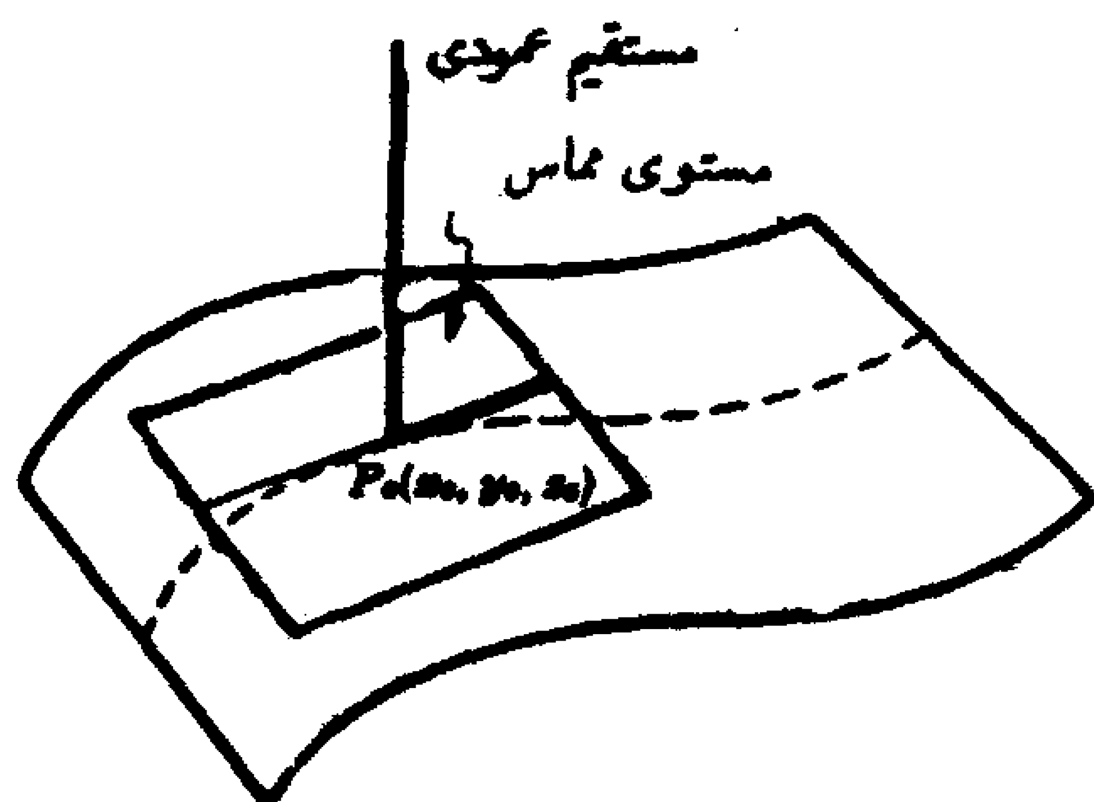
انظر المسألتين ١ — ٢

المستوى المماس والمستقيم العمودى لسطح . إن معادلة المستوى المماس للسطح $F(x, y, z) = 0$ عند إحد نقاطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هى :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \qquad (٤)$$

ومعادلتى المستقيم العمودى هما :

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad (٥)$$



شكل ٥٩ — ٢

على أن تحسب المشتقات الجزئية عند النقطة P_0 . انظر الشكل ٥٩ — ٢

انظر المسائل ٣ — ٩

المنحنى الفراغى • يمكن أن يعرف كذلك بالمعادلتين .

$$F(x,y,z) = 0, \;\; G(x,y,z) = 0 \qquad (٦)$$

عندئذ تكون معادلتا المستقيم المماس عند النقطة ($P_0(x_0, y_0, z_0$) هما :

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \qquad (٧)$$

ومعادلة المستوى العمودى هى :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}(z - z_0) = 0 \qquad (٨)$$

على أن تحسب المشتقات الجزئية فى (٧) و (٨) عند النقطة P_0 .

انظر المسألتين ١٠ – ١١

مســائل محلولة

١ – استنتج المعادلات (٢) و (٣) للمستقيم المماس والمستوى العمودى للمنحنى الفراغى $x = f(t), \; y = g(t), \; z = h(t)$ عند نقطة منه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ معينة بالقيمة $t = t_0$. انظر إلى الشكل ٥٩ – ١

لتكن $P'_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ نقطة أخرى من المنحنى معينة بالقيمة $t = t_0 + \Delta t$ فإذا جعلنا $P'_0 \to P_0$ على المنحنى فإن الوتر $P_0P'_0$ يقترب من المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة P_0 كوضع نهائى .

يمكن تعيين اتجاه الوتر بالمجموعة البسيطة من أعداد الاتجاه $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$ ولكننا سنستخدم المجموعة $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$.

عندئذ عندما تئول P'_0 إلى P_0 وتئول $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$ إلى $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$, فتكون مجموعة أعداد الاتجاه للمستقيم المماس عند P_0 . لنفرض الآن أن $P(x, y, z)$ نقطة اختيارية على المستقيم المماس فيكون عندئذ $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ مجموعة أعداد الاتجاه P_0P .

وبما أن مجموعتى أعداد الاتجاه متناسبة فإن معادلتى المستقيم المماس عند P_0 هما .

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt}$$

وإذا كانت $R(x, y, z)$ نقطة اختيارية فى المستوى العمودى عند P_0 فإن P_0R و P_0P متعامدان ، ومعادلة المستوى العمودى عند P_0 هى :

$$(x-x_0)\frac{dx}{dt} + (y-y_0)\frac{dy}{dt} + (z-z_0)\frac{dz}{dt} = 0$$

٢ ـــ أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لـ

(ا) المنحنى $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$ عند النقطة $t = 1$.

(ب) المنحنى $x = t-2,\ y = 3t^2+1,\ z = 2t^3$ عند نقطة تقاطعه مع المستوى yz .

(ا) نلاحظ أنه عند النقطة $t = 1$ أى عند النقطة $(1, 1, 1)$ يكون $dx/dt = 1,\ dy/dt = 2t = 2,$ و $dz/dt = 3t^2 = 3.$ وباستخدام المعادلة (٢) نجد معادلتى المستقيم المماس $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ وباستخدام المعادلة (٣) فإننا نجد معادلة المستوى العمودى : $(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = x+2y+3z-6 = 0.$

(ب) إن المنحنى المفروض يقطع المستوى yz عند النقطة التى يكون عندها $x = t-2 = 0$ أى عندما يكون $t = 2$. فنقطة التقاطع إذن هى $(0, 13, 16)$. وعند هذه النقطة يكون $dx/dt = 1,\ dy/dt = 6t = 12,$ و $dz/dt = 6t^2 = 24.$

ومعادلتا المستقيم المماس هما $\frac{x}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24}$ ومعادلة المستوى العمودى هى :

$$x + 12(y-13) + 24(z-16) = x + 12y + 24z - 540 = 0.$$

٣ ـــ استنتج المعادلات (٤) و (٥) التى تعطى المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطح $F(x, y, z) = 0$ عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$. انظر الشكل ٥٩ ـــ ٢ .

لتكن $x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t)$ المعادلات البارامترية لأى منحنى على السطح $F(x, y, z) = 0$ ومارا بالنقطة P_0 . عندئذ يكون عند النقطة P_0 :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$$

على أن تحسب جميع المشتقات عند P_0 .

تعبر هذه العلاقة عن تعامد المستقيم المار بالنقطة P_0 والذى أعداد اتجاهه (i) $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$ مع المستقيم المار بالنقطة P_0 والذى أعداد اتجاهه (ii) $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$. إن المجموعة (i) تتعلق بمماس المنحنى الذى يقع فى المستوى المماس للسطح ، أما المجموعة (ii) فتعرف المستقيم العمودى على السطح عند النقطة P_0 ومعادلتا هذا العمودى هما :

$$\frac{x-x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y-y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z-z_0}{\partial F/\partial z}$$

ومعادلة المستوى العمودى عند P_0 هى :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z-z_0) = 0$$

اوجد فى كل من المسألتين ٤ ـــ ٥ معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطح المفروض عند النقطة المفروضة .

٤ ـــ $z = 3x^2 + 2y^2 - 11;\ (2, 1, 3).$

لنضع $F(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0.$ وعند النقطة (2,1,3) يكون :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x = 12,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y = 4,\ \text{و}\ \frac{\partial F}{\partial z} = -1.$$

ومعادلة المستوى المماس هي $12(x-2) + 4(y-1) - (z-3) = 0$ أو $12x + 4y - z = 25.$

ومعادلتا المستقيم العمودي هما $\frac{x-2}{12} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}.$

٥ — $F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0;\ (1,-2,1).$

ويكون عند النقطة (1,—2,1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + 4 = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 3x - 10z = -19,\ \frac{\partial F}{\partial z} = -8z - 10y - 5 = 7.$

ومعادلة المستوى المماس هي $0(x-1) - 19(y+2) + 7(z-1) = 0$ أو $19y - 7z + 45 = 0.$

ومعادلتا المستقيم العمودي هما $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{-19} = \frac{z-1}{7}$ أو $x = 1,\ 7y + 19z - 5 = 0.$

٦ — بين أن معادلة المستوى المماس للسطح $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ عند النقطة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هي :

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

يكون عند النقطة P_0 ، $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2},\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y_0}{b^2},\ \frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z_0}{c^2}.$

ومعادلة المستوى المماس هي $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0.$

وهذه تأخذ الشكل $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$ لأن P_0 نقطة على السطح .

٧ — بين أن السطحين :

$F(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ و $G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$

متماسان عند النقطة (2, 1, 1) .

المطلوب هو أن نبرهن وجود مستوى مماس مشترك للسطحين عند النقطة المذكورة .

لدينا عند (2, 1, 1) ، $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 4,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 8y = 8,\ \frac{\partial F}{\partial z} = -8z = -8$

و $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 6 = -2,\ \frac{\partial G}{\partial y} = 2y - 6 = -4,\ \frac{\partial G}{\partial z} = 2z + 2 = 4.$

وبما أن مجموعتي أعداد الاتجاه [8 — 4,8.] و [4 ,4 — ,2 —] للمستقيمين العموديين على السطحين متناسبتان فللسطحين المستوى المماس المشترك :

$$1(x-2) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0 \quad \text{أو} \quad x + 2y - 2z = 2$$

٨ — بين أن السطحين $F(x,y,z) = xy + yz - 4zx = 0$ و $G(x,y,z) = 3z^2 - 5x + y = 0$ يتقاطعان

بزاوية قائمة عند النقطة (1, 2,1) .

المطلوب هو أن نبرهن تعامد المستويين المماسين للسطحين عند النقطة المفروضة أو أن نبرهن أمراً مماثلا وهو تعامد العمودين عند تلك النقطة .

عند النقطة (1, 2,1) يكون $\frac{\partial F}{\partial x} = y - 4z = -2, \ \frac{\partial F}{\partial y} = x + z = 2,$ و $\frac{\partial F}{\partial z} = y - 4x = -2.$ ، ومنه نجد أن مجموعة أعداد اتجاه المستقيم العمودى على السطح $F(x, y, z) = 0$ هى $[1, -1, 1] = [l_1, m_1, n_1]$.

وعند النقطة (1, 2,1) يكون $\frac{\partial G}{\partial x} = -5, \ \frac{\partial G}{\partial y} = 1,$ و $\frac{\partial G}{\partial z} = 6z = 6.$ ومنه نجد أن مجموعة أعداد اتجاه المستقيم العمودى على السطح $G(x, y, z) = 0$ هى $[-5, 1, 6] = [l_2, m_2, n_2]$.

وبما أن $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 1(-5) + (-1)1 + 1(6) = 0,$ فالعمودان متعامدان .

٩ — بين أن السطحين $F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$ و $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$ يتقاطعان بزاوية قائمة .

لتكن $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة مشتركة على السطحين عند هذه النقطة P_0 يكون :

$\frac{\partial F}{\partial x} = 6x_0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 8y_0, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 16z_0,$ ومنه تكون $[3x_0, 4y_0, 8z_0]$ هى مجموعة أعداد اتجاه المستقيم العمودى على السطح عند P_0 .

وبالمثل نجد أن $[x_0, 2y_0, -4z_0]$ تمثل مجموعة أعداد اتجاه المستقيم العمودى على السطح $G(x, y, z) = 0$ عند P_0 وبما أن

$$\begin{aligned} 3x_0(x_0) + 4y_0(2y_0) + 8z_0(-4z_0) &= 3x_0^2 + 8y_0^2 - 32z_0^2 \\ &= 6(x_0^2 + 2y_0^2 - 4z_0^2) - (3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2) = 6(6) - 36 = 0, \end{aligned}$$

إذن العمودان متعامدان

١٠ — استنتج المعادلات (٧) ، (٨) التى تعطى المستقيم المماس للمنحنى الفراغى $C: F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0$: والمستوى العمودى عليه عند إحدى نقاطه $P_0(z_0, y_0, z_0)$.

إن الاتجاهين $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$ و $\left[\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right]$ عند P_0 عموديان على المستويين المماسين للسطحين $F(x, y, z) = 0$ و $G(x, y, z) = 0$. ولذا فإن الاتجاه

$$\left[\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}\right]$$

عمودى على كل من هذين الاتجاهين ، فهو إذن مماس للمنحنى عند النقطة P_0 . وعلى هذا تكون معادلتا المستقيم المماس هما

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}}$$

ومعادلة المستوى العمودى هى :

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

١١ – أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى للمنحنى $x^2+y^2+z^2 = 14, x+y+z = 6$ عند النقطة $(1, 2, 3)$.

لنضع $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14 = 0$ و $G(x,y,z) = x+y+z-6 = 0$ فيكون عند النقطة $(1, 2, 3)$

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

ومنه نجد أن $[1, -2, 1]$ هى أعداد اتجاه المماس ومعادلتاه إذن هما $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$ ومعادلة المستوى العمودى هى $(x-1) - 2(y-2) + (z-3) = x - 2y + z = 0.$

مسائل اضافية

١٢ – أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لكل من المنحنيات التالية عند النقطة المفروضة .

(أ) $x = 2t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ t = 1$ ج : $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3};\ 2x+2y+3z-9 = 0$

(ب) $x = te^t,\ y = e^t,\ z = t;\ t = 0$ ج : $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1};\ x+y+z-1 = 0$

(ﺟ) $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t;\ t = 0$ ج : $x = z,\ y = 0;\ x+z = 0$

١٣ – بين أن المنحنيين (i) $x = 2-t,\ y = -1/t,\ z = 2t^2$ و (ii) $x = 1+\theta,\ y = \sin\theta - 1,\ z = 2\cos\theta$ يتقاطعان عند النقطة $P(1, -1, 2)$ بشكل عمودى . استنتج معادلات المستقيم المماس ، والمستوى العمودى لكل من المنحنيين عند النقطة P .

ج : (i) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4};\ x-y-4z+6 = 0$ (ii) $x-y = 2,\ z = 2;\ x+y = 0$

١٤ – بين أن مماسات الحلزون $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ تلاقى المستوى xy بنفس الزاوية

١٥ – بين أن طول المنحنى (١) من النقطة $t = t_0$ إلى النقطة $t = t_1$ يعطى بـ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

أوجد طول الحلزون الوارد فى المسألة ١٤ من $t = 0$ إلى $t = t_1$. ج : $\sqrt{a^2+b^2}\, t_1$

١٦ – أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى لكل من المنحنيات عند النقطة المذكورة إلى جانب كل منها :

(أ) $x^2+2y^2+2z^2 = 5,\ 3x-2y-z = 0;\ (1,1,1)$

(ب) $9x^2+4y^2-36z = 0,\ 3x+y+z-z^2-1 = 0;\ (2,-3,2)$

(ﺟ) $4z^2 = xy,\ x^2+y^2 = 8z;\ (2,2,1)$

ج : (أ) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{-8};\ 2x+7y-8z-1 = 0$ (ﺟ) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1},\ z-1 = 0;\ x-y = 0$

(ب) $\frac{x-2}{1} = \frac{z-2}{1},\ y+3 = 0;\ x+z-4 = 0$

١٧ ـ أوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطوح المفروضة عند النقطة المذكورة إلى جانب كل منها .

(ا) $x^2+y^2+z^2=14;\ (1,-2,3)$ ج : $x-2y+3z=14;\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{3}$

(ب) $x^2+y^2+z^2=r^2;\ (x_1,y_1,z_1)$ ج : $x_1x+y_1y+z_1z=r^2;\ \frac{x-x_1}{x_1}=\frac{y-y_1}{y_1}=\frac{z-z_1}{z_1}$

(ج) $x^2+2z^2=3y^2;\ (2,-2,-2)$ ج : $x+3y-2z=0;\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+2}{-2}$

(د) $2x^2+2xy+y^2+z+1=0;\ (1,-2,-3)$ ج : $z-2y=1;\ x-1=0,\ \frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{-1}$

(ه) $z=xy;\ (3,-4,-12)$ ج : $4x-3y+z=12;\ \frac{x-3}{4}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z+12}{1}$

١٨ ـ (ا) بين أن مجموع ما يقطعه المستوى المماس للسطح $x^{1/2}+y^{1/2}+z^{1/2}=a^{1/2}$ عند أية نقطة منه يساوى a .

(ب) بين أن الجذر التربيعى لمجموع مربعات ما يقطعه المستوى المماس للسطح $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}$ عند أية نقطة منه يساوى a .

١٩ ـ بين أن كلا من زوجى السطوح التاليين متماس عند النقطة المذكورة :

(ا) $x^2+y^2+z^2=18,\ xy=9;\ (3,3,0)$

(ب) $x^2+y^2+z^2-8x-8y-6z+24=0,\ x^2+3y^2+2z^2=9;\ (2,1,1)$

٢٠ ـ بين أن كلا من زوجى السطوح التاليين متعامد عند النقطة المفروضة .

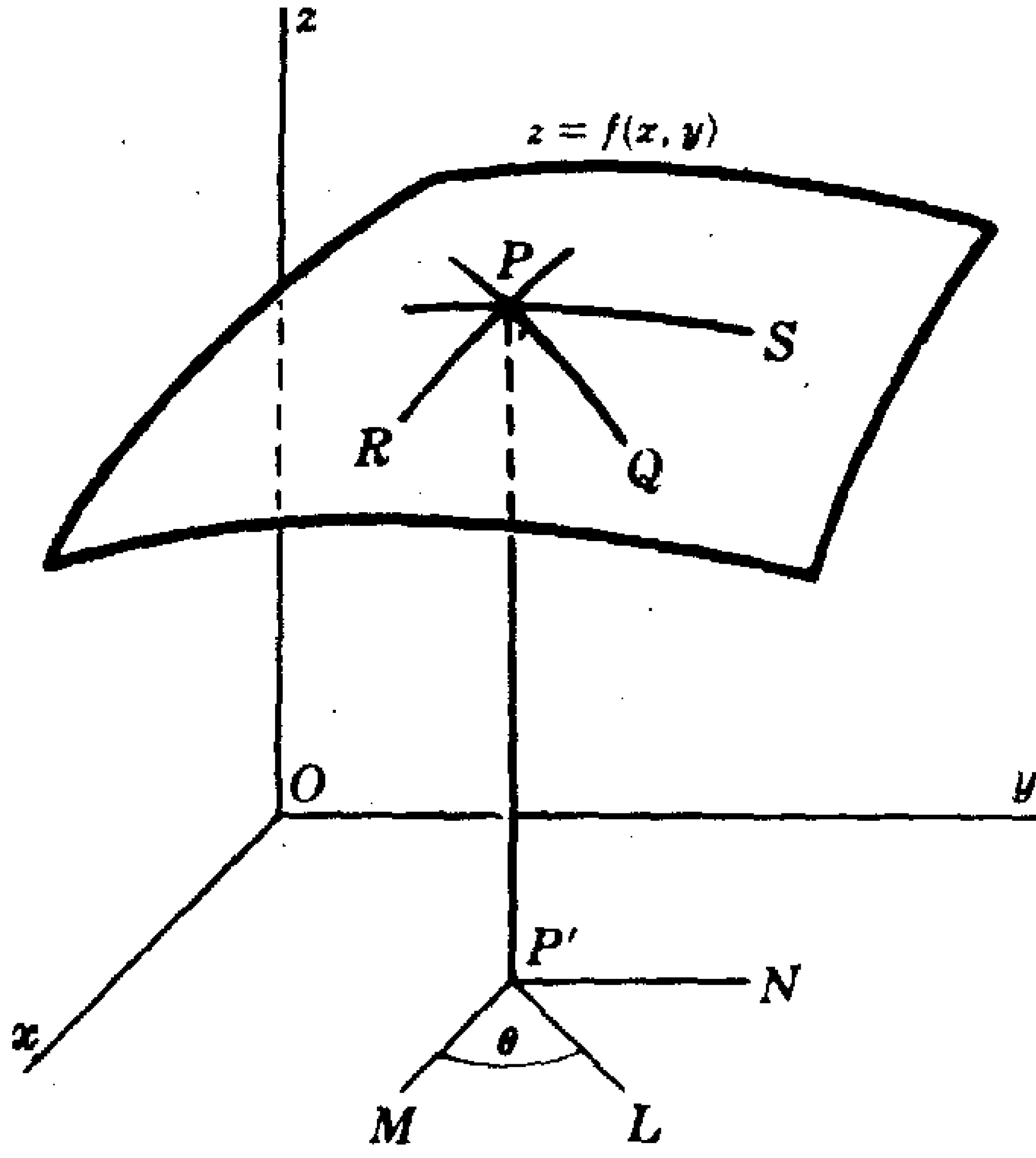
(ا) $x^2+2y^2-4z^2=8,\ 4x^2-y^2+2z^2=14;\ (2,2,1)$

(ب) $x^2+y^2+z^2=50,\ x^2+y^2-10z+25=0;\ (3,4,5)$

٢١ ـ بين أن كل سطح من السطوح الثلاثة (i) $14x^2+11y^2+8z^2=66$، (ii) $3z^2-5x+y=0$، (iii) $xy+yz-4zx=0$ عمودى على السطحين الآخرين عند النقطة (1, 2, 1) .

الفصل الستون

القيم العظمى والصغرى
للمشتقات المتجهة



(شكل ٦٠ – ١

المشتقات المتجهة . يمر بأية نقطة $P\ (x, y, z)$ من السطح $z = f(x, y)$ مستويان موازيان للمستويين الاحداثيين xOz و yOz ويقطعان السطح فى القوسين PR و PS والمستوى xOy فى المستقيمين $P'M$ و $P'N$ كما هو مبين فى الشكل ٦٠ – ١ .

إن المشتقتين الجزئيتين $\partial z/\partial x$ و $\partial z/\partial y$ عند النقطة P أو عند النقطة $P'\ (x, y)$ تعطيان على الترتيب معدل تغير $z = P'P$ عندما نثبت y أو نثبت x ، أى أنهما تعطياننا معدل تغير z فى الاتجاهين الموازيين للمحورين x و y أى ميل المنحنيين PR و PS عند النقطة P .

لننظر بعد ذلك فى مستوى ، مار بالنقطة P عمودى على المستوى xOy ويصنع زاوية θ مع المحور x . ولنفرض أن هذا المستوى يقطع السطح فى المنحنى PQ ويقطع المستوى xOy فى المستقيم $P'L$.

إن المشتقة المتجهة لـ $f(x, y)$ عند P (أو عند P') فى الاتجاه θ تعطى بـ

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

والمشتقة المتجهة تعطى معدل تغير $z = P'P$ فى اتجاه PL أو تعطى ميل المنحنى PQ عند P.

إن المشتقة المتجهة عند موضع P هى دالة فى θ . فإذا حدث أن وجد اتجاه تكون فيه المشتقة المتجهة عند P لها قيمة عظمى نسبية فإننا نسمى هذه القيمة تدرج $f(x, y)$ عند P . فالتدرج إذن هو ميل المماس الأكثر انحدارا لمنحنى يمكن رسمه على السطح عند P .

انظر المسائل ١ – ٨

تعطى المشتقة المتجهة فى الاتجاه (α, β, γ) لدالة $w = F(x, y, z)$ عند $P\ (x, y, z)$ بـ

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma$$

انظر المسألة ٩

القيم العظمى والصغرى النسبية •لنفرض أن لـ $z=f(x,y)$ قيمة عظمى (أوصغرى) نسبية عند $P_0(x_0,y_0,z_0)$. وأي مستوى مار بـ P_0 وعمودي على المستوى xOy يقطع السطح في منحنى له قيمة عظمى (أو صغرى) عند النقطة P_0، أي أن المشتقة المتجهة $\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$ للدالة $z=f(x,y)$ لا بد أن تساوي صفراً عند النقطة P_0 مهما كانت قيمة θ . إذن عند P_0 يكون $\partial f/\partial x = 0$ $\partial f/\partial y = 0$.

والنقطة التي يكون للدالة $z=f(x,y)$ عندها قيمة عظمى (أو صغرى) نسبية ، إذا وجدت هذه النقطة هي من بين النقط (x_0,y_0) التي ينعدم عندها $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ في آن واحد . ولتمييز الحالات المختلفة نقبل دون برهان ما يلي :

ليكن $z=f(x,y)$ ولنفرض أن لهذه الدالة مشتقات جزئية أولى وثانية في منطقة معينة تحوي النقطة (x_0,y_0,z_0) التي عندها $\partial f/\partial x = 0$ و $\partial f/\partial y=0$ فإذا كان $\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$ عند P_0 فإنه يكون $z=f(x,y)$:

قيمة صغرى نسبية عند P_0 إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$

قيمة عظمى نسبية عند P_0 إذا كان $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$

أما إذا كان $\Delta > 0$ فليس للدالة عند P_0 قيمة عظمى أو قيمة صغرى . وإذا كانت الحالة $\Delta = 0$ تكون طبيعة النقطة الحرجة P_0 . غير معينة .

انظر المسائل ١٠ — ١٥

مســائل محلولة

١ — لتكن $P''(x+\Delta x, y+\Delta y)$ نقطة ثانية على $P'L$ في الشكل ٦٠ — ١ ولنرمز بـ Δs للبعد $P'P''$

لنفرض أن الدالة $z=f(x,y)$ مشتقات جزئية متصلة تكون عندها استنادا إلى المسألة ٢٠ من الفصل ٥٧ :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

حيث يئول كل من ϵ_1 و ϵ_2 إلى الصفر عندما يئول كل من Δx و Δy إلى الصفر . ويكون متوسط معدل تغير z بين النقطتين P' و P'' هو :

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}$$
$$= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta + \epsilon_1\cos\theta + \epsilon_2\sin\theta$$

حيث θ الزاوية التي يصنعها المستقيم $P'P''$ مع المحور x .

لنجعل الآن $P''\to P'$ على $P'L$ فنحصل على المعدل الحظي لتغير z أي على المشتقة المتجهة

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

٢ – أوجد مشتقة $z = x^2 - 6y^2$ عند النقطة $P'(7,2)$ فى الاتجاه (أ) $\theta = 45°$ (ب) $\theta = 135°$

إن المشتقة المتجهة عند أية نقطة $P'(x, y)$ فى الاتجاه θ هى

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta = 2x\cos\theta - 12y\sin\theta$$

(أ) عند النقطة $P'(7,2)$ فى الاتجاه $\theta = 45°$ يكون $dz/ds = 2\cdot 7(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}.$

(ب) وعند النقطة $P'(7,2)$ فى الاتجاه $\theta = 135°$ يكون $dz/ds = 2\cdot 7(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -19\sqrt{2}.$

٣ – أوجد المشتقة المتجهة لـ $z = ye^x$ عند النقطة $P'(0,3)$ فى الاتجاه (أ) $\theta = 30°$ (ب) $\theta = 120°$

$$\frac{dz}{ds} = ye^x\cos\theta + e^x\sin\theta$$

(أ) عند النقطة $(0,3)$ فى الاتجاه $\theta = 30°$ يكون $dz/ds = 3\cdot 1(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3}+1).$

(ب) وعند النقطة $(0,3)$ فى الاتجاه $\theta = 120°$ يكون $dz/ds = 3\cdot 1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(-3+\sqrt{3}).$

٤ – تعطى درجة الحرارة T لصفيحة دائرية ساخنة عند أى موضع منها (x, y) بـ $T = \frac{64}{x^2+y^2+2}$، بفرض أن نقطة الأصل فى مركز الصفيحة . أوجد معدل التغير لـ T فى الاتجاه $\theta = \pi/3$ عند الموضع $(1, 2)$

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{64(2x)}{(x^2+y^2+2)^2}\cos\theta - \frac{64(2y)}{(x^2+y^2+2)^2}\sin\theta$$

وعند النقطة $(1, 2)$ فى الاتجاه $\theta = \pi/3$: يكون $\frac{dT}{ds} = -\frac{128}{49}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{256}{49}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{64}{49}(1+2\sqrt{3}).$

٥ – يعطى الجهد الكهربائى V عند أى نقطة (x, y) بـ $V = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. أوجد معدل تغير V عند النقطة $(3, 4)$ فى الاتجاه نحو النقطة $(2, 6)$.

$$\frac{dV}{ds} = \frac{x}{x^2+y^2}\cos\theta + \frac{y}{x^2+y^2}\sin\theta$$

بما أن θ زاوية تقع فى الربع الثانى و $\tan\theta = \frac{6-4}{2-3} = -2,\ \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ، $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

وبالتالى نحصل فى الاتجاه المذكور وعند النقطة $(3,4)$ على :

$$\frac{dV}{ds} = \frac{3}{25}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{4}{25}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{25}.$$

٦ – أوجد التدرج لسطح ونقطة المسألة ٢ .

لدينا عند النقطة $(7, 2)$ وفى الاتجاه θ : $dz/ds = 14\cos\theta - 24\sin\theta.$

لإيجاد قيمة θ التى تجعل dz/ds نهاية عظمى نضع : $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{ds}\right) = -14\sin\theta - 24\cos\theta = 0.$

ومنه نجد $\tan\theta = -24/14 = -12/7$ وبالتالى فإن الزاوية θ فى الربع الثانى أو الرابع . فإذا كانت فى الربع الثانى يكون $\sin\theta = 12/\sqrt{193}$ و $\cos\theta = -7/\sqrt{193}$. وإذا كانت فى الربع الرابع يكون $\sin\theta = -12/\sqrt{193}$ و $\cos\theta = 7/\sqrt{193}$.

وبما أن المقدار $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{d\theta}(-14\sin\theta - 24\cos\theta) = -14\cos\theta + 24\sin\theta$ سالب لزاوية الربع الرابع فإن التدرج هو $\frac{dz}{ds} = 14\left(\frac{7}{\sqrt{193}}\right) - 24\left(-\frac{12}{\sqrt{193}}\right) = 2\sqrt{193}$ والاتجاه هو $\theta = 300^\circ\ 15'$

٧ — أوجد التدرج لسطح ونقطة المسألة ٣ .

لدينا عند النقطة $(0, 3)$ وفى الاتجاه θ ، $dz/ds = 3\cos\theta + \sin\theta$.

لإيجاد قيمة θ التى تجعل dz/ds نهاية عظمى نضع $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{ds}\right) = -3\sin\theta + \cos\theta = 0.$

ومنه نجد $\tan\theta = 1/3$ وبالتالى فإن الزاوية θ فى الربع الأول أو الثالث .

وبما أن المقدار $\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{d\theta}(-3\sin\theta + \cos\theta) = -3\cos\theta - \sin\theta$ سالب لزاوية الربع الأول فإن التدرج هو $\frac{dz}{ds} = 3\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ والاتجاه هو $\theta = 18^\circ\ 26'$

٨ — بين أن V فى المسألة ٥ تتغير بأقصى سرعة لها على طول المستقيمات القطرية الخارجة من نقطة الأصل :

لدينا فى الاتجاه θ وعند نقطة (x_1, y_1) : $\frac{dV}{ds} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\sin\theta.$

وعندما $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dV}{ds}\right) = -\frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\sin\theta + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta = 0,$ يكون $\tan\theta = \frac{y_1/(x_1^2 + y_1^2)}{x_1/(x_1^2 + y_1^2)} = \frac{y_1}{x_1}.$

والزاوية θ هى زاوية ميل المستقيم الذى يصل نقطة الأصل بالنقطة (x_1, y_1)

٩ — أوجد المشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ عند النقطة $(1, -2, 1)$ على طول المنحنى $x = t,\ y = t - 3,\ z = t^2$ وفى جهة تزايد z .

إن مجموعة أعداد الاتجاه لمماس المنحنى عند $(1, -2, 1)$ هى $[1, 1, 2]$ وجيوب تمام الاتجاه هى $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$. والمشتقة المطلوبة هى :

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

١٠ — ابحث فى القيم العظمى والصغرى لـ $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$

أن الشرطين $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$ يتحققان عندما $x = 2$ و $y = -3$

وبما أن $f(x, y) = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + 12,$ فإنه من الواضح أن $f(2, -3) = 12$ قيمة صغرى الدالة .

ومن الناحية الهندسية تمثل النقطة $(2, -3, 12)$ أدنى نقطة للسطح $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25.$

١١ — ابحث فى القيم العظمى والصغرى لـ $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$

أن الشرطين $\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y) = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + x) = 0$ يتحققان عندما $x = 0, y = 0$

وعندما $x = -1,\ y = -1$ وعند النقطة $(0, 0)$ يكون $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0$, و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0$.
وبالتالى فإن $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 > 0,$

والنقطة $(0, 0)$ ليست قيمة عظمى أو قيمة صغرى .

أما عند النقطة $(-1, -1)$ فيكون $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$, وبالتالى فإن $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -27 < 0$, حيث أن $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$. ، فإن $f(-1, -1) = 1$ تمثل قيمة عظمى للدالة .

١٢ – قسم العدد 120 إلى ثلاثة أقسام بحيث يكون مجموع حاصل ضرب كل اثنين منها نهاية عظمى .

لتكن x و y و $120 - (x + y)$ الأقسام الثلاثة .

إذن الدالة التى نبحث عن قيمها العظمى هى $S = xy + (x + y)(120 - x - y)$.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - 2x - y, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - x - 2y.$$

وعندما يكون $\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = 0$, نجد $2x + y = 120$ و $x + 2y = 120$. والأعداد الثلاثة هى $x = 40,\ y = 40,\ 120 - (x + y) = 40$ و $S = 3 \cdot 40^2 = 4800$. التقسيم $1, 1, 118$ يكون $S = 237$
ومن الواضح إذن أن $S = 4800$ قيمة عظمى .

١٣ – أوجد أقرب نقطة لنقطة الأصل فى المستوى $2x - y + 2z = 16$

لتكن (x, y, z) النقطة المطلوبة فعندئذ يكون مربع البعد عن نقطة الأصل $D = x^2 + y^2 + z^2$. ، ولكن بما أن $2x - y + 2z = 16$, $y = 2x + 2z - 16$ فإن $D = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$. ويعطينا الشرطان $\partial D/\partial x = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$ و $\partial D/\partial z = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$ المعادلتين $5x + 4z = 32,\ 4x + 5z = 32$ و $x = z = 32/9$. اللتين تتحققان عندما $x = z = 32/9$. وبما أنه من المعلوم أن النقطة التى تجعل D أصغر ما يمكن موجودة فإن $(32/9, -16/9, 32/9)$ هى تلك النقطة .

١٤ – بين أن متوازى المستطيلات الذى حجمه V أكبر ما يمكن ومساحة سطحه ثابتة هو مكعب .

لتكن x, y, z أبعاد متوازى المستطيلات . عندئذ يكون $V = xyz$ و $S = 2(xy + yz + zx)$.

يمكن حل العلاقة الثانية بالنسبة لـ z والتعويض بعد ذلك فى الأولى لنحصل على V كدالة فى x و y ولكنا نفضل أن نتجاوز هذه الخطوة ونعتبر z دالة فى x و y عندئذ يكون :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\left(y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\left(x + z + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

ومن المعادلتين الأخيرتين نجد $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y + z}{x + y}$ و $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x + z}{x + y}$.

وعلى هذا فإن الشرطين $\frac{\partial V}{\partial x} = yz - \frac{xy(y + z)}{x + y} = 0$ و $\frac{\partial V}{\partial y} = xz - \frac{xy(x + z)}{x + y} = 0$ يأخذان الشكل $y^2(z - x) = 0$ و $x^2(z - y) = 0$. ومنه نجد $x = y = z$ وهو المطلوب .

١٥ – أوجد الحجم V لأكبر متوازى مستطيلات يمكن رسمه داخل مجسم القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$

لتكن $P(x, y, z)$ رأس متوازى المستطيلات الواقع فى الثمن الأول عندئذ $V = 8xyz$.

لنعتبر z دالة فى المتغيرين المستقلين x و y معرفة بمعادلة الجسم . عندئذ يكون شرطا القيمة العظمى هما :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad و \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \quad (١)$$

ومن معادلة الجسم نحصل على $\frac{2x}{a^2}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ و $\frac{2y}{b^2}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$

وبحذف $\partial z/\partial x$ ، $\partial z/\partial y$ من هاتين العلاقتين والعلاقة (١) نحصل على

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz - \frac{c^2x^2y}{a^2z}\right) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz - \frac{c^2xy^2}{b^2z}\right) = 0$$

ومنه نجد أخيرا : (٢) $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2}$

ومن (٢) ومعادلة الجسم نجد $x = a\sqrt{3}/3,\ y = b\sqrt{3}/3,$ و $z = c\sqrt{3}/3.$ وعلى هذا يكون :

$$V = 8xyz = (8\sqrt{3}/9)abc$$

مسائل اضافية

١٦ – أوجد المشتقات المتجهة للدوال التالية عند النقطة المفروضة فى الاتجاه المذكور إلى جانب كل منهما :

(أ) $z = x^2 + xy + y^2,\ (3, 1),\ \theta = \pi/3.$ (ب) $z = x^3 + y^3 - 3xy,\ (2, 1),\ \theta = \text{arc tan } 2/3.$

(جـ) $z = y + x\cos xy,\ (0, 0),\ \theta = \pi/3.$ (د) $z = 2x^2 + 3xy - y^2,$ عند النقطة $(1, -1)$ ونحو النقطة $(1, 2)$

ج : (أ) $\frac{1}{2}(7 + 5\sqrt{3})$ (ب) $21\sqrt{13}/13$ ، (جـ) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$ ، (د) $11\sqrt{5}/5$

١٧ – أوجد تدرج كل من دوال المسألة ١٦ عند النقطة المفروضة :

ج : (أ) $\sqrt{74}$ (ب) $3\sqrt{10}$ (جـ) $\sqrt{2}$ (د) $\sqrt{26}$

١٨ – بين أن تدرج الدالة $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ من المسألة ٨ ثابتا على أية دائرة $x^2 + y^2 = r^2.$

١٩ – لدينا هضبة ممثلة بـ $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$ أوجد (أ) اتجاه أكبر ميل عند $(1, 1, 2)$ ، و (ب) اتجاه خط المنسوب (حيث يكون z ثابتا) لاحظ أن الاتجاهين متعامدين (أ) $\text{arc tan } \frac{1}{2}.$ فى الربع الثالث (ب) $\text{arc tan } -2$

٢٠ – بين أن مجموع مربعى مشتقى $z = f(x, y)$ عند أية نقطة من السطح وفى اتجاهين متعامدين ، ثابت ، وأنه يساوى مربع التدرج .

٢١ – بفرض أن $z = f(x, y)$ و $w = g(x, y)$ بحيث يكون $\partial z/\partial x = \partial w/\partial y$ و $\partial z/\partial y = -\partial w/\partial x$.
فإذا كان θ_1 , θ_2 اتجاهين متعامدين فبين أنه عند أية نقطة $P(x, y)$ يكون $\partial z/\partial s_1 = \partial w/\partial s_2$ و $\partial z/\partial s_2 = -\partial w/\partial s_1$.

٢٢ – أوجد مشتقات الدوال التالية عند النقطة والاتجاه المذكور إلى جانب كل منها .

(أ) xy^2z, $(2, 1, 3)$, $[1, -2, 2]$ ، (ب) $x^2 + y^2 + z^2$ عند النقطة $(1, 1, 1)$ ونحو النقطة $(2, 3, 4)$

(جـ) $x^2 + y^2 - 2xz$ عند النقطة $(1, 2, 3)$ وعلى $x^2 + y^2 - 2xz = 6$, $3x^2 - y^2 + 3z = 0$ وفى جهة تزايد z

ج : (أ) $-17/3$ (ب) $6\sqrt{14}/7$ (جـ) 0

٢٣ – ابحث فى القيم العظمى والصغرى لكل من الدوال التالية :

(أ) $z = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ ج : قيمة عظمى $= 2$ عندما $x = 1, y = 2$

(ب) $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ج : قيمة صغرى $= -1$ عندما $x = 1, y = 1$

(جـ) $z = x^2 + 2xy + 2y^2$ ج : قيمة صغرى $= 0$ عندما $x = 0, y = 0$

(د) $z = (x - y)(1 - xy)$ ج : لا يوجد قيم عظمى أو صغرى

(هـ) $z = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$ ج : لا يوجد قيم عظمى أو صغرى

(و) $z = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$ ج : قيمة صغرى $= -\sqrt{6}$ عندما $x = -\sqrt{6}/6$, $y = \sqrt{6}/3$;
قيمة عظمى $= \sqrt{6}$ عندما $x = \sqrt{6}/6$, $y = -\sqrt{6}/3$

(ز) $z = xy(2x + 4y + 1)$ ج : قيمة عظمى $1/216$ عندما $x = -1/6$, $y = -1/12$

٢٤ – أوجد الأعداد الموجبة x, y, z بحيث يكون :

(أ) $x + y + z = 18$ و x, y, z نهاية عظمى ، (جـ) $x + y + z = 20$ و xyz^2 نهاية عظمى .

(ب) $xyz = 27$ و $x + y + z$ نهاية صغرى ، (د) $x + y + z = 12$ ، xy^2z^3 نهاية عظمى .

ج : (أ) $x = y = z = 6$, ، (ب) $x = y = z = 3$, ، (جـ) $x = y = 5$, $z = 10$, ، (د) $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$

٢٥ – أوجد القيمة الصغرى لمربع البعد بين نقطة الأصل والمستوى $Ax + By + Cz + D = 0$.

ج : $D^2/(A^2 + B^2 + C^2)$

٢٦ – (أ) لنفرض أن مساحة سطح صندوق على شكل متوازى مستطيلات مكشوف من أعلى تساوى $12\ m^2$. أوجد أعظم حجم ممكن (ب) لنفرض أن حجم صندوق على شكل متوازى مستطيلات مكشوف من أعلى يساوى $32\ m^3$. أوجد أصغر مساحة سطح له .

ج : (أ) $4 m^3$. (ب) $48\ m^2$

٢٧ – أوجد أقرب نقطة من $z = xy - 1$ لنقطة الأصل .

ج : $(0, 0, -1)$

٢٨ – أوجد معادلة المستوى الذى يمر بالنقطة $(2, 1, 1)$ ويقطع من الثمن الأول أصغر حجم ممكن .

ج : $2x + 2y + z = 6$.

٢٩ – عين قيم p و q بحيث يكون المجموع S لمربعات الأبعاد الرأسية للنقط $(5, 2)$ و $(3, 1)$ و $(2, 0)$ عن المستقيم $y = px + q$ أصغر مايمكن .

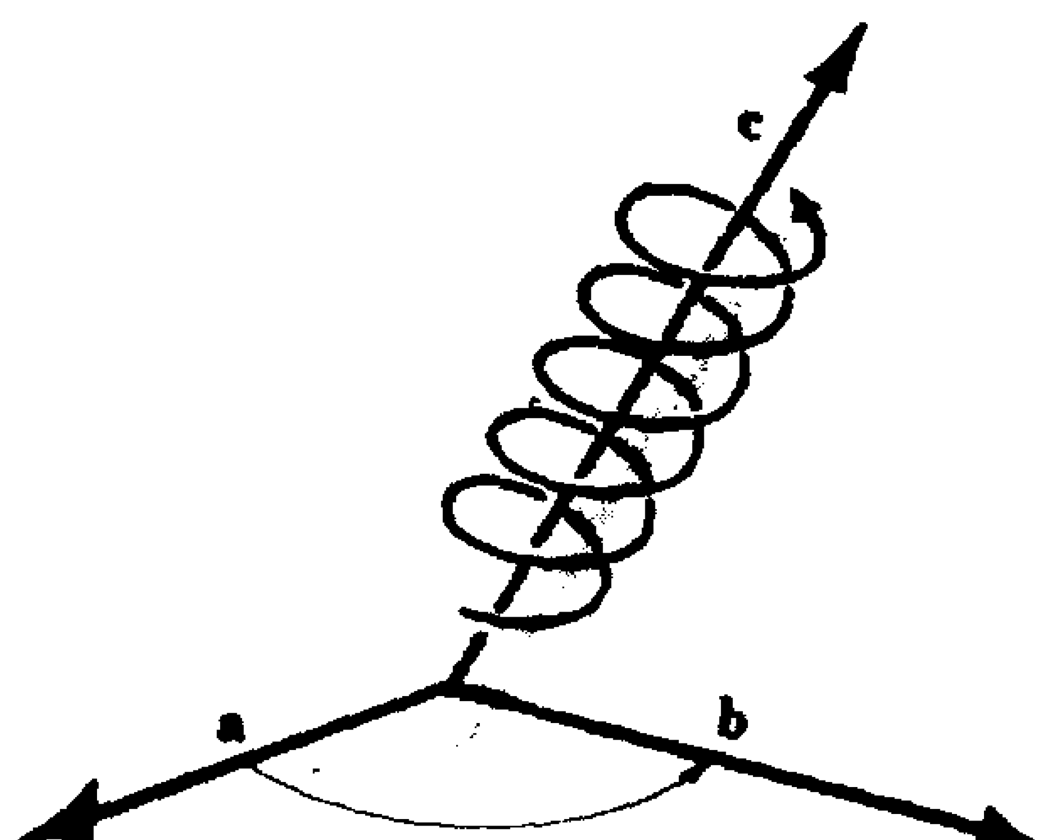
إرشاد أن : $S = (q-2)^2 + (p+q-3)^2 + (2p+q-5)^2.$

ج : $p = 3/2, \; q = 11/6$.

الفصل الحادى والستون

المتجهات فى الفراغ

ان دراسة الهندسة التحليلية المستوية : تتعقد إذا ما استخدمنا طرق المتجهات وذلك بسبب الهيمنة التقليدية على الموضـوع الناشىء عن مفهوم ميل المستقيم. وعلى العكس من ذلك فإن تبسيطات هامة تطرأ على دراسة الهندسة التحليلية الفراغية باستخدام المتجهات .



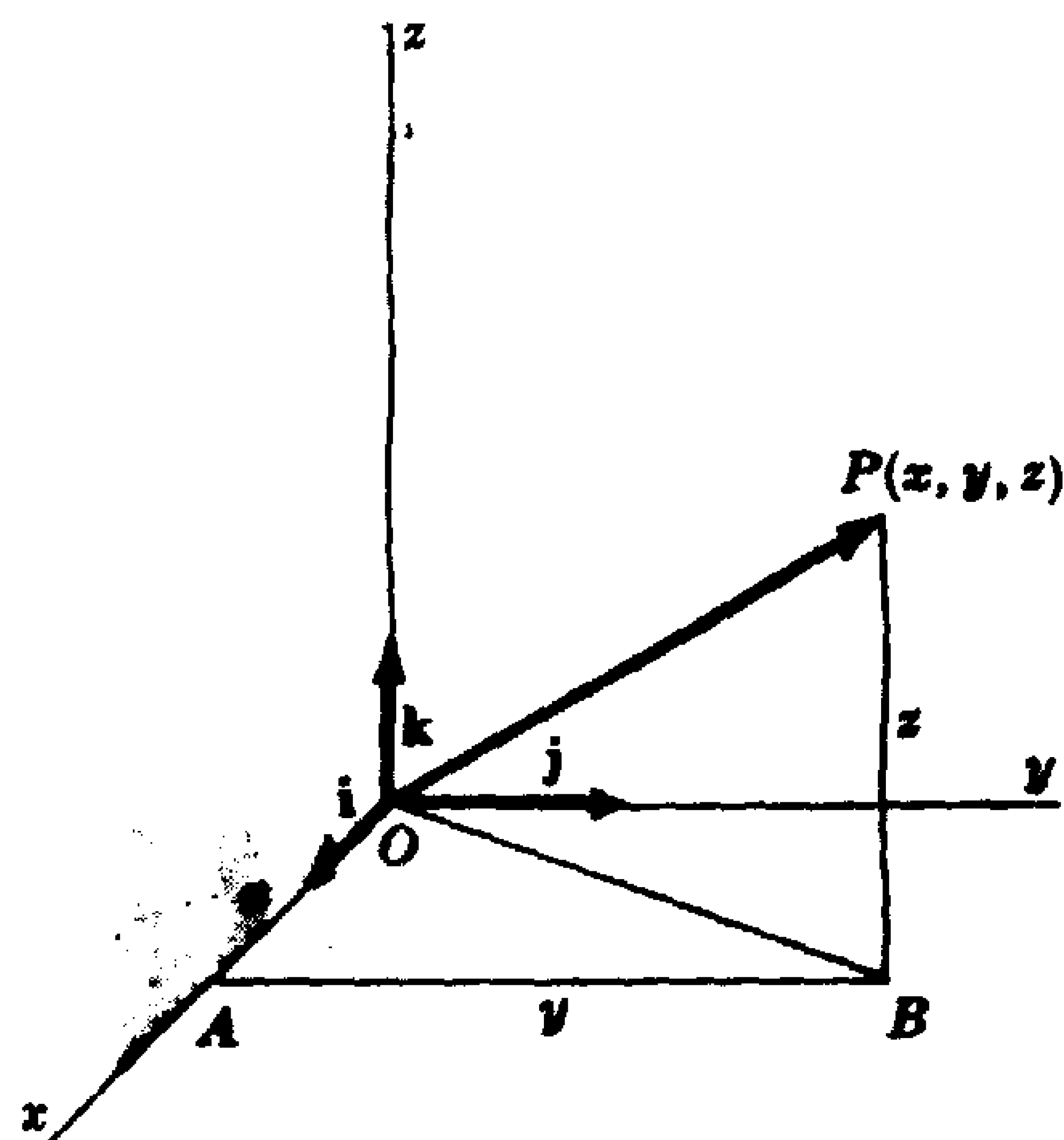
شكل ٦١ — ١

نقول عن ثلاثة متجهات **a, b, c** ليست واقعة فى مستوى واحد وليس فيها متجهان متوازيان ، ومنبعثة من نقطة مشتركة إنها تشكل مجموعة يمينية أو ثلاثية يمينية إذا كان المتجه **c** جهة تقدم لولبية يمنى عندما تدور الزاوية الصغيرة من **a** إلى **b** كما هو مبين فى الشكل ٦١ — ١ . يتضح عندئذ أن جهة **b** ستكون جهة تقدم البريمة اليمنى عندما تدور من **c** إلى **a** وإن جهة **a** هى جهة تقدم البريمة عندما تدور من **b** إلى **c** .

لنفرض أننا اخترنا مجموعة محاور احداثية يمينية فى الفراغ وأننا اتخذنا **i, j, k** متجهات وحدة فى الاتجاه الموجب للمحاور x, y, z على الترتيب ، كما هو مبين فى الشكل ٦١ — ٢ عندئذ يمكن ، بشكل مواز لما تقدم فى الفصل ١٨ أن نكتب أى متجه **a** بالشكل :

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

بينما يمكن ، إذا كانت $P(x, y, z)$ نقطة عامة فى الفراغ ، أن نكتب متجه الموضع **r** للنقطة P بالشكل :



شكل ٦١ — ٢

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = \mathbf{OB} + \mathbf{BP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP} \quad (١)$$
$$= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

بالإضافة لذلك فإن الجبر الذى قدمناه فى الفصل ١٨ يصلح هنا كذلك مع تغييرات بسيطة كالتى يستدعيها اختلاف الأبعاد المطلوبة فمثلا إذا كان

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$، فإن :

$k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j} + ka_3\mathbf{k}$ حيث k أى مقدار عـددى .

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ إذا (وإذا فقط) كان : $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

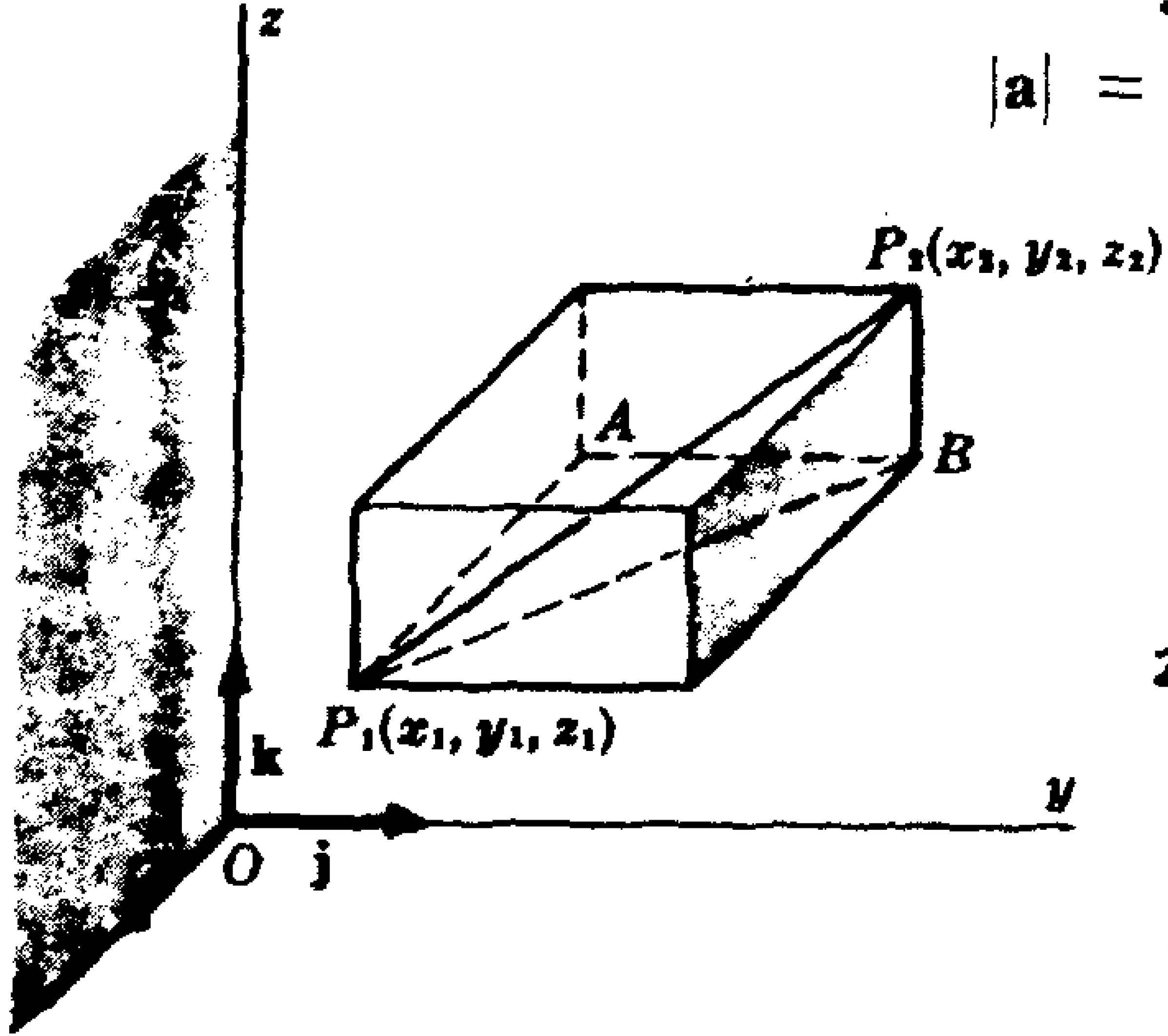
$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1)\mathbf{i} + (a_2 \pm b_2)\mathbf{j} + (a_3 \pm b_3)\mathbf{k}$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta,$ حيث θ هى الزاوية الصغرى بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1; \quad \mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = 0$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$\mathbf{a.b} = 0$ إذا كان $\mathbf{a} = 0$ أو $\mathbf{b} = 0$ أو $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين .



شكل ٦١ ــ ٣

ومن (١) نستنتج البعد بين النقطة $P(x, y, z)$ ونقطة الأصل :

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (٢ - ١)$$

وإذا كانت $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ أية نقطتين (أنظر الشكل ٦١ ــ ٣) فإن :

$$\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{P_1B} + \mathbf{BP_2} = \mathbf{P_1A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP_2}$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

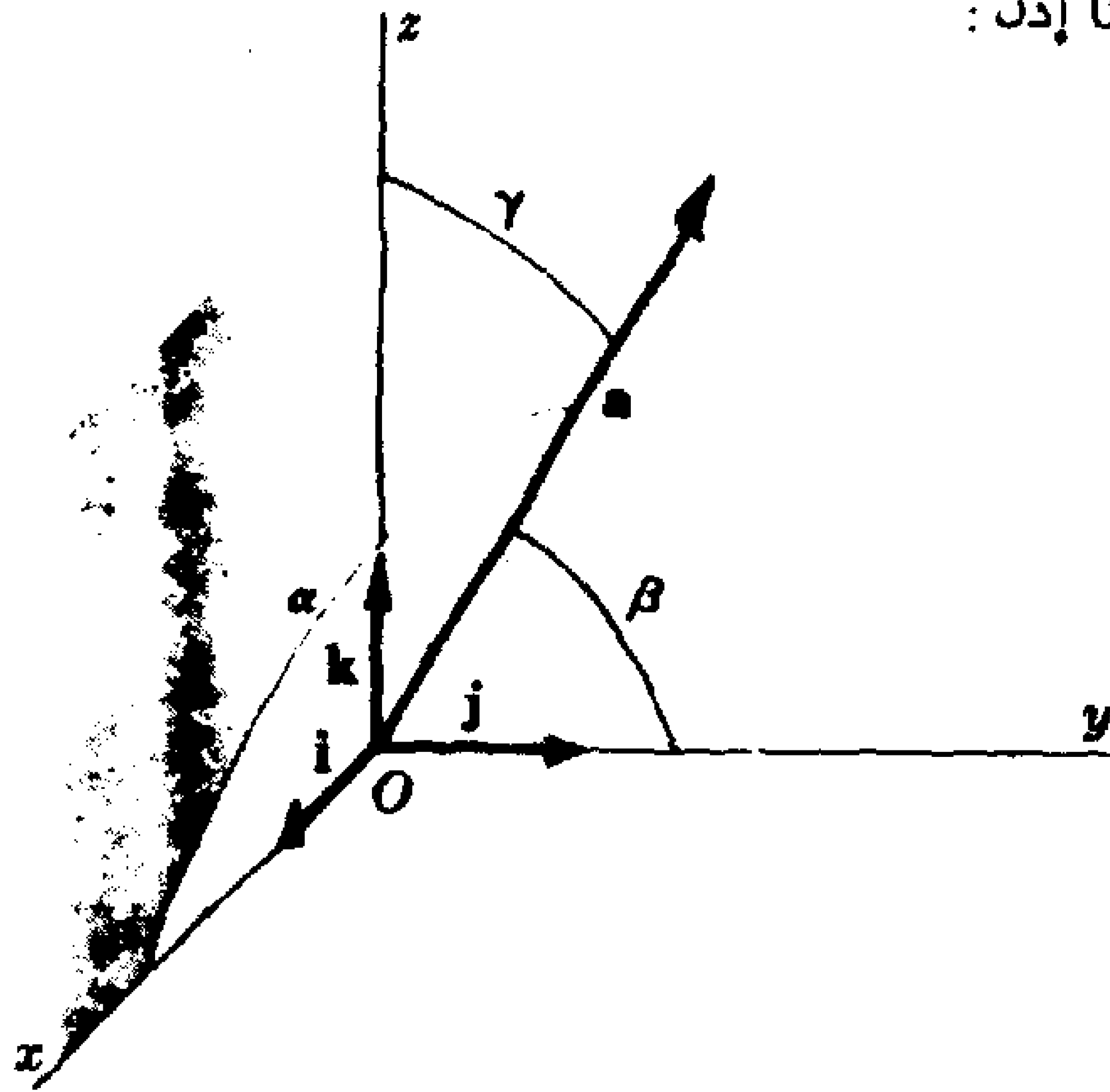
ومنـــه يكون :

$$|\mathbf{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (٢ - ب)$$

وهى الصيغة الشائعة التى تعطى المسافة بين نقطتين .

أنظـــر المسائل ١ ــ ٣

جيوب تمام اتجاه متجه : ليكن لدينا المتجه $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ولنفرض أنه يصنع الزوايا α, β, γ مع المحاور x, y, z الموجبة على الترتيب ، كما هو مبين فى الشكل ٦١ــ٤ لدينا إذن :



شكل ٦١ ــ ٤

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{a}|\cos\alpha = |\mathbf{a}|\cos\alpha$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\beta, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\gamma$$

ومنه ينتج

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$$
$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

وهذه هى جيوب تمام إتجـــاه $\mathbf{a}$ وبما أن :

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1$$

فإن المتجه $\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ هو متجه وحدة مواز للمتجه $\mathbf{a}$.

المتجه العمودى على متجين مفروضين : ليكن :

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

متجهين غير متوازيين منبعثين من نقطة بداية مشتركة P . يمكننا بحسابات سهلة برهنة أن :

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (٣)$$

عمودى على كل من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وبالتالى فهو عمودى على مستوى هذين المتجهين .

سنرى فى المسألتين ٥ و ٦ أن :

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta \qquad (٤)$$

وهى مساحة متوازى الأضلاع الذىفيه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ضلعان غير متوازيين .

وإذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متوازيين فإن $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ومن (٣) نجد أن $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ أى أن $\mathbf{c}$ هو المتجه الصفرى . والمتجه الصفرى ، حسب التعريف هو متجه طوله صفر وليس له اتجاه محدد .

حاصل الضرب المتجهة لمتجهين : ليكن :

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \quad و \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

متجهين ببداية مشتركة P لنرمز بـ n لمتجه الوحدة العمودى على مستوى $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ بحيث تشكل $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}$ بهذا الترتيب ، ثلاثية يمينية عند P كما هو مبين فى الشكل ٦١ — ٥ . يعرف حاصل الضرب المتجه للمتجه $\mathbf{a}$ فى المتجه $\mathbf{b}$ بالصيغة

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta\, \mathbf{n} \qquad (٥)$$

حيث θ هى الزاوية الصغرى بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وعلى هذا فإن المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عمودى على كل من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

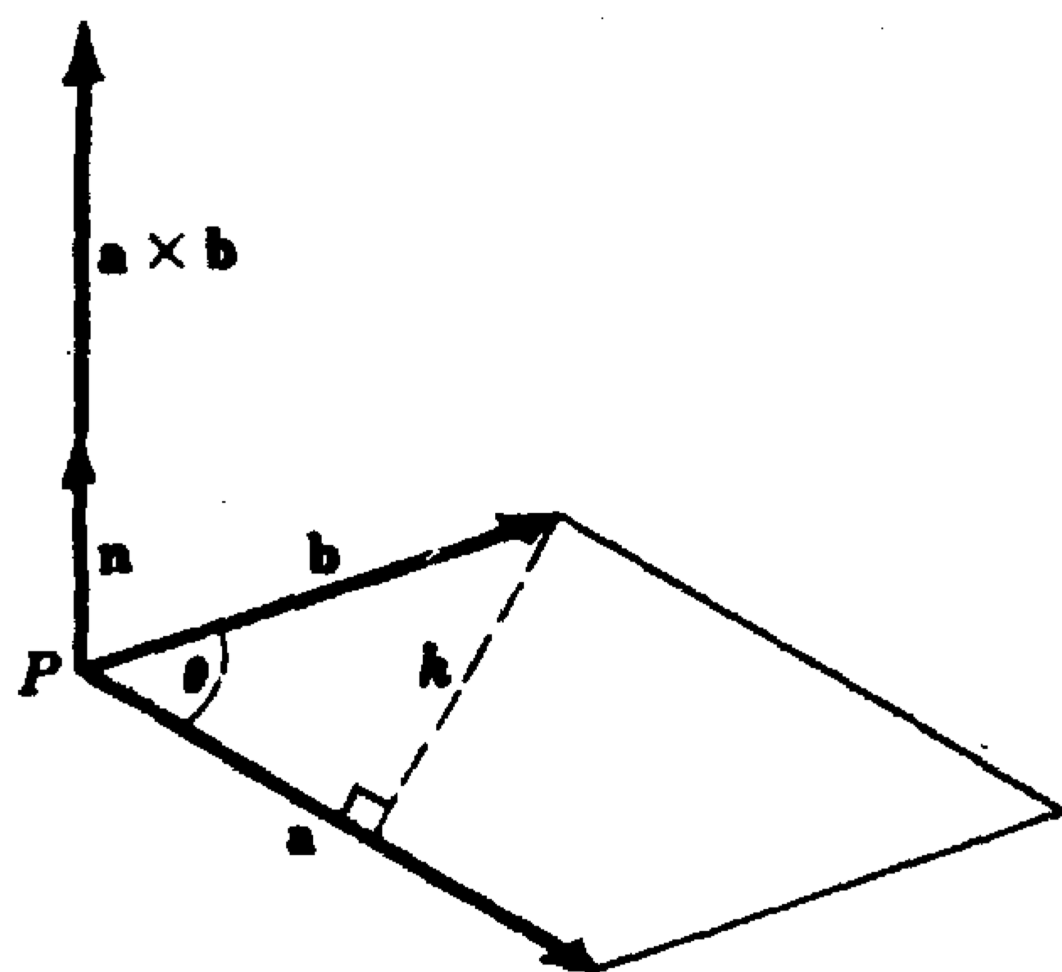
واستناداً إلى المسألة ٦ يكون :

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \sin\theta$$

مساوياً لمساحة متوازى الأضلاع الذى فيه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ضلعان غير متوازيين .

وإذا كان $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متوازيين فإن $\theta = 0$ أو $\theta = \pi$ ومنه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ وعلى هذا :

فإن : $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \quad (٦)$



شكل ٦١ — ٥

وإذا عكسنا فى (٥) موضعى $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ فإنه ينبغىأن نضع $-\mathbf{n}$ بدلا من $\mathbf{n}$ وبالتالى :

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad (٧)$$

وبما أننا اخترنا مجموعة المحاور الإحداثية يمينية فإنه ينتج أن :

$$\begin{matrix} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{matrix} \qquad (٨)$$

وسنبرهن فى المسألة ٨ قانون التوزيع التالى لأى متجهات :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \qquad (٩)$$

وبضرب المعادلة (٩) فى — واستخدام المعادلة (٧) لنحصل على قانون التوزيع المرافق :

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} \qquad (٩)$$

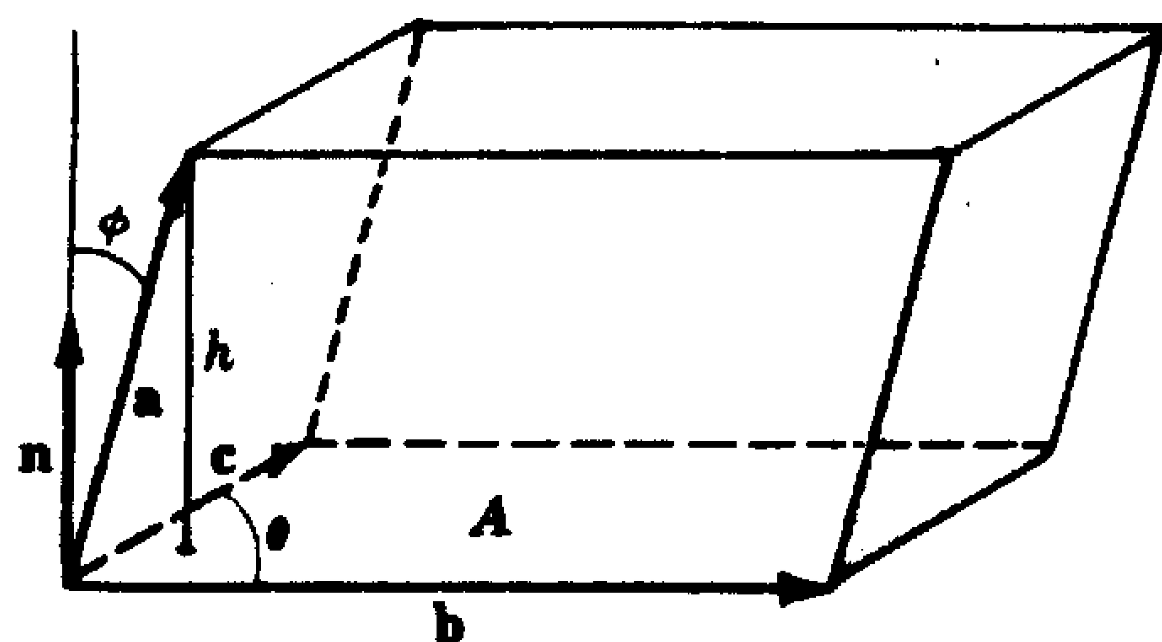
ومن هذا ينتج أن :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{a}\times\mathbf{d} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{d} \qquad (١٠)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (١١)$$

أنظــر المسألتين ٩ — ١٠

حاصل الضرب الثلاثى العددى : لتكن θ أصغر الزاويتين بين المتجهين b و c كما هو مبين فى الشكل ٦١ — ٦ ولتكن ϕ أصغر الزاويتين بين المتجهين a و b × c . نعرف حاصل الضرب الثلاثى العددى على أنه :



شكل ٦١ — ٦

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\sin\theta\,\mathbf{n} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\sin\theta\cos\phi$$
$$= (|\mathbf{a}|\cos\phi)(|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\sin\theta) = hA$$

= حجم متوازى السطوح

يمكننا أن نبرهن أن (أنظر المسألة ١١) .

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \qquad (١٢)$$

والآن :

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

بينما :

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

ولدينا ، بشكل مماثل :

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \qquad (١٣)$$

و
$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) \qquad (١٤)$$

وينتج من تعريف $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ كحجم ، أنه إذا كانت a, b, c واقعة فى مستوى واحد فإن $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$ وبالعكس .

إن الأقواس المستخدمة فى $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ و $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}$ ليست ضرورية . فمثلا لايمكننا أن نفهم $\mathbf{a}.\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ إلا على الشكل $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ أو على الشكل $(\mathbf{a}.\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ والشكل الأخير مرفوض لأن a.b عددى و $(\mathbf{a}.\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ لا معنى له .

أنظــر المسألة ١٢ .

حاصل الضرب المتجه الثلاثي .سنرى في المسألة ١٣ . أن :

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \qquad (١٥)$$

وبشكل مماثل سنجد :

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} \qquad (١٦)$$

وعلى هذا اذا استثنينا الحالة التي يكون فيها $\mathbf{b}$ عمودياً على كل من $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{c}$ فإن :

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

مع العلم أن استخدام الأقواس هنا ضروري .

الخط المستقيم . يمكن في الفراغ تعريف المستقيم الذي يمر بنقطة مفروضة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على أنه المحل الهندسي للنقطة $P(x, y, z)$ بحيث يكون P_0P موازياً لاتجاه مفروض $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ ليكن $\mathbf{r}_0$ ، $\mathbf{r}$ متجهي الموضع لـ P_0 و P

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0 = k\mathbf{a} \quad (\text{متغير عددى } k) \qquad (١٧)$$

وهي المعادلة الاتجاهية للمستقيم . (أنظر الشكل ٦١ — ٧)

لنكتب (١٧) بالشكل :

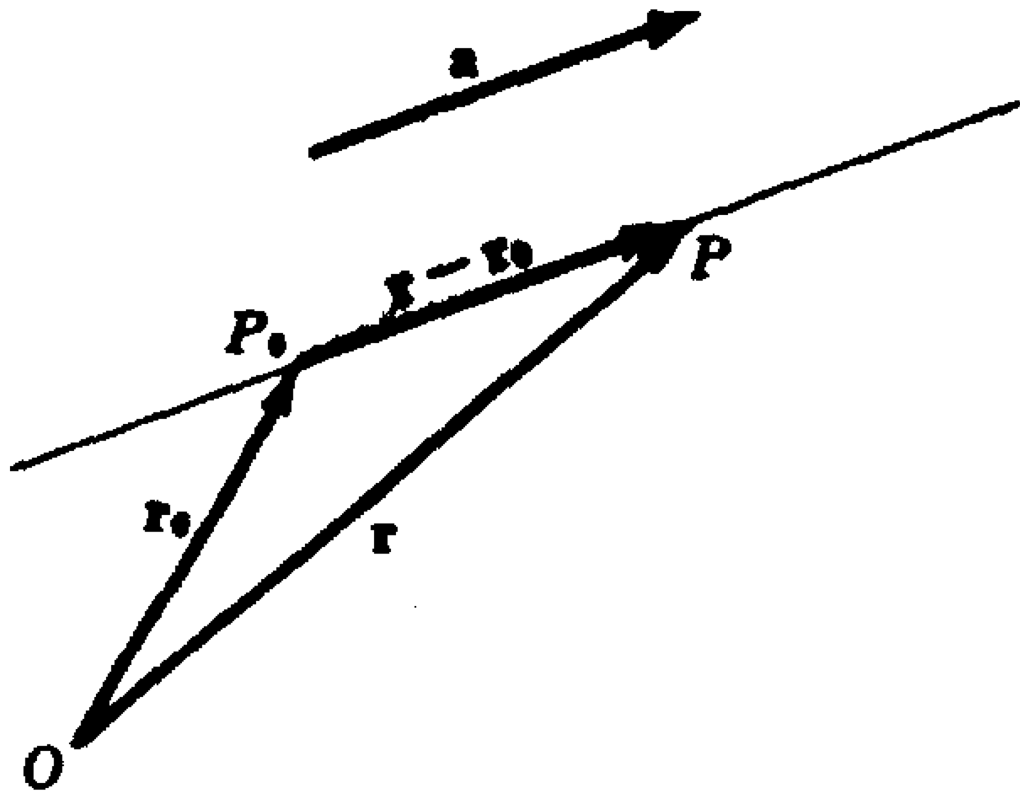
$$(x-x_0)\mathbf{i} + (y-y_0)\mathbf{j} + (z-z_0)\mathbf{k} = k(a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}),$$

وبفصل المركبات نجـد :

$$x-x_0 = ka_1, \quad y-y_0 = ka_2, \quad z-z_0 = ka_3$$

وبحذف k نجـد :

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \qquad (١٨)$$

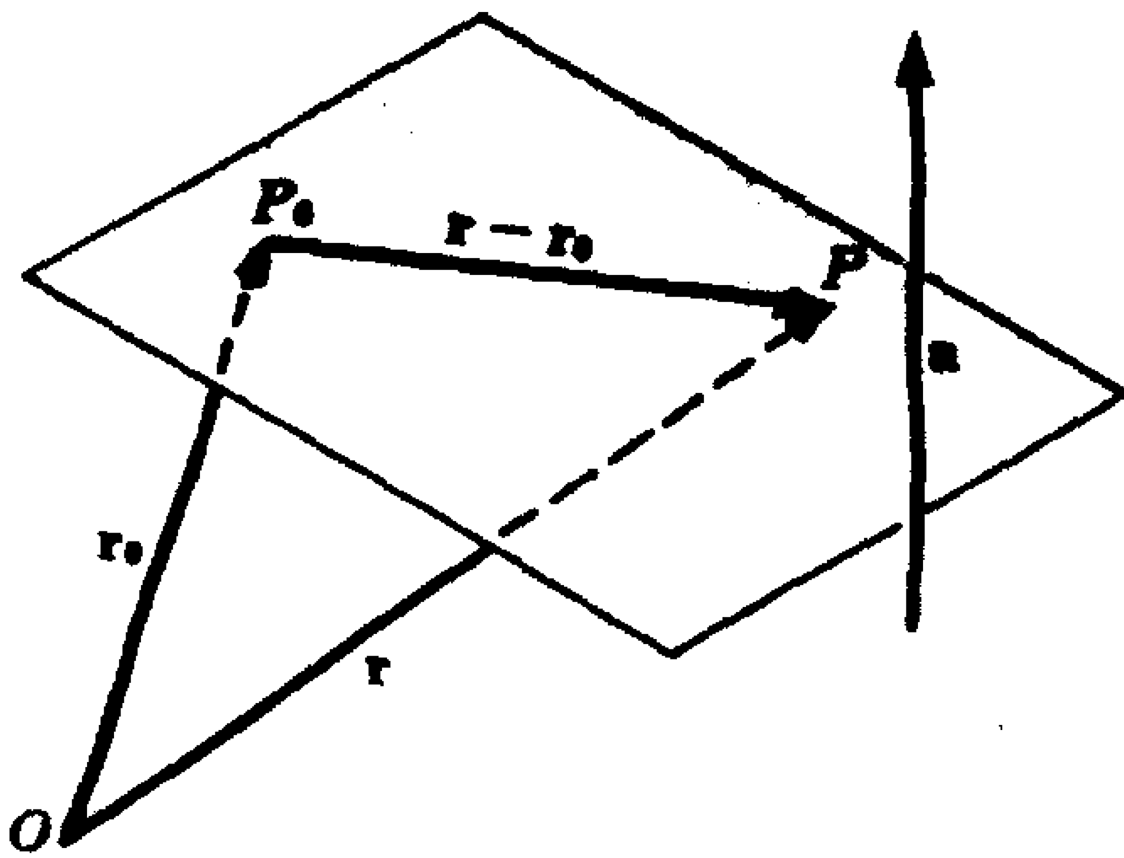


شكل ٦١ — ٧

وهذه هي معادلتا المستقيم في الاحداثيات القائمة . أن $[a_1, a_2, a_3]$ أعداد الإتجاه للمستقيم و $\left[\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right]$ جيوب تمام إتجـاه المستقيم .

إذا انعدم أي من الأعداد a_1, a_2, a_3 فإنه ينبغي أن ينعدم البسط المقابل في (١٨) فإذا كان على سبيل المثال $a_1 = 0$ ، $a_2\, a_3 \neq 0$ فإن معادلتي المستقيم هما :

$$x-x_0 = 0, \quad \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$



شكل ٦١ — ٨

المستوى : نعرف المستوى في الفراغ المار بنقطة مفروضة $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على أنه المحل الهندسي لجميع المستقيمات المارة بالنقطة P_0 والعمودية على المستقيم (الإتجاه) المفروض $\mathbf{a} = A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$. فإذا كانت $P(x, y, z)$ أية نقطة أخرى في المستوى فإن $r - r_0 = \mathbf{P}_0\mathbf{P}$ عمودي على $\mathbf{a}$ كما هو مبين في الشكل ٦١ — ٨ والمعادلة المطلوبة هي :

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{a} = 0 \qquad (١٩)$$

وتأخذ هذه المعادلة فى الإحداثيات القائمة الشكل :

$$\{(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}\}\cdot(A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}) = 0$$

أو $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$

أو $Ax+By+Cz+D = 0$

حيث $D = -(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

وبالعكس إذا كانت $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة على السطح :

$$Ax+By+Cz+D = 0$$

إذن : $Ax_0+By_0+Cz_0+D = 0$

وبالطرح نجد أن $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$

$$= (A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k})\cdot\{(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}\} = 0$$

وهذا يعنى أن المتجه الثابت $A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$ عمودى على السطح عند كل نقطة من نقطة . وعلى هذا فإن السطح مستوى .

مسائل محلولة

١ — أوجد بعد النقطة $P_1(1, 2, 3)$ عن (ا) نقطة الأصل ، (ب) المحور السينى ، (جـ) المحور z (د) المستوى xy (هـ) النقطة $P_2(3, -1, 5)$

(ا) $\mathbf{r} = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k};\ |\mathbf{r}| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

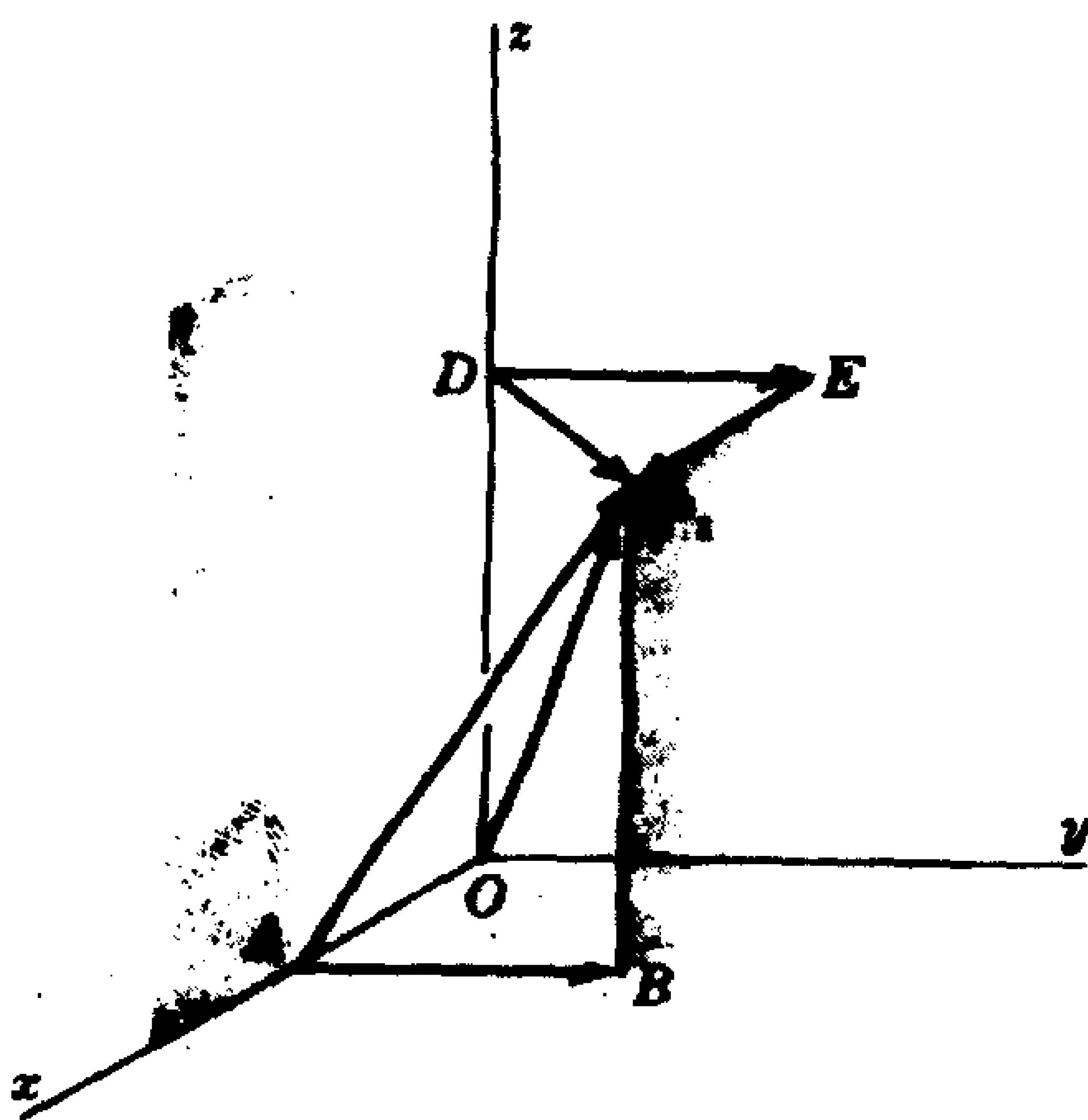
(ب) $\mathbf{AP}_1 = \mathbf{AB}+\mathbf{BP}_1 = 2\mathbf{j}+3\mathbf{k};\ |\mathbf{AP}_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

(جـ) $\mathbf{DP}_1 = \mathbf{DE}+\mathbf{EP}_1 = 2\mathbf{j}+\mathbf{i};\ |\mathbf{DP}_1| = \sqrt{5}$

(د) $\mathbf{BP}_1 = 3\mathbf{k};\ |\mathbf{BP}_1| = 3$

(هـ) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (3-1)\mathbf{i}+(-1-2)\mathbf{j}+(5-3)\mathbf{k} = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$



شكل ٦١ — ٩

٢ — أوجد الزاوية θ المحصورة بين المتجه الذى يصل 0 بـ $P_1(1, 2, 3)$ والمتجه الذى يصل 0 بـ $P_2(2, -3, -1)$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 = 2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

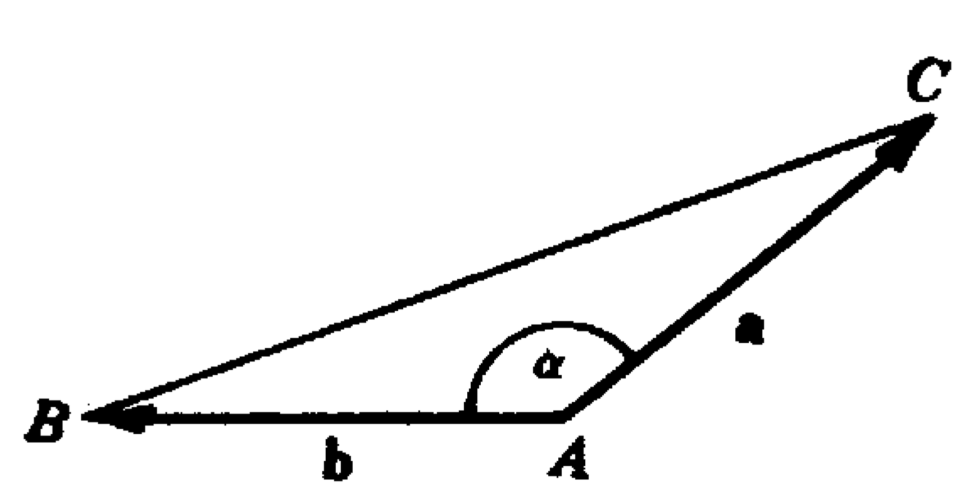
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}_2|} = \frac{1(2)+2(-3)+3(-1)}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}, \quad \theta = 120°$$

٣ – أوجد الزاوية $\alpha = \measuredangle BAC$ فى المثلث ABC الذى رؤوسه هى :

$$A(1, 0, 1),\ B(2, -1, 1),\ C(-2, 1, 0).$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{AC} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{AB} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{-3-1}{\sqrt{22}} = -0.852\ 80, \quad \alpha = 148°31'$$



شكل ٦١ – ١٠

٤ – أوجد جيوب تمام إتجاه المتجه $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

إن جيوب تمام الإتجـــاه هى :

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{13}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{12}{13}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{4}{13}$$

٥ – إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} \quad b_3\mathbf{k}$ $\mathbf{b}$ متجهين منبعثين من نقطة P . برهن أنه إذا كان :

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

فإن $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta$ حيث θ الزاوية الصغرى بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

لدينا $\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}}$ $\cos\theta$ ومنه :

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \left\{\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\right\}^2} = \frac{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

وبالتالى فإن $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\sin\theta$ وهو المطلوب .

٦ – أوجد مساحة متوازى الأضلاع ، الذى ضلعاه غير المتوازيين هما $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$.

يتضح من الشكل ٦١ – ١١ ، وأن $h = |\mathbf{b}|\sin\theta$ وأن المساحة هى $h\,|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta$.

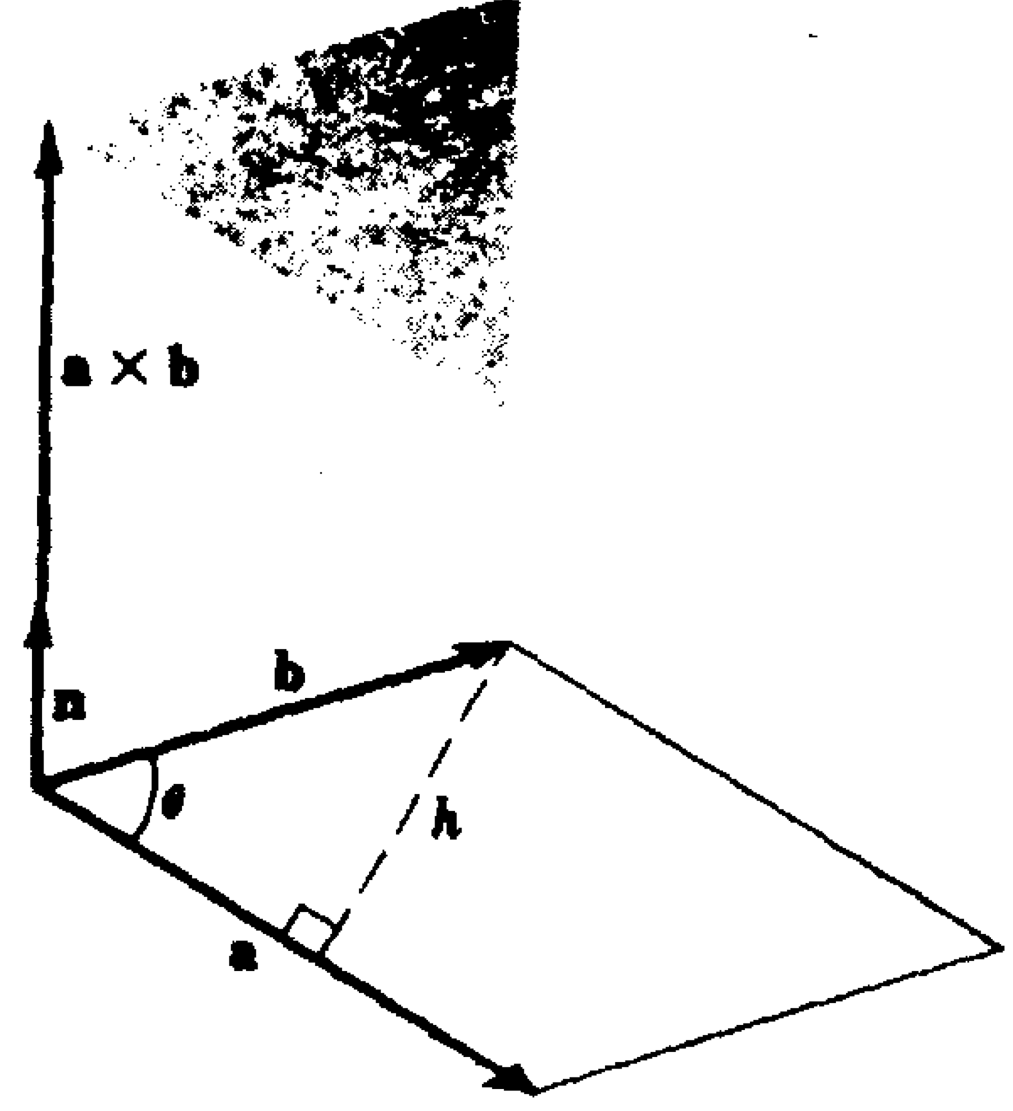
٧ – لنفرض أن $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ هما مركبتا المتجه $\mathbf{a}$ فى الإتجاه الموازى والعمودى للمتجه $\mathbf{b}$ كما هو مبين فى الشكل ٦١ – ١٢ بين أن :

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

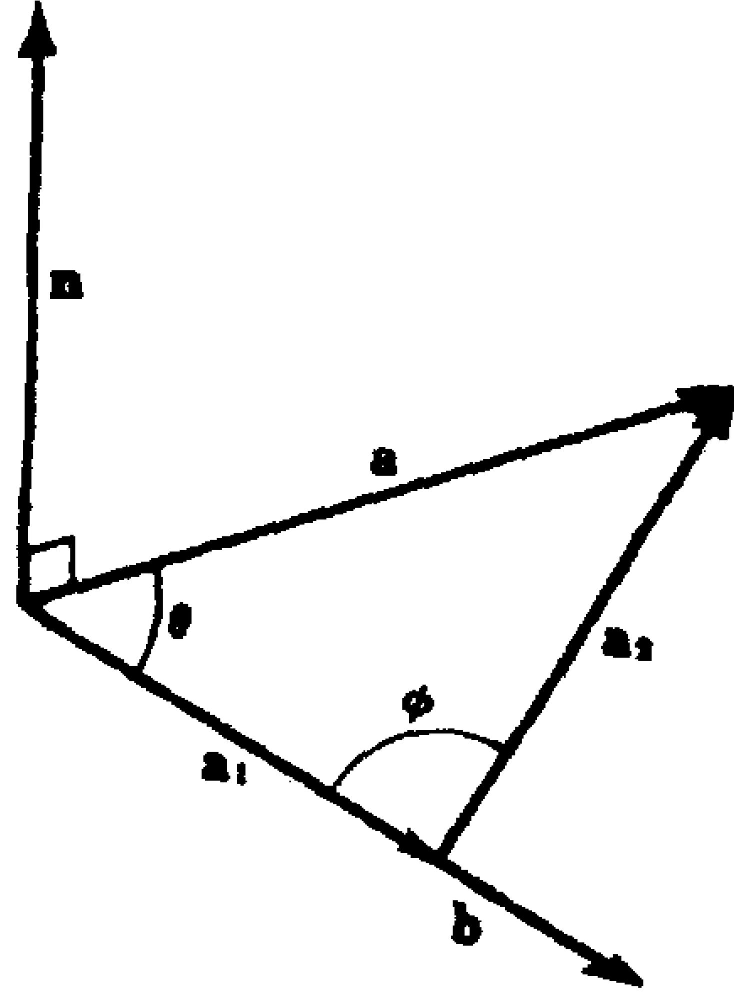
وإذا كانت θ الزاوية بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ فإن $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}|\cos\theta$ و $|\mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}|\sin\theta$. وبما أن $\mathbf{a}, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}$ واقعة فى مستوى واحد فإن :

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}_2|\,|\mathbf{b}|\sin\phi\,\mathbf{n} = |\mathbf{a}|\sin\theta\,|\mathbf{b}|\,\mathbf{n}$$
$$= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta\,\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

وحيث أن $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{b}$ متوازيان فإن $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$



شكل ٦١ — ١١



شكل ٦١ — ١٢

٨ — برهن أن $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

لنفرض فى الشكل ٦١ — ١٣ أن نقطة البداية P للمتجهات $\mathbf{a, b, c}$ واقعة فى مستوى الورقة بينما تقع نهايات المتجهات فوق هذا المستوى . وليكن $\mathbf{a}_1$ ، $\mathbf{b}_1$ هما المركبتين العموديتين على $\mathbf{c}$ ، $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ على الترتيب . عندئذ تقع $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1\times\mathbf{c}, \mathbf{b}_1\times\mathbf{c}$, و $(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)\times\mathbf{c}$ فى مستوى الورقة .

ومن تشابه المثلثين PRS و PMQ نجـد أن :

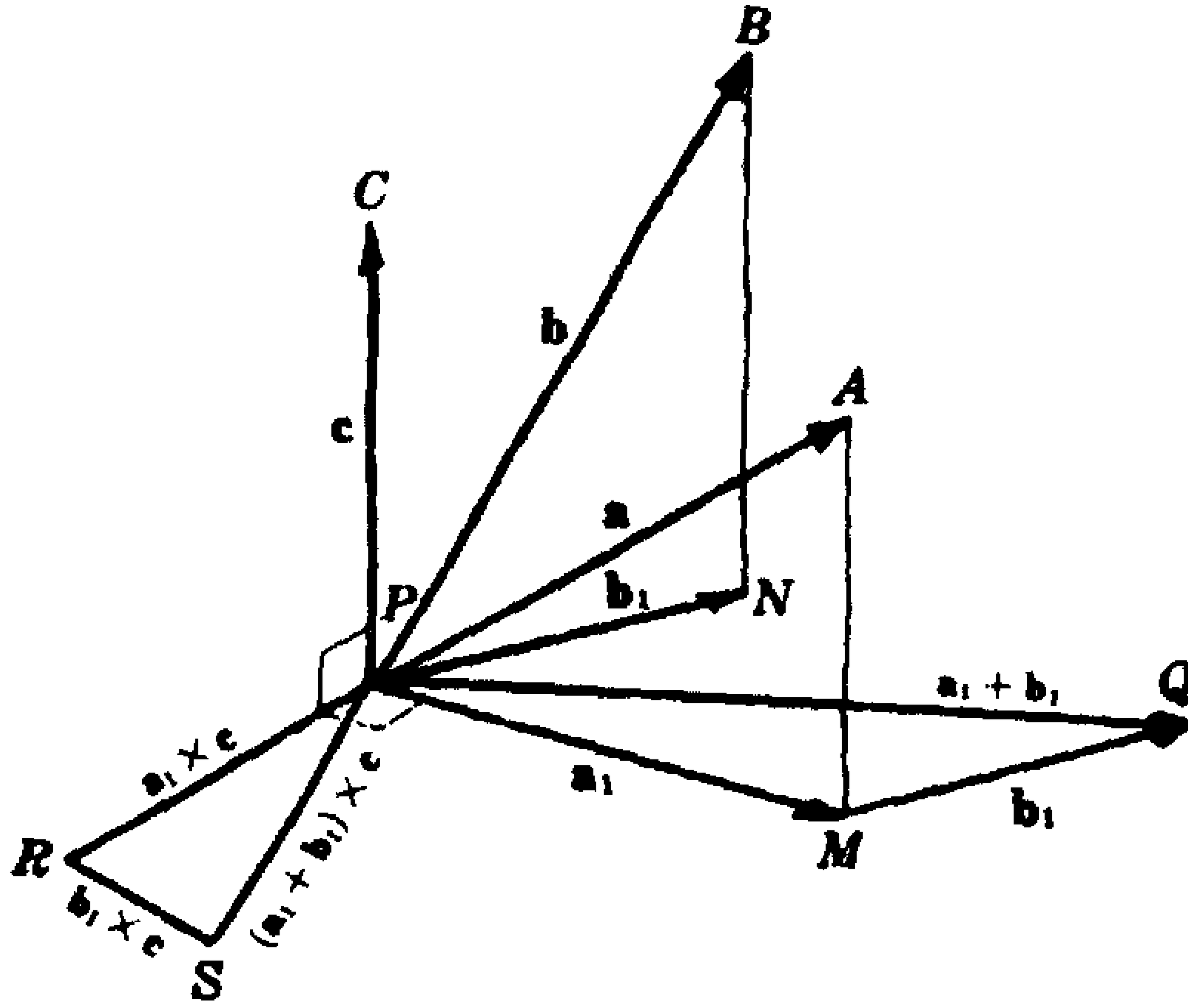
$$\frac{RS}{PR} = \frac{|\mathbf{b}_1\times\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{b}_1|\,|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{c}|} = \frac{|\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{a}_1|} = \frac{MQ}{PM}$$

وبما أن PR عمودى على PM و RS عمودى على MQ فإن PS عمودى على PQ ومنه $\mathbf{PS} = \mathbf{PQ}\times\mathbf{c}$. وبما أن :

$$\mathbf{PS} = \mathbf{PQ}\times\mathbf{c} = \mathbf{PR}+\mathbf{RS},$$

فإنه لدينا

$$(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)\times\mathbf{c} = \mathbf{a}_1\times\mathbf{c}+\mathbf{b}_1\times\mathbf{c}$$



شكل ٦١ — ١٣

وحيث أنه ، استناداً إلى المسألة ٧ ، يمكن تبديل $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{b}_1$ بـ $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{b}$ على الترتيب فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة :

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

٩ — إذا كان $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, بين أن :

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

استناداً إلى قانون التوزيع لدينا :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\ &= a_1\mathbf{i}\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j}\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k}\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\ &= (a_1b_2\mathbf{k}-a_1b_3\mathbf{j}) + (-a_2b_1\mathbf{k}+a_2b_3\mathbf{i}) + (a_3b_1\mathbf{j}-a_3b_2\mathbf{i})\\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

١٠ – اشتق قانون الجيوب فى علم المثلثات المستوية .

اعتبر المثلث ABC الذى لأضلاعه $\mathbf{a, b, c}$ الأطوال a, b, c على الترتيب ، والذى زواياه الداخلية هى α, β, γ ، فنجـد :

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$$

إذن : $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c} = 0$ أو $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$

و $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}\times\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} = 0$ أو $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}$$

وهكذا : $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\gamma = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\sin\alpha = |\mathbf{c}|\,|\mathbf{a}|\sin\beta$

$$ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = ca\sin\beta$$

ومنـه $\dfrac{\sin\gamma}{c} = \dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$

١١ – إذا كان $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, و $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}+c_2\mathbf{j}+c_3\mathbf{k}$, فبين أن :

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\\ &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot[(b_2c_3-b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1-b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2-b_2c_1)\mathbf{k}]\\ &= a_1(b_2c_3-b_3c_2) + a_2(b_3c_1-b_1c_3) + a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\ &= \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\end{aligned}$$

١٢ – بين أن : $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = 0.$

استناداً إلى المعادلة (١٢) لدينا $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} = 0.$

١٣ – إذا كانت $\mathbf{a, b, c}$ هى متجهات المسألة ١١ فبين أن : $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times [(b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3) + \mathbf{j}(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1) + \mathbf{k}(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2)$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ + \ \mathbf{j}b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \\ + \ \mathbf{k}b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) \end{array}\right. - \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ + \ \mathbf{j}c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ + \ \mathbf{k}c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{array}\right.$$

$$= (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

$$= \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

وهو المطلوب .

١٤ – إذا كان l_1 و l_2 مستقيمين غير متقاطعين فى الفراغ فإن أصغر بعد d بينهما هو بعد أية نقطة على l_1 عن المستوى المار بـ l_2 والموازى لـ l_1 ، أى أنه إذا كانت P_1 نقطة على l_1 و P_2 نقطة على l_2 ، فإن البعد d يساوى ، بغض النظر عن الإشارة ، المسقط العمودى لـ P_1P_2 على العمود المشترك لـ l_1 و l_2 .

ليكن l_1 ماراً بـ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ وفى الإتجاه $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, وليكن l_2 ماراً بـ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ وفى الإتجــاه $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

عندئذ يكون $\mathbf{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عمودياً على كل من l_1 و l_2 وهكذا يكون

$$d = \left|\frac{\mathbf{P_1P_2} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}\right| = \left|\frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}\right|$$

١٥ – اكتب معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة $P_0(1, 2, 3)$ ويوازى $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. أى النقط $A(3, 1, -1)$, $B(1/2, 9/4, 4)$, $C(2, 0, 1)$ تقع على هذا المستقيم .

إن المعادلة الإتجاهية للمستقيم ، استناداً على المعادلة (١٧) هى :

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

أو

$$(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \quad (\text{i})$$

والمعادلتان فى الإحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4} \quad (\text{ii})$$

وباستخدام (ii) يتضح بسهولة أن A و B تقعان على المستقيم فى حين لاتقع C . أما إذا أردنا أن نستخدم المعادلة الإتجاهية (i) فإن النقط $P(x, y, z)$ التى تقع على المستقيم يمكن إيجادها بإعطاء قيمة عددية لـ k ، ثم نقارن المركبات والنقطة A تقع على المستقيم لأن :

$$(3-1)\mathbf{i} + (1-2)\mathbf{j} + (-1-3)\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

عندما $k = 1$. وبشكل مماثل تقع B على المستقيم لأن :

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}\mathbf{j} + \mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

عندما $k = -1/4$. أما النقطة C فليست على المستقيم لأن :

$$\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

غير محققة لأية قيمة لـ k .

١٦ – اكتب معادلة المستوى .

(أ) الذى يمر بالنقط $P_0(1, 2, 3)$ ويوازى المستوى $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

(ب) الذى يمر بالنقطتين $P_0(1, 2, 3)$ و $P_1(3, -2, 1)$ ويتعامد مع المستوى $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

(جـ) الذى يمر بالنقط $P_0(1, 2, 3), P_1(3, -2, 1), P_2(5, 0, -4)$.

لتكن $P(x, y, z)$ نقطة عامة فى المستوى المطلوب .

(أ) إن المتجه $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ عمودى على المستوى المفروض وعلى المستوى المطلوب . ولذا فإن المعادلة الإتجاهية للمستوى الأخير هى :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0$$

والمعادلة فى الاحداثيات المتعامدة :

$$3(x-1) - 2(y-2) + 4(z-3) = 0$$

أو $3x - 2y + 4z - 11 = 0$

(ب) إن المتجه $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ والمتجه $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ موازيان المستوى المطلوب . ولذلك فإن $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}$ عمودى على هذا المستوى . وإن المعادلة الإتجاهية للمستوى المطلوب هى :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}] = 0$$

والمعادلة فى الاحداثيات المتعامدة :

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [(x-1)\mathbf{i} + (y-2)\mathbf{j} + (z-3)\mathbf{k}] \cdot [-20\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 8\mathbf{k}]$$

$$= -20(x-1) - 14(y-2) + 8(z-3) = 0$$

$$20x + 14y - 8z - 24 = 0$$

(جـ) إن المتجهين $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ موازيان المستوى المطلوب وبالتالى فإن $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ عمودى عليه . والمعادلة الإتجاهية هى : $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)] = 0$

والمعادلة فى الاحداثيات المتعامدة :

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 2 & -4 & -2\\ 4 & -2 & -7\end{vmatrix} = [(x-1)\mathbf{i}+(y-2)\mathbf{j}+(z-3)\mathbf{k}]\cdot[24\mathbf{i}+6\mathbf{j}+12\mathbf{k}]$$

$$= 24(x-1)+6(y-2)+12(z-3) = 0$$

أو $4x+y+2z-12 = 0$

١٧ – أوجد أقصر بعد بين النقطة $P_0(1,2,3)$ والمستوى $\Pi:\ 3x-2y+5z-10=0.$:

إن المتجه $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+5\mathbf{k}.$ عمودى على المستوى . لتكن $P_1(2,3,2)$ نقطة فى المستوى عندئذ يكون d ، بغض النظر عن الإشارة ، هو المسقط العددى لـ P_0P_1 على $\mathbf{a}$ وبالتالى :

$$d = \left|\frac{(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \left|\frac{(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+5\mathbf{k})}{\sqrt{38}}\right| = \frac{2}{19}\sqrt{38}$$

مسـائل اضـافية

١٨ – أوجد طول كل من المتجهات :

(أ) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}.$

(ب) $\mathbf{b} = 3\mathbf{i}-5\mathbf{j}+9\mathbf{k}.$

(ج) $\mathbf{c}$ المتجه الذى يصل $P_1(3,4,5)$ بـ $P_2(1,-2,3)$ ج : (أ) $2\sqrt{14}$ ، (ب) $\sqrt{115}$ ، (ج) $\sqrt{11}$

١٩ – ليكن لدينا متجهات المسألة ١٨

(أ) بين أن $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متعامدين .

(ب) أوجد الزاوية الصغرى بين $\mathbf{a}$ و $\mathbf{c}$ ، وكذلك بين $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$

(ج) أوجد الزوايا التى يصنعها $\mathbf{b}$ مع المحاور الإحداثية .

ج : (ب) $10\ 85',\ 14\ 165$ (ج) $56\ 32',\ 47\ 117',\ 45\ 73$

٢٠ – برهن أن $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1;\ \mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0.$

٢١ – أكتب متجه وحدة فى اتجاه $\mathbf{a}$ ومتجه وحدة فى اتجاه $\mathbf{b}$ حيث $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ متجها المسألة ١٨ .

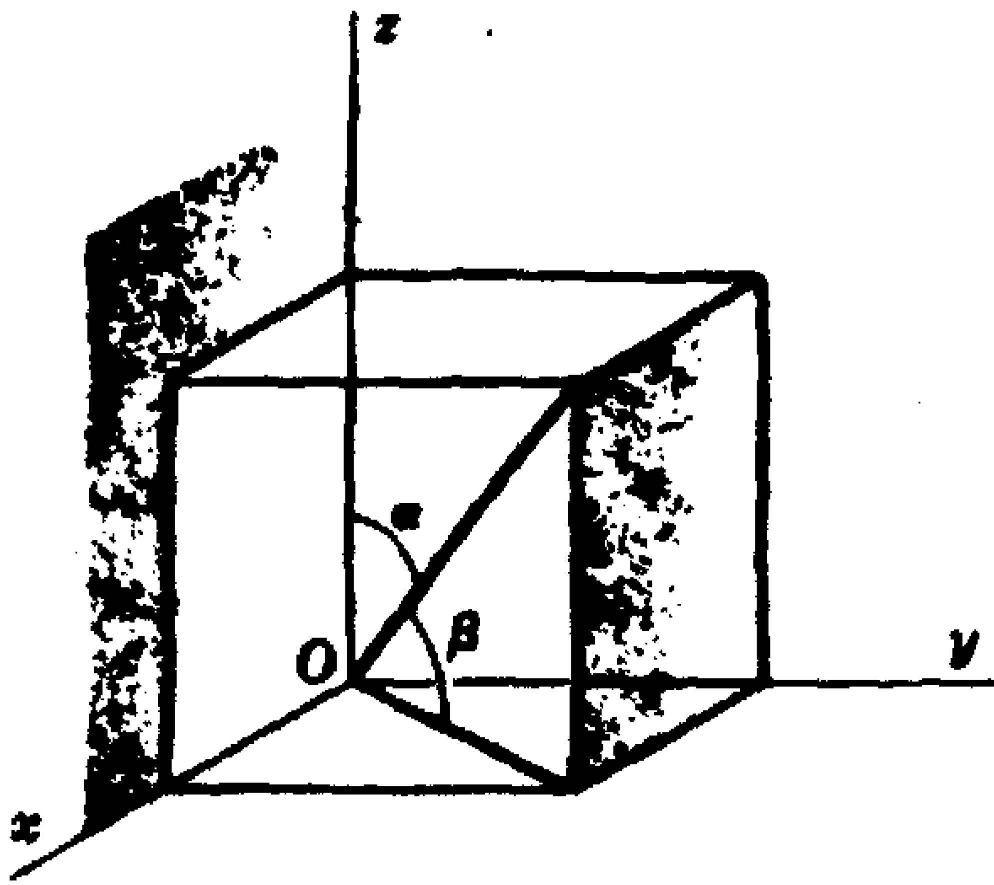
٢٢ – أوجد الزاويتين الداخليتين β و γ لمثلث المسألة ٣

ج : $\beta = 22°12',\ \gamma = 9°16'$

٢٣ – ليكن لدينا فى الشكل المرفق مكعب الوحدة أوجد :

(ب) الزاوية بين قطره وقطر أحد أوجهه

ج : (أ) $54°\ 44'$ (ب) $35°\ 16'$



شكل ٦١ — ١٤

٢٤ – بين أن المسقط العددى لـ $\mathbf{b}$ على $\mathbf{a}$ هو $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$

٢٥ – بين أن المتجه $\mathbf{c}$ فى المعادلة (٣) عمودى على كل من $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$

٢٦ – إذا كان $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{j},\ \mathbf{b} = \mathbf{i}-2\mathbf{k},\ \mathbf{c} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k},$ فأوجد :

(أ) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$
(ب) $\mathbf{b}\times\mathbf{c} = 6\mathbf{i}-8\mathbf{j}+3\mathbf{k}$
(جـ) $\mathbf{c}\times\mathbf{a} = -4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$
(د) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = 4\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$
(هـ) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0$
(و) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -2$
(ز) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 3\mathbf{i}-3\mathbf{j}-14\mathbf{k}$
(ح) $\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = -11\mathbf{i}-6\mathbf{j}+10\mathbf{k}$

٢٧ – أوجـد مساحة المثلث الذى رؤوسه هى : $A(1,2,3),\ B(1,1,2),\ C(2,1,1).$

إرشاد : إن $|\mathbf{AB}\times\mathbf{AC}|$ يساوى ضعفى المساحة . ج : $5\sqrt{3}$

٢٨ – أوجد حجم متوازى السطوح الذى أضلاعه OA, OB, OC حيث $A(1,2,3),\ B(2,-1,1),\ C(-2,1,-1).$

ج : 2

٢٩ – إذا كان $\mathbf{u} = \mathbf{a}\times\mathbf{b},\ \mathbf{v} = \mathbf{b}\times\mathbf{c},\ \mathbf{w} = \mathbf{c}\times\mathbf{a},$ فبين أن :

(أ) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{w}\cdot\mathbf{b}$
(ب) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{w} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{w} = 0$
(جـ) $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\}^2$

٣٠ – برهن أن $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\{(\mathbf{b}+\mathbf{c})\times(\mathbf{c}+\mathbf{a})\} = 2\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$

٣١ – أوجد أصغر زاوية تقاطع المستويين $5x-14y+2z-8=0$ و $10x-11y+2z+15=0.$

إرشاد : أوجـد الزاوية بين العمودين ج : $22^\circ\ 25'$

٣٢ – اكتب المعادلة الاتجاهية لخط تقاطع المستويين $x+y-z-5 = 0$ و $4x-y-z+2 = 0.$

ج : $(x-1)\mathbf{i}+(y-5)\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k} = k(-2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-5\mathbf{k}),$ حيث $P_0(1,5,1)$ نقطة على المستقيم .

٣٣ – أوجد أصغر بعد بين المستقيم المار بـ $A(2,-1,-1)$ و $B(6,-8,0)$ والمستقيم المار بـ $C(2,1,2)$ و $D(0,2,-1)$ ج : $\sqrt{6}/6$

٣٤ – عرف مستقيما مارا بـ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ على أنه المحل الهندسى لجميع النقط $P(x,y,z)$ بحيث يكون $\mathbf{P_0P}$ و $\mathbf{OP_0}$ متعامدين . بين أن المعادلة الاتجاهية :

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{r}_0 = 0.$$

٣٥ – أوجد معادلة المستقيم المار بـ $P_0(2,-3,5)$ و :

(أ) العمودى على $7x-4y+2z-8 = 0.$
(ب) الموازى للمستقيم $x-y+2z+4 = 0,\ 2x+3y+6z-12 = 0.$
(جـ) المار بـ $P_1(3,6,-2)$

ج : (١) $\frac{x-2}{7}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-5}{2}$، (ب) $\frac{x-2}{12}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-5}{-5}$، (جـ) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{9}=\frac{z-5}{-7}$

٣٦ – أوجد معادلة المستوى :

(١) المار بـ $P_0(1,2,3)$ والموازى لـ $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ولـ $\mathbf{b}=3\mathbf{i}+6\mathbf{j}-2\mathbf{k}$.

(ب) المار بـ $P_0(2,-3,2)$ والمستقيم $6x+4y+3z+5=0,\ 2x+y+z-2=0$.

(جـ) المار بـ $P_0(2,-1,-1)$ و $P_1(1,2,3)$ والعمودى على $2x+3y-5z-6=0$.

ج : (١) $4x+y+9z-33=0$ (ب) $16x+7y+8z-27=0$ (جـ) $9x-y+3z-16=0$

٣٧ – إذا كانت $\mathbf{r}_0=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k},\ \mathbf{r}_1\ \ 2\mathbf{i}\ \ 3\mathbf{j}\ \ 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{r}_2=3\mathbf{i}+5\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ ثلاثة متجهات فبين أن $\mathbf{r}_0+\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_0=0.$ وما الذى يمكن قوله بالنسبة لنهايات هذه المتجهات .

ج : واقعة على مستقيم واحد .

٣٨ – إذا كانت P_0, P_1, P_2 ثلاث نقط ليست واقعة على استقامة واحدة و $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ متجهات الموضع لها ، فما هو وضع $\mathbf{r}_0\times\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_0$ بالنسبة للمستوى $P_0P_1P_2$ ؟

ج : عمودى .

٣٩ – برهن (١) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$

(ب) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$

٤٠ – برهن أن (١) الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتلاقى فى نقطة واحدة (ب) الأعمدة الساقطة من رؤوس مثلث إلى الأضلاع المقابلة (أو امتداداتها إن لزم الأمر) تتلاقى فى نقطة واحدة .

٤١ – لتكن $A(1,2,3), B(2,-1,5), C(4,1,3)$ ثلاث رؤوس المتوازى الأضلاع $ABCD$. أوجد (١) احداثيات D (ب) مساحة $ABCD$ (جـ) مساحة المساقط العمودية لـ $ABCD$ على كل من المستويات الاحداثية .

ج : (١) $D(3,4,1)$ ، (ب) $2\sqrt{26}$ (جـ) $8, 6, 2$

٤٢ – برهن أن مساحة متوازى الأضلاع فى الفراغ تساوى الجذر التربيعى لمجموع مربعات مساحات مساقطه على المستويات الاحداثية .

الفصل الثانى والستون

تفاضل وتكامل المتجهات

التفــاضل : لتكن

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}f_1(t) + \mathbf{j}f_2(t) + \mathbf{k}f_3(t) = \mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2 + \mathbf{k}f_3 \\ \mathbf{s} &= \mathbf{i}g_1(t) + \mathbf{j}g_2(t) + \mathbf{k}g_3(t) = \mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2 + \mathbf{k}g_3 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{i}h_1(t) + \mathbf{j}h_2(t) + \mathbf{k}h_3(t) = \mathbf{i}h_1 + \mathbf{j}h_2 + \mathbf{k}h_3 \end{aligned}$$

متجهات ، مركباتها دوال لمتغير عددى t ذات مشتقات متصلة من الرتبة الأولى والرتبة الثانية .

يمكننا ، كما فعلنا فى الفصل ١٨ ، أن نبرهن أن :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot s + \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{١}$$

ويمكن للقارئ الذى اعتاد اشتقاق المحددات التى عناصرها دوال لمتغير واحد ، أن يجد بسهولة :-

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{s}) &= \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{s} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{s}}{dt} \end{aligned} \tag{٢}$$

و

$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{u})\} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\cdot\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{u}\right) + \mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{s}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \tag{٣}$$

ويمكن ، بالإضافة لذلك ، أن نحصل على هذه الصيغ بفك حاصل الضرب قبل الاشتقاق .

وينتج من (٢) أن :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\mathbf{r}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u})\} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\times\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{u}\right) + \mathbf{r}\times\left(\mathbf{s}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{٤}$$

المنحنيات الفراغية : اعتبر المنحنى الفراغى

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{٥}$$

حيث يكون للدوال $f(t), g(t), h(t)$ مشتقات أولى وثانية متصلة . ولنفترض أن متجه الموضع لنقطة متغيرة عامة $P(x, y, z)$ من المنحنى معطى بـ :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

وكما فى الفصل ١٨ فإن المتجه $\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ هو متجه الوحدة فى اتجاه المماس للمنحنى . وإذا كان $\mathbf{R}$ هو متجه الموضع لنقطة (X, Y, Z) من المستقيم المماس عند P ، فإن المعادلة الإتجاهية للمستقيم (أنظر الفصل ٦١) هى :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t} \quad (\text{متغير عددى } k) \quad (٦)$$

وفى الاحداثيات المتعامدة تكون معادلتا المستقيم هما :

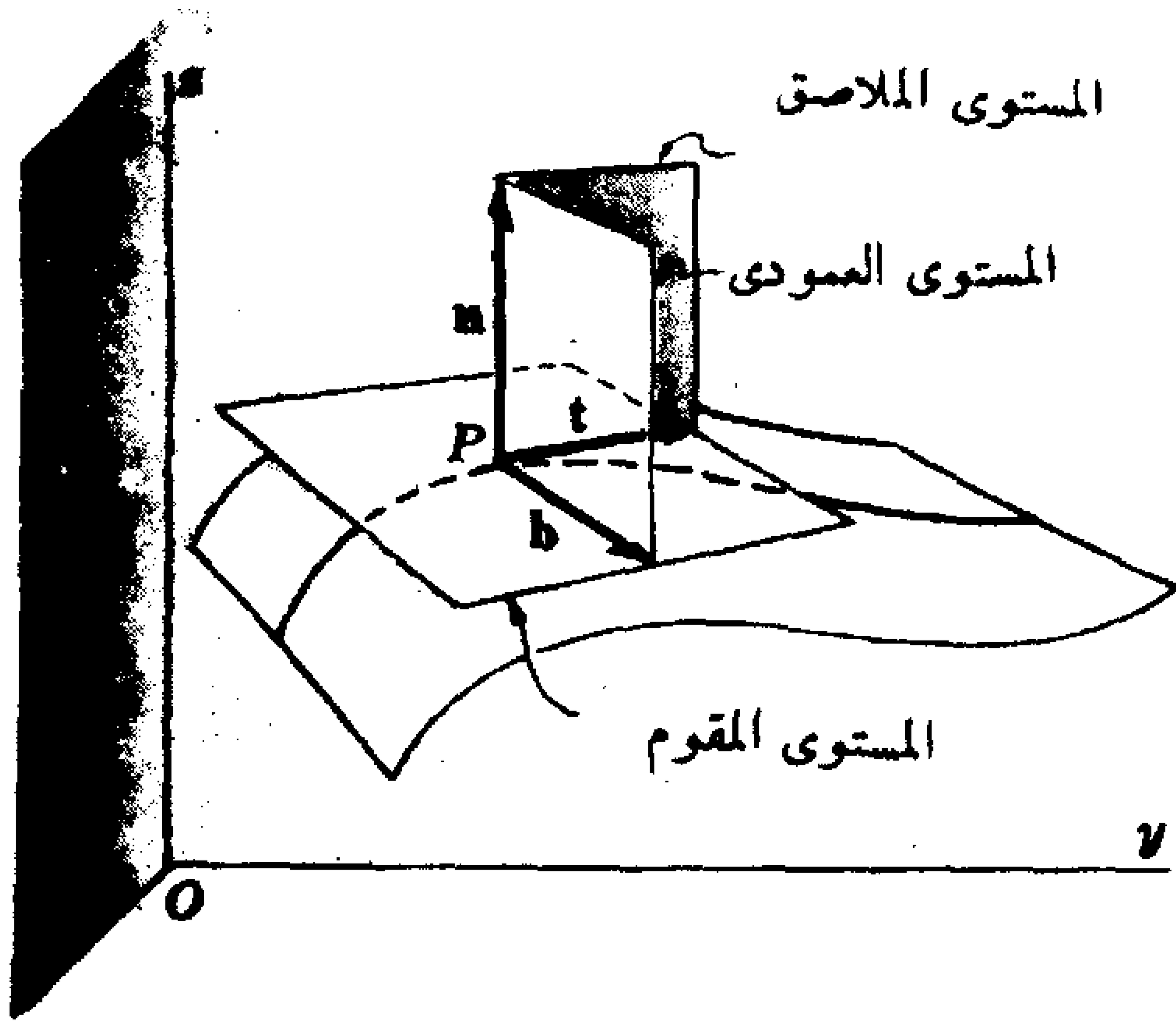
$$\frac{X-x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{ds}}$$

حيث $\left[\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right]$ هى مجموعة جيوب تمام اتجاه المستقيم . هذا ولقد استخدمنا فى المعادلات المناظرة (٢) فى الفصل ٥٩ مجموعة أعداد الاتجاه $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$.

أما المعادلة الاتجاهية للمستوى العمودى على المنحنى عند النقطة P فهى :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0 \quad (٧)$$

حيث $\mathbf{R}$ متجهة الموضع لنقطة عامة من المستوى .



شكل ٦٢ — ١

نلاحظ مرة أخرى ، كما فى الفصل ١٨ أن المتجه $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ عمودى على $\mathbf{t}$. وإذا كان $\mathbf{n}$ متجهة الوحدة المتفق مع $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ فى الاتجاه يكون

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\mathbf{n}$$

حيث $|\mathbf{K}|$ القيمة المطلقة للتقوس عند P . ومتجه الوحدة .

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} \quad (٨)$$

يسمى العمودى الأساسى على المنحنى عند P .

متجه الوحدة $\mathbf{b}$ عند النقطة P المعرف بالعلاقة .

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (٩)$$

يسمى ثنائى العمود عند P . إن المتجهات الثلاثة $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ عند النقطة P تشكل ثلاثية يمينية من متجهات متعامدة تبادليا ، ولذا فهى تزودنا بمجموعة احداثية موضعية تفيد فى دراسة إضافية للمنحنى الفراغى بجوار إحدى نقاطه .

أنظر المسألتين ١ — ٢

تحدد المتجهات $\mathbf{t,n,b}$ عند نقطة عامة P من منحنى فراغى ثلاثة مستويات متعامدة ، تبادليا :

(i) المستوى الملاصق وهو المستوى الذى يحوى **t** و **n** معادلته هى :

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{b} = 0$$

(ii) المستوى العمودى وهو المستوى الذى يحوى **n** و **b** ومعادلته هى :

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{t} = 0$$

(iii) المستوى المقوم وهو المستوى الذى يحوى **t** و **b** ومعادلته هى :

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})\cdot\mathbf{n} = 0$$

حيث **R** فى كل من هذه المعادلات هى متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى المفروض .

السطوح : إن أقدم معادلة للسطح هى $F(x, y, z) = 0$ (أنظر الفصل ٥٩) . ونحصل على تمثيل بارامترى للسطح بكتابة x, y, z على شكل دوال لمتغيرين مستقلين u و v فمثلا :

$$x = f_1(u,v), \quad y = f_2(u,v), \quad z = f_3(u,v) \tag{١٠}$$

وإذا عوضنا عن u بـ u_0 (ثابت) فى (١٠) فإننا نحصل على :

$$x = f_1(u_0,v), \quad y = f_2(u_0,v), \quad z = f_3(u_0,v) \tag{١١}$$

وهى معادلة منحنى فراغى (منحنى u) على السطح . أما إذا عوضنا عن v بـ v_0 (ثابت) فى (١٠) فإننا نحصل على

$$x = f_1(u,v_0), \quad y = f_2(u,v_0), \quad z = f_3(u,v_0) \tag{١٢}$$

وهذه معادلة منحنى فراغى آخر (منحنى v) على السطح . ويتقاطع المنحنيان فى نقطة على السطح نحصل عليها من (١٠) بوضع $u = u_0$، $v = v_0$ فى آن واحد .

يعطى متجه الموضع عامة P على السطح بـ

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}\,f_1(u,v) + \mathbf{j}\,f_2(u,v) + \mathbf{k}\,f_3(u,v) \tag{١٣}$$

فإذا فرضنا أن (١١) و (١٢) تمثل منحنيى u و v المارين بالنقطة P فعندئذ يكون :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial v}f_1(u_0,v) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial v}f_2(u_0,v) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial v}f_3(u_0,v)$$

وهو المتجه المماس للمنحنى u عند النقطة P . ويكون :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial u}f_1(u,v_0) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial u}f_2(u,v_0) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial u}f_3(u,v_0)$$

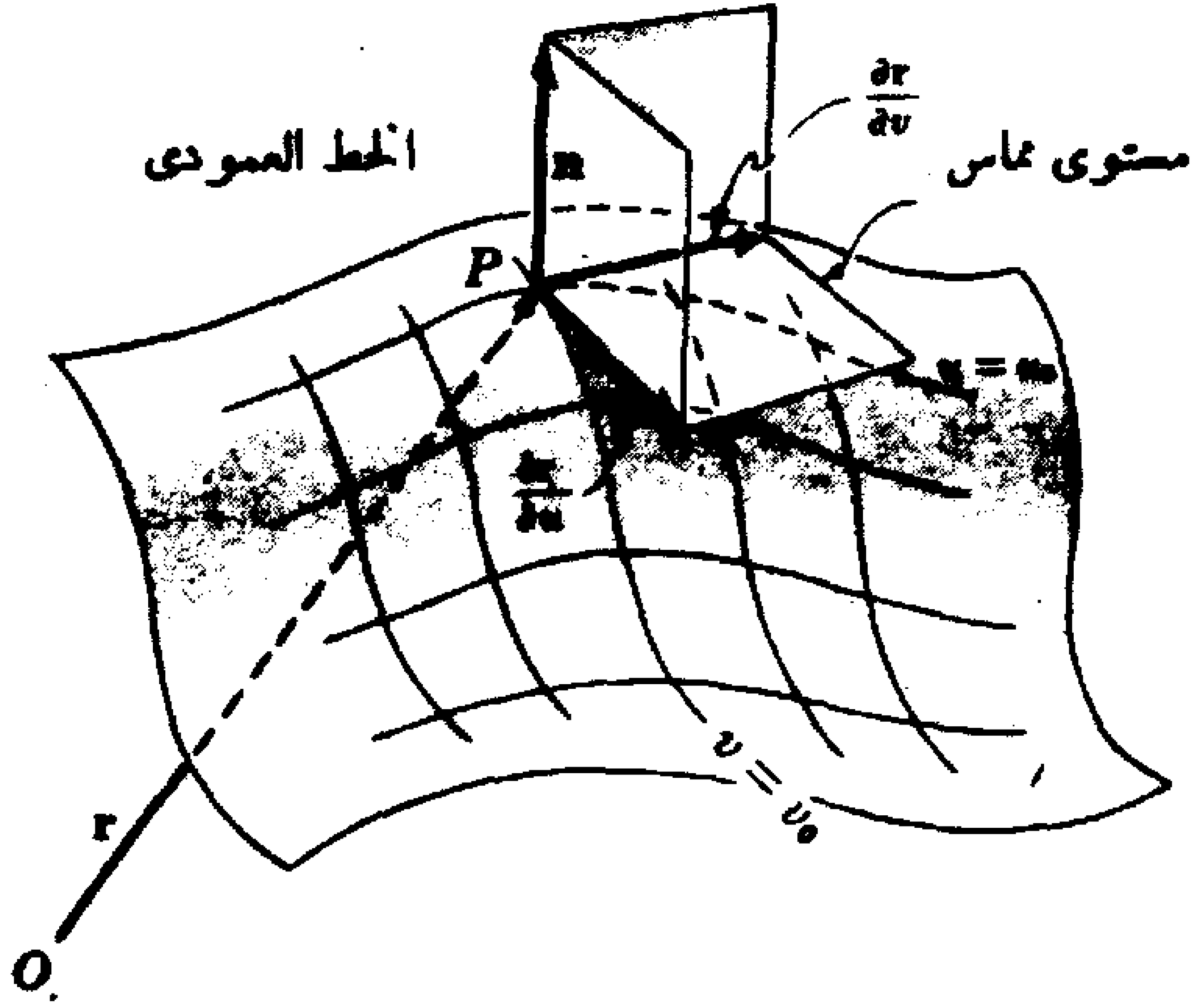
وهو المتجه المماس للمنحنى v عند النقطة ذاتها . ويحدد المماسان مستويا مماسا للسطح عند P .

ومن الواضح أن العمودى على هذا المستوى يعطى بـ :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{١٤}$$

يعرف متجه الوحدة العمودى للسطح عند P بـ :

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \qquad (١٥)$$



شكل ٦١ — ٢

إذا كان $\mathbf{R}$ هو متجه الموضع لنقطة عامة على العمودى على السطح عند P فإن المعادلة المتجهة هى :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = k\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \qquad (١٦)$$

إذا كان $\mathbf{R}$ متجه الموضع لنقطة عامة من المستوى المماس للسطح عند P فإن المعادلة المتجهة هى :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 0 \qquad (١٧)$$

أنظر المسألة ٣

المؤثر ∇ : لقد رأينا فى الفصل ٦٠ أن مشتقة $z = f(x, y)$ عند نقطة اختيارية (x, y) وفى اتجاه يصنع زاوية θ مع المحور السينى الموجب هى :

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

لنكتب هذه المشتقة بالشكل :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot (\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta) \qquad (١٨)$$

إن المتجه $\mathbf{a} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$ هو متجه وحدة فى الاتجاه الذى يصنع زاوية θ مع محور x الموجب وإذا كتبنا العامل الآخر بالشكل :

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

فإننا نتوصل إلى تعريف مؤثر تفاضل متجه ∇ (تقرأ دل) بالشكل :

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \qquad (١٩)$$

ويسمى $\nabla f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}$ فى التحليل المتجه ، تدرج f ويكتب $\text{grad} f$ وهكذا تشير (١٨) إلى أن مركبة ∇f فى اتجاه متجه الوحدة $\mathbf{a}$ هو المشتقة المتجهة لـ f فى اتجاه $\mathbf{a}$.

ليكن الآن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ هو متجه الموضع للنقطة $P(x, y)$ فبما أن

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{dx}{ds} + \mathbf{j}\frac{dy}{ds}\right)$$
$$= \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

و

$$\left|\frac{df}{ds}\right| = |\nabla f| \cos\phi$$

حيث ϕ الزاوية بين المتجهين ∇f و $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ فإننا نرى أن $\frac{df}{ds}$ يكون نهاية عظمى عندما $\cos\phi = 1$ أى عندما يكون لـ ∇f و $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ نفس الاتجاه . وهكذا نجد أن القيمة العظمى للمشتقة المتجهة عند نقطة P هى $|\nabla f|$ وأن اتجاهها هو اتجاه ∇f .

أنظر المسألة ٤

وللدالة $w = F(x, y, z)$ نعرف

$$\nabla F = \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}$$

والمشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z)$ عند نقطة اختيارية $P(x, y, z)$ فى الاتجاه $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ هى

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F \cdot \mathbf{a} \tag{٢٠}$$

وكما فى حالة دالة لمتغيرين اثنين فإن $|\nabla F|$ هو القيمة العظمى للمشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z)$ عند $P(x, y, z)$ واتجاهها هو اتجاه ∇F .

أنظر المسألة ٥

اعتبر الآن السطح $F(x, y, z) = 0$. إن معادلة المستوى المماس لهذا السطح عند إحدى نقاطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ هى :

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$= [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}]\cdot\left[\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0 \tag{٢١}$$

على أن نحسب المشتقات الجزئية عند P_0 . يلاحظ أن العامل الأول هو متجه اختيارى مار بـ P_0 وواقع فى المستوى المماس ، بينما العامل الثانى ∇F المحسوب عند P_0 عمودى على المستوى المماس أى عمودى على السطح عند P_0 .

أنظر المسألتين ٦ — ٧

التفرق والدوران : يعرف تفرق متجه $\mathbf{F} = \mathbf{i}f_1(x,y,z) + \mathbf{j}f_2(x,y,z) + \mathbf{k}f_3(x,y,z)$, بـ :

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}f_1 + \frac{\partial}{\partial y}f_2 + \frac{\partial}{\partial z}f_3 \tag{٢٢}$$

ويعرف دوران متجه $\mathbf{F}$ بـ :

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \qquad (٢٣)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}f_3 - \frac{\partial}{\partial z}f_2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}f_1 - \frac{\partial}{\partial x}f_3\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}f_2 - \frac{\partial}{\partial y}f_1\right)\mathbf{k}$$

أنظر المسألة ٨

التكامل : سنقصر دراسة التكامل هنا على التكامل العادى للمتجهات وعلى ما يسمى بالتكاملات الخطية ونورد كمثال على التكامل الأول ما يلى . لنفرض

$$\mathbf{F}(u) = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u + au\mathbf{k}$$

متجها يتعلق بالمتغير العددى u . عندئذ يكون .

$$\mathbf{F}'(u) = -\mathbf{i}\sin u + \mathbf{j}\cos u + a\mathbf{k}$$

و

$$\begin{aligned}\int \mathbf{F}'(u)\,du &= \int (-\mathbf{i}\sin u + \mathbf{j}\cos u + a\mathbf{k})\,du \\ &= \mathbf{i}\int -\sin u\,du + \mathbf{j}\int \cos u\,du + \mathbf{k}\int a\,du \\ &= \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u + au\mathbf{k} + \mathbf{c} \\ &= \mathbf{F}(u) + \mathbf{c}\end{aligned}$$

حيث $\mathbf{c}$ متجه ثابت اختيارى مستقل عن u بالإضافة إلى ذلك نجـد :

$$\int_{u=a}^{u=b} \mathbf{F}'(u)\,du = \Big[\mathbf{F}(u) + \mathbf{c}\Big]_{u=a}^{u=b} = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

أنظر المسألتين ٩ – ١٠

التكاملات الخطية : لتكن P_0 و P_1 نقطتين فى الفراغ يصل بينهما قوس C . يمكن لهذا القوس أن يكون قطعة مستقيمة أو قطعة من منحنى فراغى $x = g_1(t),\ y = g_2(t),\ z = g_3(t)$ أو يمكن أن يتكون من عدة أقواس منحنيات ومهما كان الأمر فإننا نفرض فى C أن يكون متصلا عند كل نقطة من نقاطه وأن لايتقاطع مع نفسه . ليكن لدينا بالإضافة لذلك الدالة الاتجاهية :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}f_1(x,y,z) + \mathbf{j}f_2(x,y,z) + \mathbf{k}f_3(x,y,z)$$

التى تعرف لنا فى كل نقطة من منطقة حول C ، وبشكل خاص فى كل نقطة من C ، متجهه ذو طول واتجاه معلومين لنرمز بـ

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (٢٤)$$

المتجه الموضع للنقطة $P(x, y, z)$ من C يسمى التكامل :

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)ds = \int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad (٢٥)$$

تكاملا خطيا ، أى أنه تكامل على طول المسار المفروض C .

كثال على ذلك لتكن $\mathbf{F}$ قوة . الشغل الذى تبذله $\mathbf{F}$ فى تحريك جسم إزاحة $d\mathbf{r}$ يعطى بـ (أنظر المسألة ٩ من الفصل ١٨) .

$$|\mathbf{F}|\,|d\mathbf{r}|\cos\theta \;=\; \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

والشغل المبذول لتحريك الجسم من موضع P_0 إلى الموضع P_1 على القوس C هو

$$\int_{C\;P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

ومن المعادلة (٢٤) نجـد أن

$$d\mathbf{r} \;=\; \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$$

وعلى هذا تأخذ (٢٥) الشكل :

$$\int_{C\;P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \;=\; \int_{C\;P_0}^{P_1} (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz) \qquad (٢٦)$$

أنظر المسألة ١١

مسـائل محلولة

١ – يتحرك جسيم على المنحنى $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 6t$. أوجد مقدار متجه السرعة ومقدار متجه العجلة عند اللحظتين $t = 0$ و $t = \frac{1}{2}\pi$

لتكن $P(x, y, z)$ نقطة من المنحنى وليكن

$$\mathbf{r} \;=\; x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \;=\; 4\mathbf{i}\cos t + 4\mathbf{j}\sin t + 6\mathbf{k}\,t$$

متجه الموضع لهذه النقطة فيكون عندئذ

$$\mathbf{v} \;=\; \frac{d\mathbf{r}}{dt} \;=\; -4\mathbf{i}\sin t + 4\mathbf{j}\cos t + 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \;=\; \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \;=\; -4\mathbf{i}\cos t - 4\mathbf{j}\sin t$$

وعند $t = 0$ يكون

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k};\quad |\mathbf{v}| = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$$
$$\mathbf{a} = -4\mathbf{i};\quad |\mathbf{a}| = 4$$

وعند $t = \frac{1}{2}\pi$ يكون

$$\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{k};\quad |\mathbf{v}| = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$$
$$\mathbf{a} = -4\mathbf{i};\quad |\mathbf{a}| = 4$$

٢ – لدينا المنحنى الفراغى $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$, أوجد عند النقطة $t = 1$ أو عند النقطة (١ و ١ و ١) .

(ا) معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودى .

(ب) متجهات الوحدة للمماس العمودى الأساسى وثنائى العمود .

(جـ) معادلات العمودى الأساسى والثنائى العمودى .

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

إن

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

وعند $t = 1$ يكون $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$. و $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

(ا) ليكن $\mathbf{R}$ متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) من المستقيم المماس . فتكون المعادلة الاتجاهية لهذا المستقيم هى :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t}$$

أو

$$(X - 1)\mathbf{i} + (Y - 1)\mathbf{j} + (Z - 1)\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

وعلى هذا تكون معادلة المستقيم فى الاحداثيات المتعامدة :

$$\frac{X - 1}{1} = \frac{Y - 1}{2} = \frac{Z - 1}{3}$$

وإذا كان $\mathbf{R}$ متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) فى المستوى العمودى فإن معادلته الاتجاهية هى :

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

أو

$$[(X - 1)\mathbf{i} + (Y - 1)\mathbf{j} + (Z - 1)\mathbf{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 0$$

وتكون معادلته فى الاحداثيات المتعامدة هى :

$$(X - 1) + 2(Y - 1) + 3(Z - 1) = X + 2Y + 3Z - 6 = 0$$

(أنظر المسألة ٢ (ا) من الفصل ٥٩)

(ب) إن

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{(-4t - 18t^3)\mathbf{i} + (2 - 18t^4)\mathbf{j} + (6t + 12t^3)\mathbf{k}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2}$$

فعند $t = 1$ يكون : $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{98}$; $\left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}} = |K|$. ومنه

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

و

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{266}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

(ج) إذا كان $\mathbf{R}$ متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) على العمودى الأساسى ، فإن معادلته الاتجاهية هى :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{n}$$

أو

$$(X - 1)\mathbf{i} + (Y - 1)\mathbf{j} + (Z - 1)\mathbf{k} = k\frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

وتكون معادلتاه فى الاحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{X-1}{-11} = \frac{Y-1}{-8} = \frac{Z-1}{9}$$

وإذا كان **R** متجه الموضع لنقطة عامة (X, Y, Z) من ثنائى العمود ، فإن معادلته الاتجاهية هى :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k \cdot \mathbf{b}$$

أو
$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = k\frac{3\mathbf{i}-3\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{19}}$$

وتكون معادلتاه فى الاحداثيات المتعامدة هما :

$$\frac{X-1}{3} = \frac{Y-1}{-3} = \frac{Z-1}{1}$$

٣ – أوجد معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودى للسطح $x = 2(u+v),\ y = 3(u-v),\ z = uv$ عند النقطة $P\,(u = 2, v = 1)$.

إن

$$\mathbf{r} = 2(u+v)\mathbf{i} + 3(u-v)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

وعند P يكون :

$$\mathbf{r} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k},\ \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k},\ \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

ومنه
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$$

وعلى هذا تكون المعادلة الاتجاهية والمعادلتان فى الاحداثيات المتعامدة للمستقيم العمودى هى :

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

أو
$$(X-6)\mathbf{i} + (Y-3)\mathbf{j} + (Z-2)\mathbf{k} = k(9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k})$$

و
$$\frac{X-6}{9} + \frac{Y-3}{-2} = \frac{Z-2}{-12}$$

وتكون معادلتا المستوى المماس الاتجاهية فى الاحداثيات المتعامدة هما :

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 0$$

أو
$$[(X-6)\mathbf{i} + (Y-3)\mathbf{j} + (Z-2)\mathbf{k}] \cdot [9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k}] = 0$$

و
$$9X - 2Y - 12Z - 24 = 0$$

٤ – (١) أوجد المشتقة المتجهة لـ $f(x, y) = x^2 - 6y^2$ عند النقطة $(7, 2)$ فى الاتجاه $\theta = \frac{1}{4}\pi$

(ب) أوجد القيمة العظمى لهذه المشتقة عند $(7, 2)$

(١) إن
$$\nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 - 6y^2) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 6y^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 6y^2)$$
$$= 2x\mathbf{i} - 12y\mathbf{j}$$

و
$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

وعند $(7, 2)$ يكون: $\nabla f = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$

ويكون : $\nabla f \cdot \mathbf{a} = (14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = -5\sqrt{2}$

هو المشتقة فى الاتجاه المفروض :

(ب) عنـد $(7, 2)$ يكون $\nabla f = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$ ويكون $|\nabla f| = \sqrt{14^2 + 24^2} = 2\sqrt{193}$ هى القيمة العظمى للمشتقة المتجهة وبما أن :

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{7}{\sqrt{193}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{193}}\mathbf{j} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$$

فإن الاتجاه هو $\theta = 300^\circ\ 15'$ (أنظر المسألتين ٢ و ٦ من الفصل ٦٠)

٥ — (ا) أوجد المشتقة المتجهة لـ $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ عنـد $P(1, 1, -1)$ وفى الاتجـاه $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(ب) أوجد القيمة العظمى لهذه المشتقة عند P .

إن $\nabla F = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 - 2y^2 + 4z^2) = 2x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$

وعند $(1, 1, -1)$ يكون $\nabla F = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$

(ا) $\nabla F \cdot \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = 8$

(ب) عند P يكون $|\nabla F| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$ والاتجاه هو $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$

٦ — لدينا السطح $F(x, y, z) = x^2 + 3xyz + 2y^2 - z^2 - 5 = 0$ والنقطة $P_0(1, 1, 1)$ واقعة عليه . أوجـد :

(ا) متجه الوحدة العمودى على السطح عند P_0 .

(ب) معادلتا المستقيم العمودى عند P_0 .

(جـ) معادلة المستوى المماس عند P_0 .

إن $\nabla F = (3x^2 + 3yz)\mathbf{i} + (3xz + 6y^2)\mathbf{j} + (3xy - 3z^2)\mathbf{k}$

وعند $P_0(1, 1, -1)$ يكون $\nabla F = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j}.$

(ا) إن $\frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ هو متجه الوحدة العمودى عند P_0 ومتجه الوحدة الآخر هو. $-\frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$

(ب) إن معادلتى المستقيم العمودى هما. $\frac{X-1}{2} = \frac{Y-1}{3},\ Z = 1.$

(جـ) معادلة المستوى المماس هى : $2(X-1) + 3(Y-1) = 2X + 3Y - 5 = 0.$

٧ — أوجد زاوية تقاطع السطحين :

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad \text{و} \quad F_2 = x^2 + 2y^2 - z - 9 = 0$$

عند النقطة $(2, 1, -2)$

نجد أن
$$\nabla F_1 = \nabla(x^2+y^2+z^2-9) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla F_2 = \nabla(x^2+2y^2-z-8) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

وعند $(2,1,-2)$ يكون $\nabla F_1 = 4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$ و $\nabla F_2 = 4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

ولكن $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = |\nabla F_1||\nabla F_2|\cos\theta$، حيث θ هي الزاوية المطلوبة . وعلى هذا

$$(4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k})\cdot(4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}) = |4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}|\,|4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}|\cos\theta$$

ومنه ينتج أن $\cos\theta = \frac{14}{99}\sqrt{33} = 0.81236$، وأن $\theta = 35^\circ\ 40'$.

٨ – إذا كان $\mathbf{B} = xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}$، فأوجد (أ) $\operatorname{div}\mathbf{B}$ (ب) $\operatorname{curl}\mathbf{B}$.

(أ)
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \nabla\cdot\mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-3yz^2)$$
$$= y^2 + 2x^2z - 6yz$$

(ب)
$$\operatorname{curl}\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2x^2yz & -3yz^2 \end{vmatrix}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-3yz^2)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right]\mathbf{k}$$
$$= -(3z^2 + 2x^2y)\mathbf{i} + (4xyz - 2xy)\mathbf{k}$$

٩ – إذا كان $\mathbf{F}(u) = u\mathbf{i} + (u^2-2u)\mathbf{j} + (3u^2+u^3)\mathbf{k}$، فأوجد (أ) $\int \mathbf{F}(u)\,du$ (ب) $\int_0^1 \mathbf{F}(u)\,du$.

(أ)
$$\int \mathbf{F}(u)\,du = \int [u\mathbf{i} + (u^2-2u)\mathbf{j} + (3u^2+u^3)\mathbf{k}]\,du$$
$$= \mathbf{i}\int u\,du + \mathbf{j}\int (u^2-2u)\,du + \mathbf{k}\int (3u^2+u^3)\,du$$
$$= \frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}$$

حيث $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ و c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية .

(ب)
$$\int_0^1 \mathbf{F}(u)\,du = \left[\frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{4}\mathbf{k}$$

١٠ – تعطى عجلة جسيم عند لحظة $t \geq 0$ بـ $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. فإذا كانت الإزاحة عند $t = 0$ هي $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ والسرعة هي $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ فأوجد $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ عند أية لحظة t .

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\,dt = \mathbf{i}\int e^t\,dt + \mathbf{j}\int e^{2t}\,dt + \mathbf{k}\int dt$$
$$= e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

وعند $t = 0$ يكون $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{c}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ومنه $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{j}$ إذن :

$$\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(e^{2t} + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,dt = e^t\mathbf{i} + (\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t)\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

وعند $t = 0$ يكون $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} + \mathbf{c}_2 = 0$ ومنه $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$. وعلى هذا فإن

$$\mathbf{r} = (e^t - 1)\mathbf{i} + (\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4})\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

١١ — أو جد الشغل الذى تبذله القوة $\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (y + xz)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$ فى تحريك جسيم من نقطة الأصل إلى $C(1, 1, 1)$.

(ا) على الخط المستقيم OC

(ب) على المنحنى $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(ج) على الخطوط المستقيمة من O إلى $A\ (1, 0, 0)$ ومن A إلى $B\ (1, 1, 0)$ ومن B إلى C.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= [(x + yz)\mathbf{i} + (y + xz)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}]\cdot[\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz] \\ &= (x + yz)\,dx + (y + xz)\,dy + (z + xy)\,dz\end{aligned}$$

(ا) على المستقيم OC يكون $x = y = z$ ومنه $dx = dy = dz$.
ويأخذ التكامل المطلوب حسابه الشكل :

$$W = \int_{C\,(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 3\int_0^1 (x + x^2)\,dx = \left[\left(\frac{3}{2}x^2 + x^3\right)\right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

(ب) وعلى طول المنحنى المفروض $x = t,\ dx = dt;\ y = t^2,\ dy = 2t\,dt;\ z = t^3,\ dz = 3t^2\,dt$. وعند O يكون $t = 0$ وعند C يكون $t = 1$ إذن :

$$\begin{aligned}W &= \int_0^1 (t + t^5)\,dt + (t^2 + t^4)2t\,dt + (t^3 + t^3)3t^2\,dt \\ &= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{2}t^6\right]_0^1 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

(ج) من O إلى A يكون $y = z = 0,\ dy = dz = 0$ وتتغير x من 0 إلى 1.

ومن A إلى B يكون $x = 1,\ z = 0,\ dx = dz = 0$ وتتغير y من 0 إلى 1.

ومن B إلى C يكون $x = y = 1,\ dx = dy = 0$ وتتغير z من 0 إلى 1.

وعلى هذا يكون للمسافة من 0 إلى A: $W_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ ويكون للمسافة من A إلى B: $W_2 = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$

ويكون للمسافة من B إلى C: $W_3 = \int_0^1 (z + 1)dz = \frac{3}{2}$. وهكذا $W = W_1 + W_2 + W_3 = 5/2$.

وبوجه عام تعتمد قيمة التكامل الخطى على مسار التكامل . والمثال المذكور هو تكامل لاتتعلق قيمته على المسار . ويمكن البرهان على أن التكامل الخطى $\int_C (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz)$ لايعتمد على المسار طالما وجدت دالة $\phi\,(x, y, z)$ بحيث يكون :

$$d\phi = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

لاحظ أن تكامل هذه المسألة هو :

$$(x+yz)\,dx + (y+xz)\,dy + (z+xy)\,dz = d\{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + xyz\}$$

مسائل اضافية

١٢ – أوجد $\frac{d\mathbf{s}}{dt}$ و $\frac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$ إذا كان :

(ا) $\mathbf{s} = (t+1)\mathbf{i} + (t^2+t+1)\mathbf{j} + (t^3+t^2+t+1)\mathbf{k}$

(ب) $\mathbf{s} = \mathbf{i}e^t\cos 2t + \mathbf{j}e^t\sin 2t + t^2\mathbf{k}$

ج : (ا) $\mathbf{i} + (2t+1)\mathbf{j} + (3t^2+2t+1)\mathbf{k};\ 2\mathbf{j} + (6t+2)\mathbf{k}$

(ب) $e^t(\cos 2t - 2\sin 2t)\mathbf{i} + e^t(\sin 2t + 2\cos 2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
$e^t(-4\sin 2t - 3\cos 2t)\mathbf{i} + e^t(-3\sin 2t + 4\cos 2t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

١٣ – لدينا $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u^3\mathbf{k},\ \mathbf{b} = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u,\ \mathbf{c} = 3u^2\mathbf{i} - 4u\mathbf{k}.$ احسب أولا $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\ \mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}),\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ثم أوجد مشتقة كل منهما . أوجد أخيراً المشتقات باستخدام الصيغ .

١٤ ـ يتحرك جسيم على المنحنى $x = 3t^2,\ y = t^2 - 2t,\ z = t^3$, حيث t هو الزمن . أوجد (ا) مقدار متجه السرعة ومقدار متجه العجلة عند $t = 1$. (ب) مركبتي السرعة والعجلة في الاتجاه $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ عند اللحظة $t = 1$

ج : (ا) $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{5},\ |\mathbf{a}| = 2\sqrt{19};$ (ب) $6,\ 22/3$

١٥ – أوجد باستخدام طرق المتجهات معادلات المستقيم المماس والمستوى العمودي لمنحنى المسألة ١١ من الفصل ٥٩ .

١٦ – حل المسألة ١٢ من الفصل ٥٩ باستخدام طرق المتجهات .

١٧ – بين أن السطحين $x = u,\ y = 5u - 3v^2,\ z = v$ ؛ $x = u,\ y = v,\ z = \frac{uv}{4u - v}$ متعامدان عند $P(1, 2, 1)$

١٨ – أوجد باستخدام طرق المتجهات معادلات المستوى المماس والمستقيم العمودي للسطح .

(ا) $x = u,\ y = v,\ z = uv$ عند النقطة $(u, v) = (3, -4)$.

(ب) $x = u,\ y = v,\ z = u^2 - v^2$ عند النقطة $(u, v) = (2, 1)$.

ج : (ا) $4X - 3Y + Z - 12 = 0,\ \frac{X-3}{-4} = \frac{Y+4}{3} = \frac{Z+12}{-1}$

(ب) $4X - 2Y - Z - 3 = 0,\ \frac{X-2}{-4} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-3}{1}$

١٩ – (ا) أوجد معادلة المستوى الملاصق والمستوى المقوم لمنحنى المسألة ٢ عند النقطة المذكورة .

(ب) أوجد معادلات المستويات الملاصقة والعمودية المقومة لـ $x = 2t - t^2,\ y = t^2,\ z = 2t + t^2$ عند $t = 1$.

ج : (ا) $3X - 3Y + Z - 1 = 0,\ 11X + 8Y - 9Z - 10 = 0$

(ب) $X + 2Y - Z = 0,\ Y + 2Z - 7 = 0,\ 5X - 2Y + Z - 6 = 0$

٢٠ – برهن أنه يمكن أيضاً إعطاء معادلة المستوى الملاصق لمنحنى فراغى عند نقطة P منه بـ

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0$$

٢١ – حل المسألتين ١٦ و ١٧ من الفصل ٦٠ باستخدام طرق المتجهات .

٢٢ – أوجد $\int_a^b \mathbf{F}(u)\, du,$ بفرض أن :

(ا) $\mathbf{F}(u) = u^2\mathbf{i} + (3u^2 - 2u)\mathbf{j} + 3\mathbf{k};\quad a = 0,\ b = 2$

(ب) $\mathbf{F}(u) = e^u\mathbf{i} + e^{-2u}\mathbf{j} + u\mathbf{k};\quad a = 0,\ b = 1$

ج : (ا) $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k},$ (ب) $(e - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

٢٣ – تعطى عجلة جسيم عند لحظة ما t بـ $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 - 2)\mathbf{k}$ فإذا كانت الإزاحة عند اللحظة $t = 0$ هى $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ وكانت السرعة هى $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ أوجد $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ عند اللحظة t

ج : $\mathbf{r} = (\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t)\mathbf{i} + \frac{1}{12}t^4\mathbf{j} + (\frac{1}{12}t^4 - t^2 - t)\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}t^2 + t + 1)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + (\frac{1}{3}t^3 - 2t - 1)\mathbf{k}$.

٢٤ – أوجد فى كل مما يلى الشغل الذى تبذله القوة المفروضة عندما تحرك جسيما من $O(0, 0, 0)$ إلى $C(1, 1, 1)$ على طول (i) الخط المستقيم $x = y = z$ (ii) المنحنى $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,$ (iii) الخط المستقيم من O إلى $A(1, 0, 0)$ ومن A إلى $B(1, 1, 0)$ ومن B إلى C .

(ا) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

(ب) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

(جـ) $\mathbf{F} = (x + xyz)\mathbf{i} + (y + x^2z)\mathbf{j} + (z + x^2y)\mathbf{k}$

ج : (ا) 3 (ب) 3 (جـ) 9/4, 33/14, 5/2

٢٥ – إذا كان $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$ فبين أن (ا) $\text{div}\ \mathbf{r} = 3$ (ب) $\text{curl}\ \mathbf{r} = \mathbf{0}$

٢٦ – إذا كان للدالة $f = f(x, y, z)$ مشتقات جزئية من المرتبة الثانية على الأقل فبين أن :

(ا) $\nabla \times \nabla f = 0,$ (ب) $\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0,$ (جـ) $\nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f.$

الفصل الثالث والستون

التكاملات الثنائية والمكررة

التكامل (البسيط) $\int_a^b f(x)\,dx$ لدالة $y = f(x)$ متصلة فى الفترة المحددة $a \le x \le b$ من المحور x قد سبق تعريفه فى الفصل ٣٣ . لنتذكر

(ا) نقسم الفترة $a \le x \le b$ إلى n من الفترات الجزئية $h_1, h_2, \ldots, h_n$ أطوالها على الترتيب $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$ حيث λ_n طول أطول $\Delta_n x$.

(ب) نختار النقطة x_1 فى h_1 و x_2 فى $h_2, \ldots, x_n$ فى h_n ونشكل المجموع : $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$

(ج) نتابع تقسيم الفترات بحيث $\lambda_n \to 0$ عندما $n \to \infty$

(د) إن :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x.$$

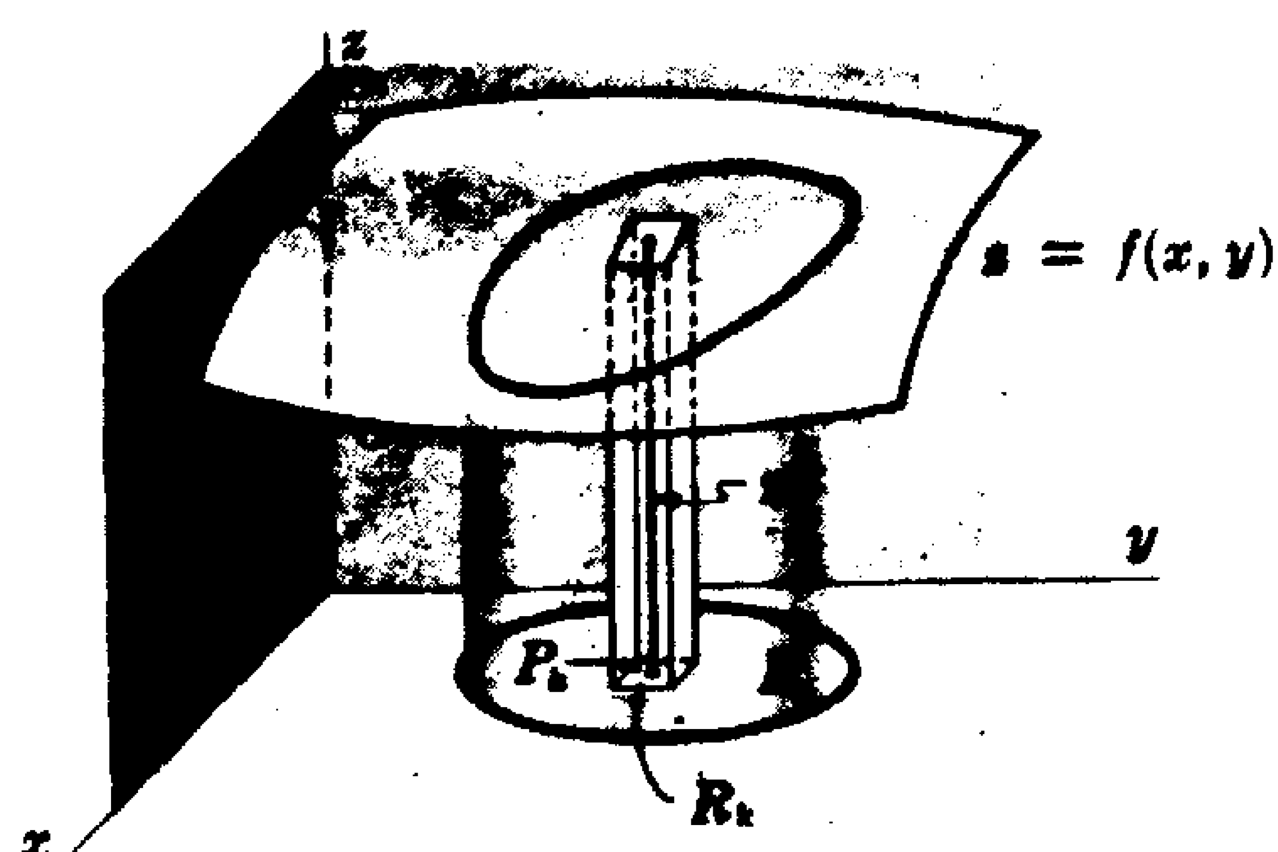
التكامل الثنائى • ليكن لدينا الدالة $z = f(x, y)$ المتصلة فى منطقة محددة R من المستوى xOy . لنقسم هذه المنطقة (أنظر الشكل ٦٣ – ١) إلى n منطقة جزئية $R_1, R_2, \ldots, R_n$ مساحاتها $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \ldots, \Delta_n A$ على الترتيب لنختر بعد ذلك فى كل منطقة جزئية R_k نقطة $P_k\,(x_k, y_k)$ ونشكل المجموع .

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A = f(x_1, y_1)\,\Delta_1 A + f(x_2, y_2)\,\Delta_2 A + \cdots + f(x_n, y_n)\,\Delta_n A \qquad (١)$$

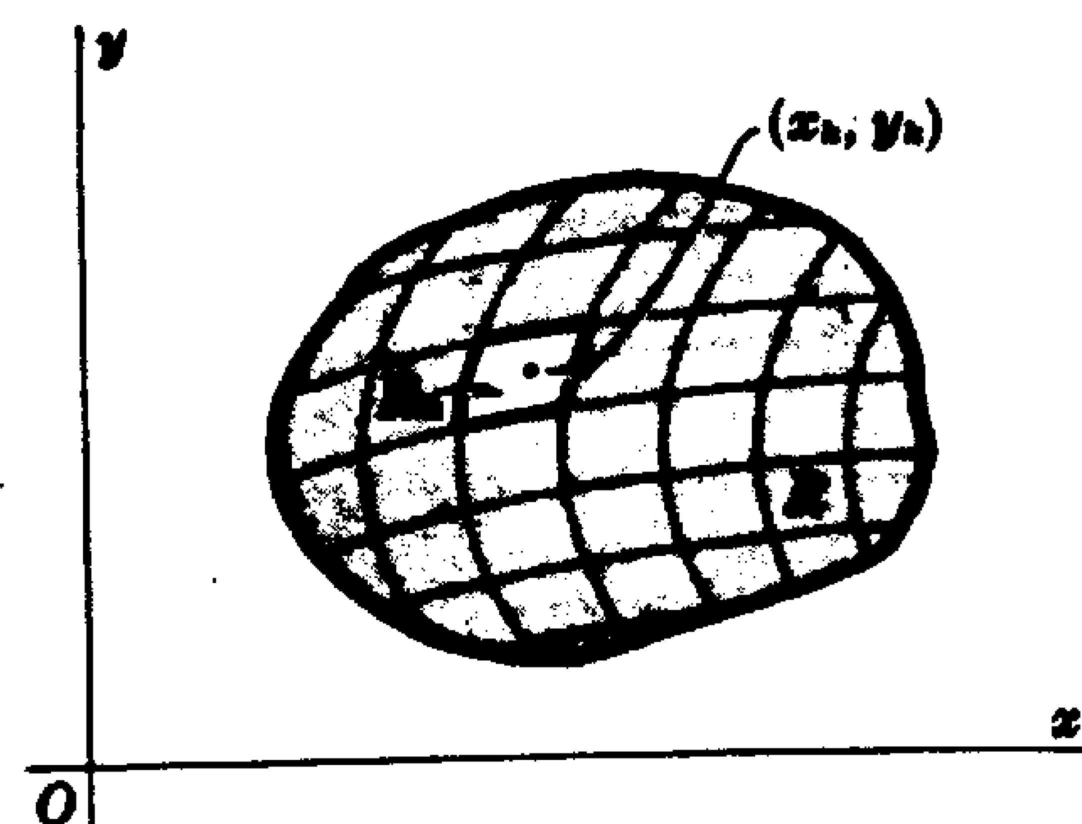
لنعرف الآن قطر منطقة جزئية على أنه أكبر بعد بين أية نقطتين واقعتين داخل المنطقة أو على حدودها ، ولنرمز بـ λ_n لأكبر أقطار المناطق الجزئية .

لنفرض أن عدد المناطق الجزئية يزداد بحيث $\lambda_n \to 0$ عندما $n \to \infty$ عندئذ يمكن تعريف التكامل الثنائى للدالة $f(x, y)$ على المنطقة R على أنه :

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A \qquad (٢)$$



شكل ٦٣ – ٢



شكل ٦٣ – ١

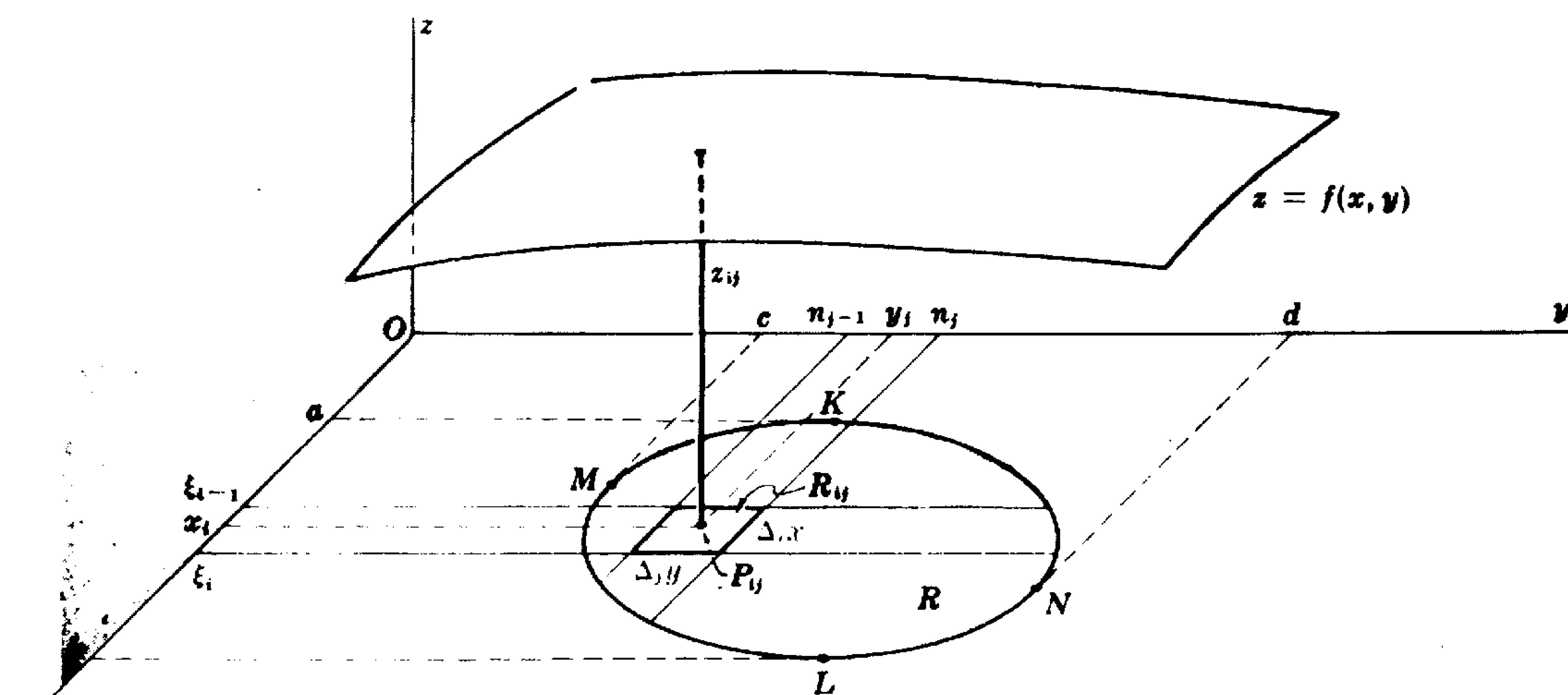
وإذا كانت الدالة $z = f(x, y)$ ليست سالبة فى المنطقة R فإنه يمكن ، كما يبدو من الشكل ٦٣ – ٢ تفسير التكامل الثنائى (٢) على أنه حجم ، فكل حد من الشكل $f(x_k, y_k)\Delta_k A$ من (١) يعطينا حجم عمود رأسى مساحة كل من قاعدتيه المتوازيتين $\Delta_k A$ وارتفاعه هو المسافة z_k مقيسة على المستقيم الرأسى المقام من النقطة المختارة P_k على السطح $z = f(x, y)$. وهذا الحجم ، يمكن اعتباره بدوره تقريباً حجم العمود الرأسى الذى قاعدته السفلى هى المنطقة الجزئية R_k وقاعدته العليا مسقط R_k على السطح . إذن المعادلة (١) هى تقريب الحجم الواقع تحت السطح (أى الحجم الذى قاعدته السفلى فى المستوى xOy وقاعدته العليا واقعة على السطح الناتج من حركة مستقيم مواز للمحور z على طول حدود R_k) وأن المعادلة (٢) تعطى ، عن طريق الحدس على الأقل ، قياس هذا الحجم .

إن حساب التكامل الثنائى عن طريق الجمع المباشر صعب مهما كان التكامل بسيطاً ولذا فإننا سوف لا نحاوله هنا .

التكامل المكرر • لننظر فى الحجم المعرف كما سبق ولنفرض أن حدود R هى بحيث لاتشترك مع أى مستقيم مواز للمحور x أو أى مستقيم مواز للمحور y فى أكثر من نقطتين . لنرسم (أنظر الشكل ٦٣ – ٣) المماسين $x = a$ و $x = b$ للحدود ولنفرض أن نقطتى التماس هما k و L . لنرسم كذلك المماسين $y = c$ و $y = d$ ولنفرض أن نقطتى التماس هما M و N . لتكن معادلة المنحنى المستوى LMK هى $y = g_1(x)$ ومعادلة المنحنى المستوى LNK هى $y = g_2(x)$. لنقسم الفترة $a \le x \le b$ إلى m من الفترات الجزئية $h_1, h_2, \ldots, h_m$ أطوالها $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_m x$ على الترتيب ، ولتكن نقط التقسيم هى $x = \xi_1,\ x = \xi_2,\ \ldots,\ x = \xi_{m-1}$ (كما فى الفصل ٣٣) . ولنقسم الفترة $c \le y \le d$ إلى n من الفترات الجزئية $k_1, k_2, \ldots, k_n$ أطوالها $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \ldots, \Delta_n y$ على الترتيب ولتكن نقط التقسيم هى $y = \eta_1,\ y = \eta_2,\ \ldots,\ y = \eta_{n-1}$. لنرمز بـ λ_m لأطول فترة من $\Delta_i x$ و μ_n لأطول فترة من $\Delta_j y$ لنرسم بعد ذلك المستقيمات المتوازية $x = \xi_1,\ x = \xi_2,\ \ldots,\ x = \xi_{m-1}$ والمستقيمات المتوازية $y = \eta_1,\ y = \eta_2,\ \ldots,\ y = \eta_{n-1}$ فتقسم بذلك المنطقة R إلى مجموعة مستطيلات R_{ij} مساحاتها $\Delta_i x \Delta_j y$ وإلى مجموعة من المستطيلات الناقصة سنهملها فيما يلى . لنختر على كل فترة جزئية h_i نقطة $x = x_i$ وعلى كل فترة جزئية k_j نقطة $y = y_j$ فتتحدد بذلك فى كل منطقة جزئية R_{ij} نقطة $P_{ij}(x_i, y_j)$ لنلحق بكل منطقة جزئية R_{ij} بواسطة معادلة السطح ، عدداً $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ ولنشكل المجموع :

$$\sum_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} f(x_i, y_j)\, \Delta_i x \cdot \Delta_j y \qquad (٣)$$

ليست (٣) التى حصلنا عليها إلا مجرد حالة خاصة من (١) ، وبالتالى فإنه إذا ازداد عدد المستطيلات إلى مالا نهاية بحيث يئول كل من λ_m و μ_n إلى الصفر فإنه ينبغى أن تساوى نهاية (٣) التكامل الثنائى (٢) .



شكل ٦٣ – ٣

لإجراء هذه النهاية ، نختار أولا أحد الفترات الجزئية وليكن h_i ونشكل المجموع .

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\}\Delta_i x\,, \qquad (\text{ثابتة } i)$$

الذى يمتد إلى جميع المستطيلات التى أحد أبعادها h_i ، أى يمتد إلى جميع المستطيلات فى العمود i . فإذا جعلنا $n \to +\infty$ فإن : $\mu_n \to 0$ وإن :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\}\Delta_i x = \left\{\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy\right\}\Delta_i x = \phi(x_i)\,\Delta_i x$$

لنجمع بعد ذلك على الـ m عموداً ولنجعل $m \to +\infty$ فنحصل على :

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}\phi(x_i)\,\Delta_i x &= \int_a^b \phi(x)\,dx \\ &= \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\right]dx = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx\end{aligned} \qquad (٤)$$

ومع أننا سوف نستغنى عن الأقواس من الآن فإنه ينبغى أن نفهم (٤) باستمرار على أنها حساب قيمة تكاملين محدودين بسيطين وفق الترتيب المذكور . أى أننا نكامل $f(x, y)$ أولا بالنسبة لـ y (معتبرين x ثابتة) من $y = g_1(x)$ الحد الأدنى لـ R إلى $y = g_2(x)$ الحد الأعلى لـ R . ثم نكامل بعد ذلك النتيجة بالنسبة لـ x من $x = a$ لأقصى نقطة من R يساراً إلى $x = b$ لأقصى نقطة من R يميناً . يسمى التكامل (٤) التكامل المكرر .

يترك للقارىء ، على شكل تمرين ، أن يشكل أولا المجموع الممتد على جميع المستطيلات فى كل صف ثم يشكل المجموع الممتد على جميع الصفوف ليحصل على التكامل المكرر المكافىء .

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy \qquad (٥)$$

حيث $x = h_1(y)$ و $x = h_2(y)$ معادلتا المنحنيين المستويين MKN و MLN على الترتيب .

سنرى فى المسألة ١ وبطريقة مختلفة كيف أن التكامل المكرر (٤) يقيس الحجم الذى نحن بصدده . وللتعرف على حساب قيم التكاملات المكررة أنظر المسائل ٢ — ٦ .

إن الصعوبة الرئيسية التى تصادفنا عند تشكيل التكاملات المكررة فى الفصول التالية تكمن فى تحديد حدود التكامل اللازمة لتغطية المنطقة R والمناقشة التى قدمناها ارتكزت على مناطق بسيطة ، وإذ أردت أن تشمل المناقشة مناطق أكثر تعقيد فانظر المسائل ٧ — ٩ .

مســائل محلولة

١ — لتكن $z = f(x, y)$ دالة غير سالبة ومتصلة فى المنطقة R من المستوى xOy ، ولنفرض أن حدود المنطقة تتكون من قوسى المنحنيين $y = g_1(x)$ و $y = g_2(x)$ المتلاقيين عند النقطتين K و L كما فى الشكل ٦٣ — ٤ . لننظر فى الحجم V الواقع تحت السطح .

لنفرض أن مقطع هذا الحجم مع المستوى $x = x_i$ ، حيث $a < x_i < b$ يلاقى محيط R فى النقطتين $S[x_i, g_1(x_i)]$ و $T = [x_i, g_2(x_i)]$ ويلاقى السطح $z = f(x, y)$ فى القوس UV الذى يكون عليه $z = f(x, y)$. إن مساحة هذا المقطع $STUV$ تعطى بـ

$$A(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\, dy$$

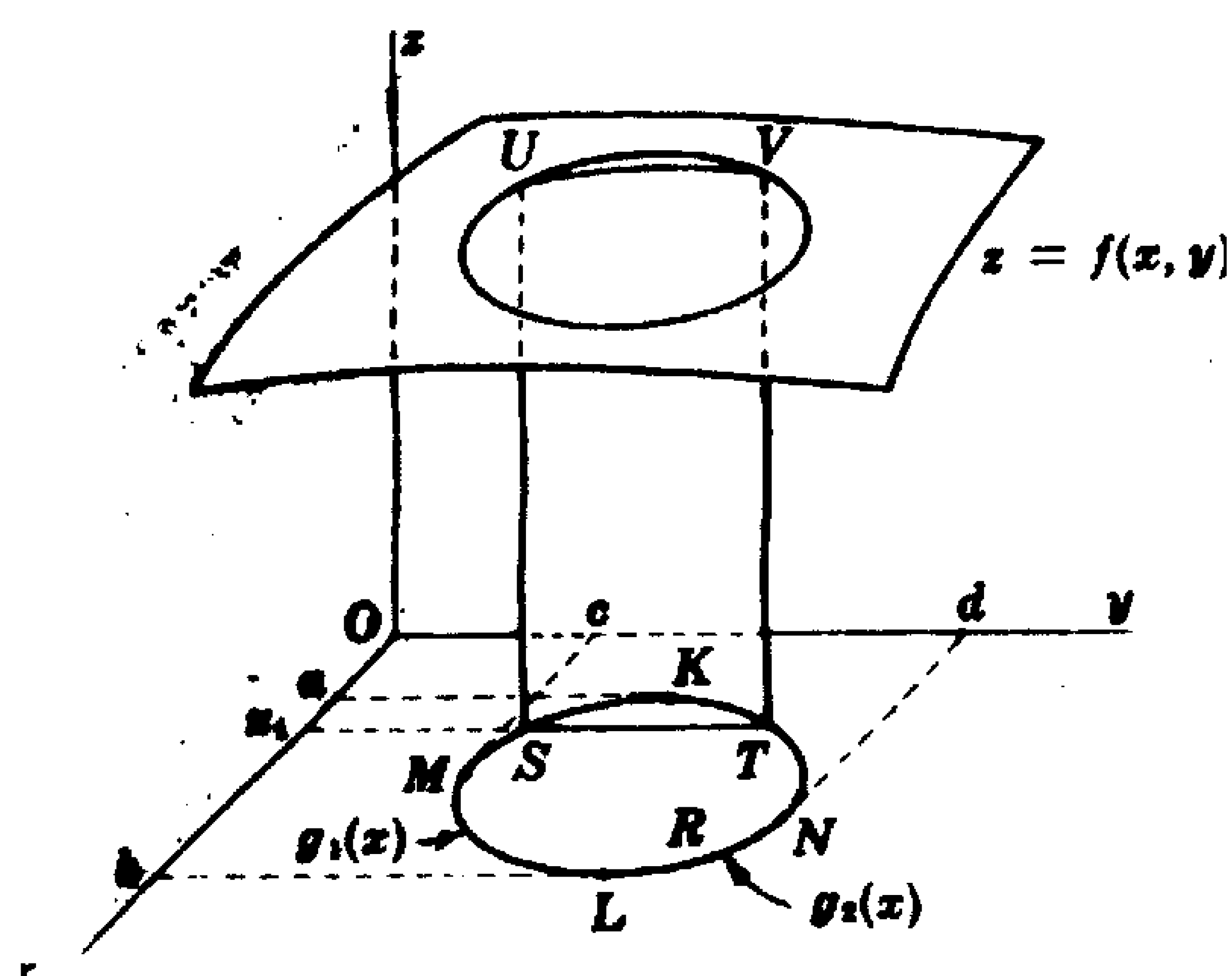
وهكذا نرى ان مساحات مقاطع الحجم بمستويات موازية للمستوى yOz هى دوال معلومة فى x :

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$$

حيث x بعد المستوى القاطع عن نقطة الأصل واستناداً إلى الفصل ٣٦ يكون الحجم المطلوب هو : $\int_a^b A(x)\, dx$

$$= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

وهذا هو التكامل المكرر الوارد فى المعادلة (٤)



شكل ٦٣ — ٤

٢ - $\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$

٣ - $\int_1^2\int_y^{3y} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Big]_y^{3y} dy = \int_1^2 6y^2\,dy = 2y^3\Big]_1^2 = 14$

٤ - $\int_{-1}^{2}\int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\,dy\,dx = \int_{-1}^{2} (xy)\Big]_{2x^2-2}^{x^2+x} dx = \int_{-1}^{2} (x^3+x^2-2x^3+2x)\,dx = \frac{9}{4}$

٥ - $\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} \rho\sin\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}\rho^2\sin\theta\right)\Big]_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$

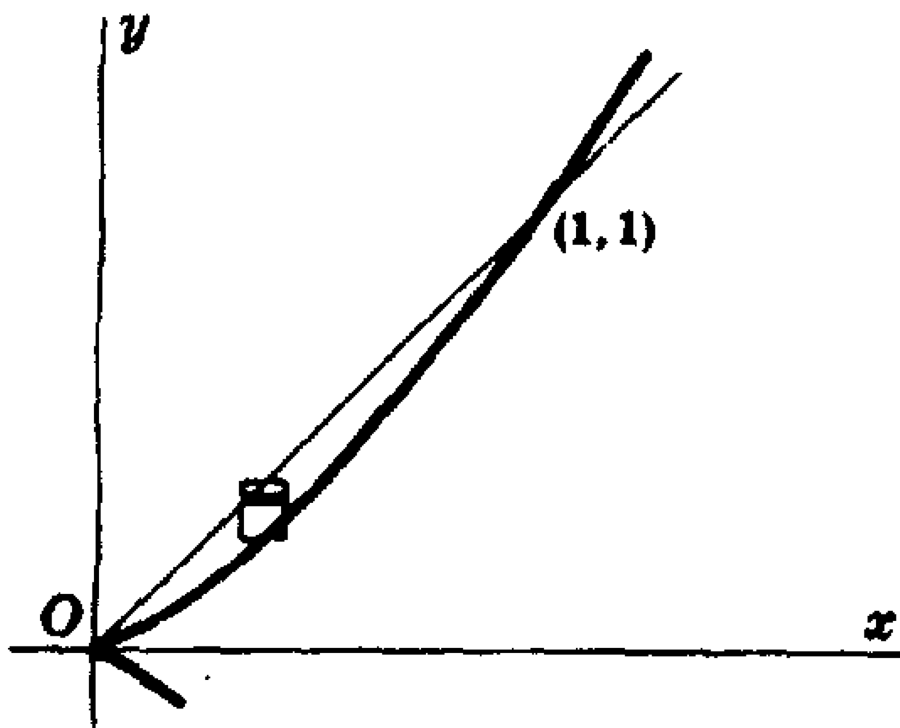
$$= \left(-\frac{1}{6}\cos^3\theta\right)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{3}$$

٦ - $\int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos\theta} \rho^3\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big]_2^{4\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2}(64\cos^4\theta-4)\,d\theta$

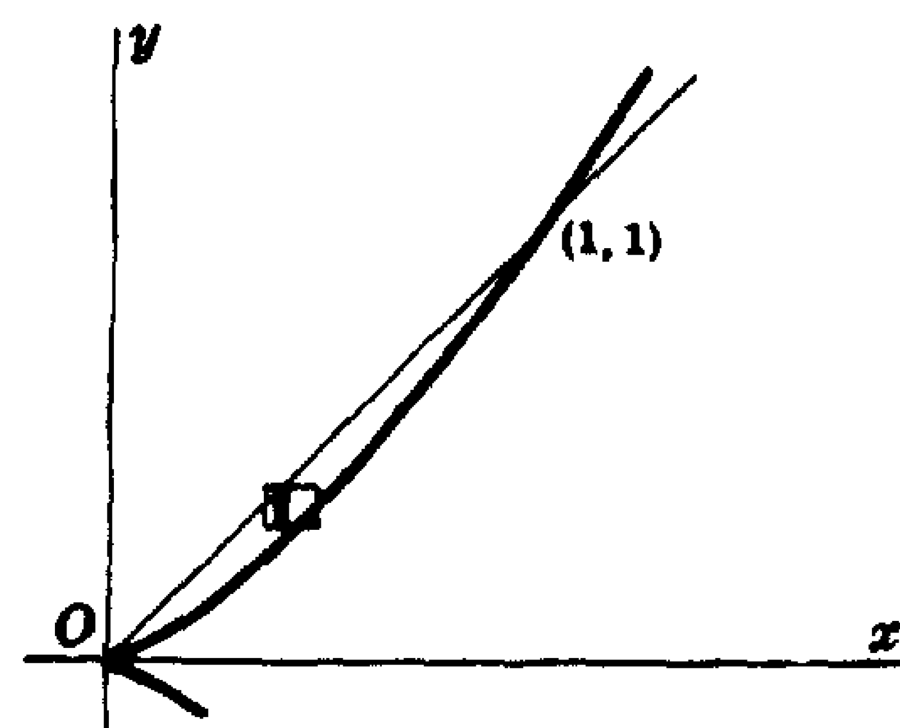
$$= \left[64\left(\frac{3\theta}{8}+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 4\theta}{32}\right)-4\theta\right]_0^{\pi/2} = 10\pi$$

٧ - احسب قيمة $\iint_R dA$ حيث R هي المنطقة الواقعة في الربع الأول بين القطع المكافيء نصف المكعبي $y^2 = x^3$ والمستقيم $y = x$.

يتقاطع القطع المكافيء مع المستقيم في النقطتين $(0,0)$ و $(1,1)$ اللتين تحددان القيم القصوى لـ x و y في المنطقة R .



شكل ٦٣ - ٦



شكل ٦٣ - ٥

حل أول : أنظر الشكل ٦٣ - ٥ لتكامل أولا على شريط أفقي ، أي بالنسبة لـ x من $x = y$ (المستقيم) إلى $x = y^{2/3}$ (القطع المكافيء) ثم تكامل بالنسبة لـ y من $y = 0$ إلى $y = 1$.

$$\iint_R dA = \int_0^1\int_y^{y^{2/3}} dx\,dy = \int_0^1 (y^{2/3}-y)\,dy = \left[\frac{3}{5}y^{5/3}-\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

حل ثان : أنظر الشكل ٦٣ - ٦ لتكامل أولا على شريط رأسي ، أي بالنسبة لـ y من $y = x^{3/2}$ (القطع المكافيء) إلى $y = x$ (المستقيم) ثم تكامل بالنسبة لـ x من $x = 0$ إلى $x = 1$.

$$\iint_R dA = \int_0^1\int_{x^{3/2}}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x-x^{3/2})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

٨ – احسب قيمة $\iint_R dA$ حيث R هي المنطقة الواقعة بين $y = 2x$ و $y = x^2$ إلى يساره x .

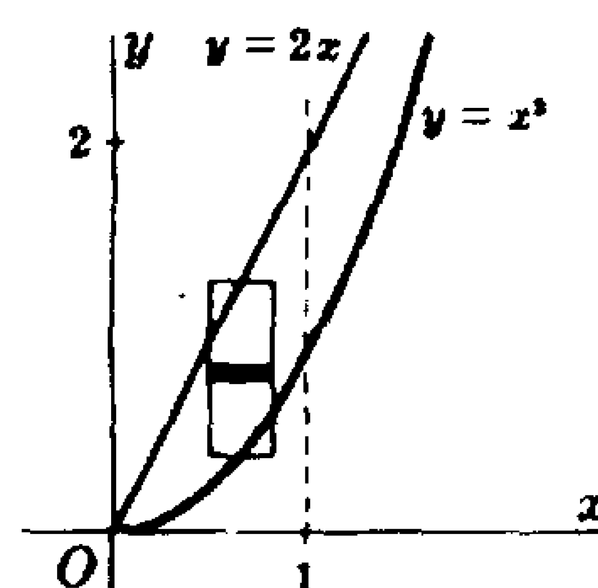
لتكامل أولا على شريط رأسي (أنظر الشكل ٦٣ – ٧) فنجـد :

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dy\, dx = \int_0^1 (2x - x^2)\, dx = \frac{2}{3}$$

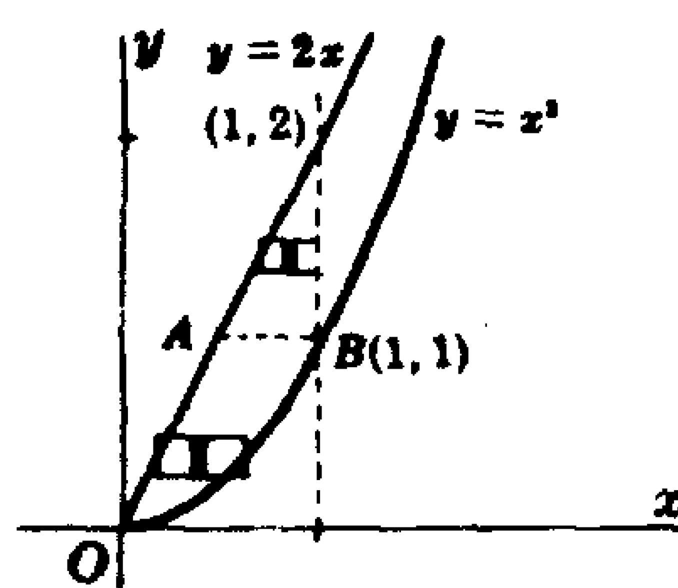
أما إذا استخدمنا الأشرطة الأفقية (أنظر الشكل ٦٣ – ٨) فعندئذ نحتاج إلى تكاملين متتاليين . لنرمز بـ R_1 لذلك الجزء من R الواقع تحت AB وبـ R_2 .

لذلك للجزء الواقع فوق AB عندئذ يكون :

$$\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} dx\, dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\, dy = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$



شكل ٦٣ – ٧



شكل ٦٣ – ٨

٩ – احسب قيمة $\iint_R x^2\, dA$ حيث R هي المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين القطع الزائد $xy = 16$ والمستقيمات $y = x, y = 0, x = 8$ أنظر الشكل ٦٣ – ٩ .

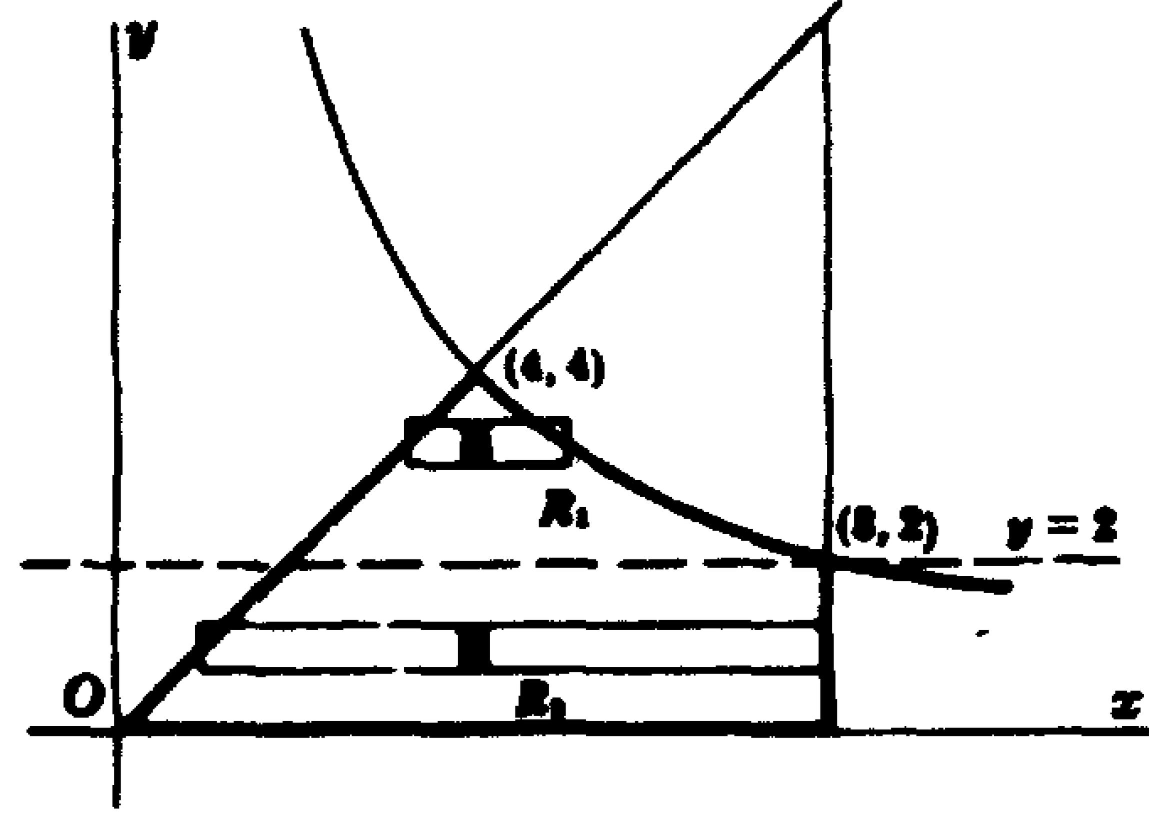
يتضح من الشكل ٦٣ – ٩ أنه ينبغي تجزئة المنطقة R إلى منطقتين وأن تحسب قيمة التكامل المكرر في كل منهما . لنرمز بـ R_1 لتلك المنطقة من R الواقعة فوق المستقيم $y = 2$ وبـ R_2 للمنطقة الواقعة تحت ذلك المستقيم يكون عندئذ :

$$\iint_R x^2\, dA = \iint_{R_1} x^2\, dA + \iint_{R_2} x^2\, dA = \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2\, dx\, dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2\, dx\, dy$$

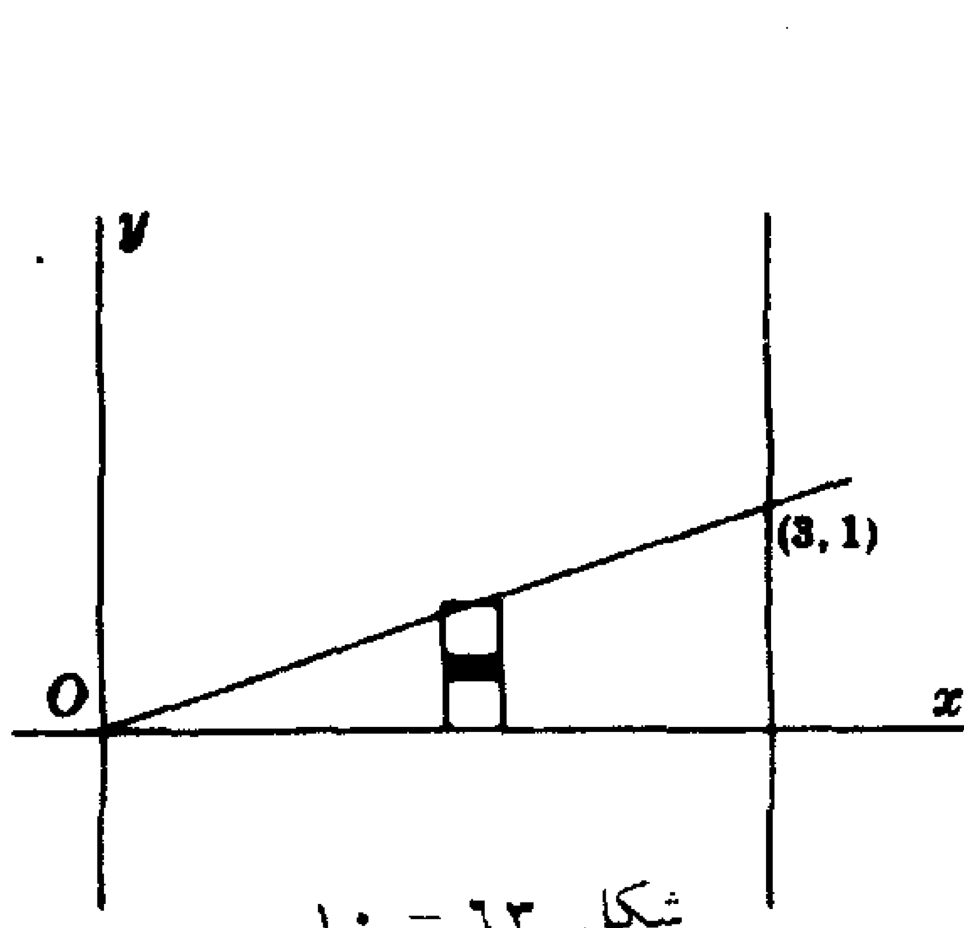
$$= \frac{1}{3} \int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3} - y^3 \right) dy + \frac{1}{3} \int_0^2 (8^3 - y^3)\, dy = 448$$

ويمكن أن نقسم المنطقة R بالمستقيم $x = 4$ ، وهذا مانتركه للقارىء كتمرين ، فنحصل على :

$$\iint_R x^2\, dA = \int_0^4 \int_0^x x^2\, dy\, dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2\, dy\, dx$$



شكل ٦٣ – ٩



شكل ٦٣ – ١٠

١٠ – احسب قيمة $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$ بأن تعكس أولا ترتيب التكامل

لايمكن حساب التكامل المفروض مباشرة لأنه لايمكن التعبير عن $\int e^{x^2}\,dx$ بدوال ابتدائية . إن المنطقة R محصورة بين المستقيمات $x = 3y,\ x = 3,\ y = 0$ وإذا أردنا أن نعكس ترتيب التكامل فعلينا أن نكامل أولا بالنسبة لـ y من $y = 0$ إلى $y = x/3$ ثم بالنسبة لـ x من $x = 0$ إلى $x = 3$ فنجد ·

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 e^{x^2} y\Big]_0^{x/3} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{6}e^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{1}{6}(e^9 - 1)$$

مسـائل اضـافية

١١ – احسب قيمة التكاملات المكررة التالية :

(ا) $\int_0^1 \int_1^2 dx\,dy = 1$

(ب) $\int_1^2 \int_0^3 (x + y)\,dx\,dy = 9$

(ﺟ) $\int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \frac{70}{3}$

(د) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx = \frac{1}{40}$

(ﻫ) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} x/y^2\,dx\,dy = \frac{3}{4}$

(و) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)\,dy\,dx = \frac{7}{60}$

(ز) $\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y\,dy\,dx = \frac{1}{2}e - 1$

(ح) $\int_2^4 \int_y^{8-y} y\,dx\,dy = \frac{32}{3}$

(ط) $\int_0^{\mathrm{Arc}\tan 3/2} \int_0^{2\sec\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = 3$

(ى) $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}$

(ك) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\tan\theta\sec\theta} \rho^3 \cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{20}$

(ل) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} \rho^3 \cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{49}{32}\pi$

١٢ – احسب كلا من التكاملات الثنائية التالية باستخدام التكاملات المكررة .

احسب قيمة التكامل المكرر بكلا الترتيبين إذا كان الأمر سهلا .

(ا) الدالة x والمنطقة محصورة بين $y = x^2$ و $y = x^3$. ج : $1/20$

(ب) الدالة y والمنطقة هي المذكورة في (ا) . ج : $1/35$

(جـ) الدالة x^2 والمنطقة محصورة بين المستقيمات $x = 2$ ، $y = 2x$ ، $y = x$ ج : 4

(د) الدالة 1 والمنطقة واقعة في الربع الأول بين $2y = x^2$ ، $y = 3x$ و $x + y = 4$ ج : $8/3$ ؛ $46/4$

(هـ) الدالة y والمنطقة واقعة فوق $y = 0$ ومحصورة بين $y^2 = 4x$ و $y^2 = 5 - x$ ج : 5

(و) الدالة $\frac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$ والمنطقة في الربع الأول محددة بـ $x^2 = 4 - 2y$ ج : 4

١٣ – اعكس في المسائل ١١ (ا) – (ح) ترتيب التكامل واحسب التكاملات المكررة الناتجة .

الفصل الرابع والستون

المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية

حساب مساحة السطح بالتكامل الثنائي • إذا جعلنا $f(x, y) = 1$ في التكامل الثنائي الوارد في الفصل ٦٣ فإن هذا التكامل يأخذ الشكل $\iint_R dA.$ ويقيس هذا التكامل بالوحدات المكعبة حجم اسطوانة طولها يساوي وحدة الأطوال ، ويقيس بالوحدات المربعة مساحة المنطقة R .

انظر المسألتين ١ — ٢

يكون الاحداثيات القطبية $A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta,$ حيث نأخذ $\theta = \alpha, \theta = \beta, \rho_1(\theta), \rho_2(\theta)$ بحيث تغطي المنطقة R فعلا .

انظر المسائل ٣ — ٥

المراكز المتوسطة • إن الاحداثيين (x, y) للمركز المتوسط للمنطقة المستوية R التي مساحتها $A = \iint_R dA$ يحققان العلاقتين :

$$A \cdot \bar{y} = M_x \quad \text{و} \quad A \cdot \bar{x} = M_y$$

أو

$$\bar{y} \cdot \iint_R dA = \iint_R y\, dA \quad \text{و} \quad \bar{x} \cdot \iint_R dA = \iint_R x\, dA$$

انظر المسائل ٦ — ٩

عزما القصور الذاتي . لمنطقة مستوية R بالنسبة للمحورين الاحداثيين يعطيان بـ :

$$I_y = \iint_R x^2\, dA \quad \text{و} \quad I_x = \iint_R y^2\, dA$$

أما عزم القصور الذاتي القطبي (أي عزم القصور الذاتي بالنسبة لمستقيم مار بنقطة الأصل وعمودي على مستوى السطح) للسطح المستوى R فيعطى بـ :

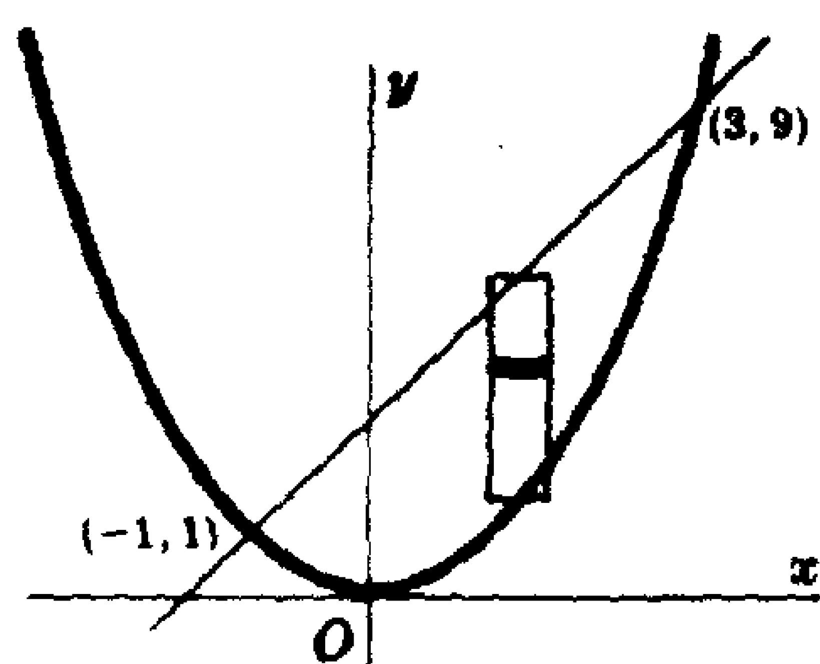
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA$$

انظر المسائل ١٠ — ١٢

مســائل محلولة

١ – احسب مساحة السطح الواقع بين القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيم $y = 2x + 3$.

باستخدام الشرائح الرأسية (انظر الشكل ٦٤ – ١) نجد أن :

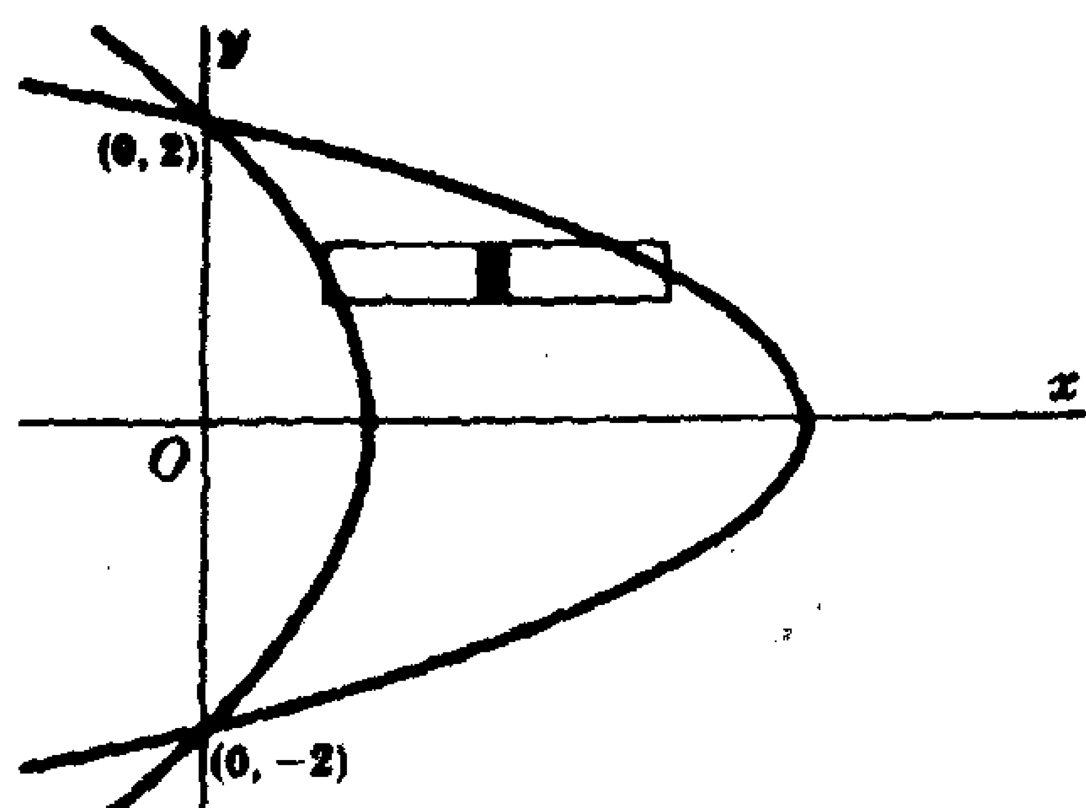


شكل ٦٤ — ١

$$A = \int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3} dy\,dx$$
$$= \int_{-1}^{3}(2x + 3 - x^2)\,dx$$
$$= 32/3 \text{ square units}$$

٢ – احسب مساحة السطح المحصورة بين القطعين المكافئين $y^2 = 4 - x$ و $y^2 = 4 - 4x$.

باستخدام الشرائح الأفقية (انظر الشكل ٦٤ – ٢) والاستفادة من التناظر .

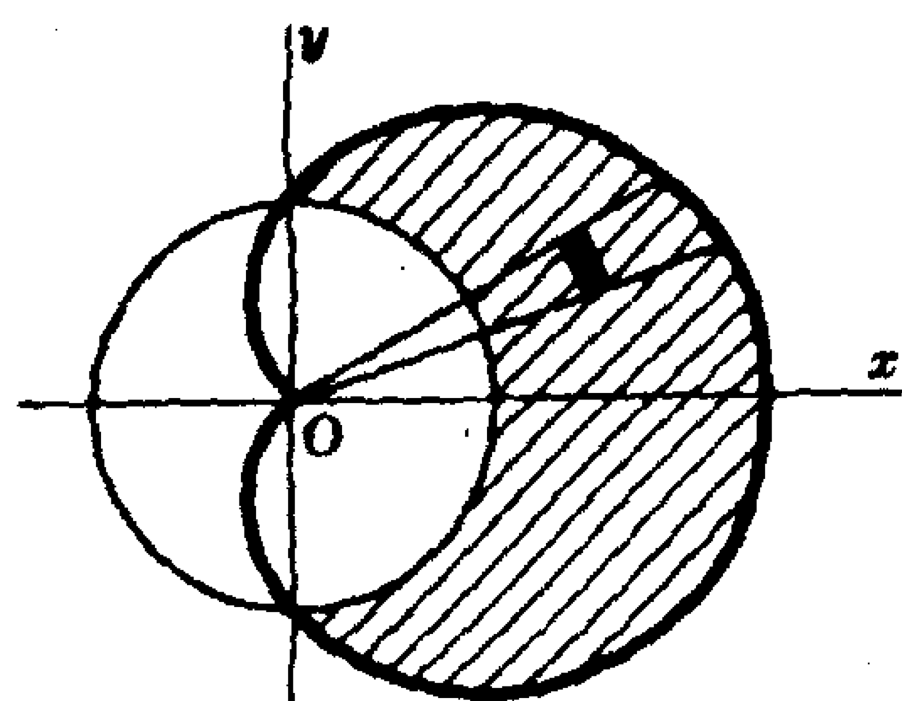


شكل ٦٤ — ٢

$$A = 2\int_{0}^{2}\int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\,dy$$
$$= 2\int_{0}^{2}[(4 - y^2) - (1 - \tfrac{1}{4}y^2)]\,dy$$
$$= 6\int_{0}^{2}(1 - \tfrac{1}{4}y^2)\,dy$$
$$= 8 \text{ square units}$$

٣ – احسب مساحة السطح الواقعة خارج الدائرة $\rho = 2$ وداخل منحنى القلب $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

إن المساحة المطلوبة ، بسبب التناظر ، تساوى ضعف المساحة التى يمسحها نصف القطر المتجه عندما تتغير θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \tfrac{1}{2}\pi$ وهكذا فإن :

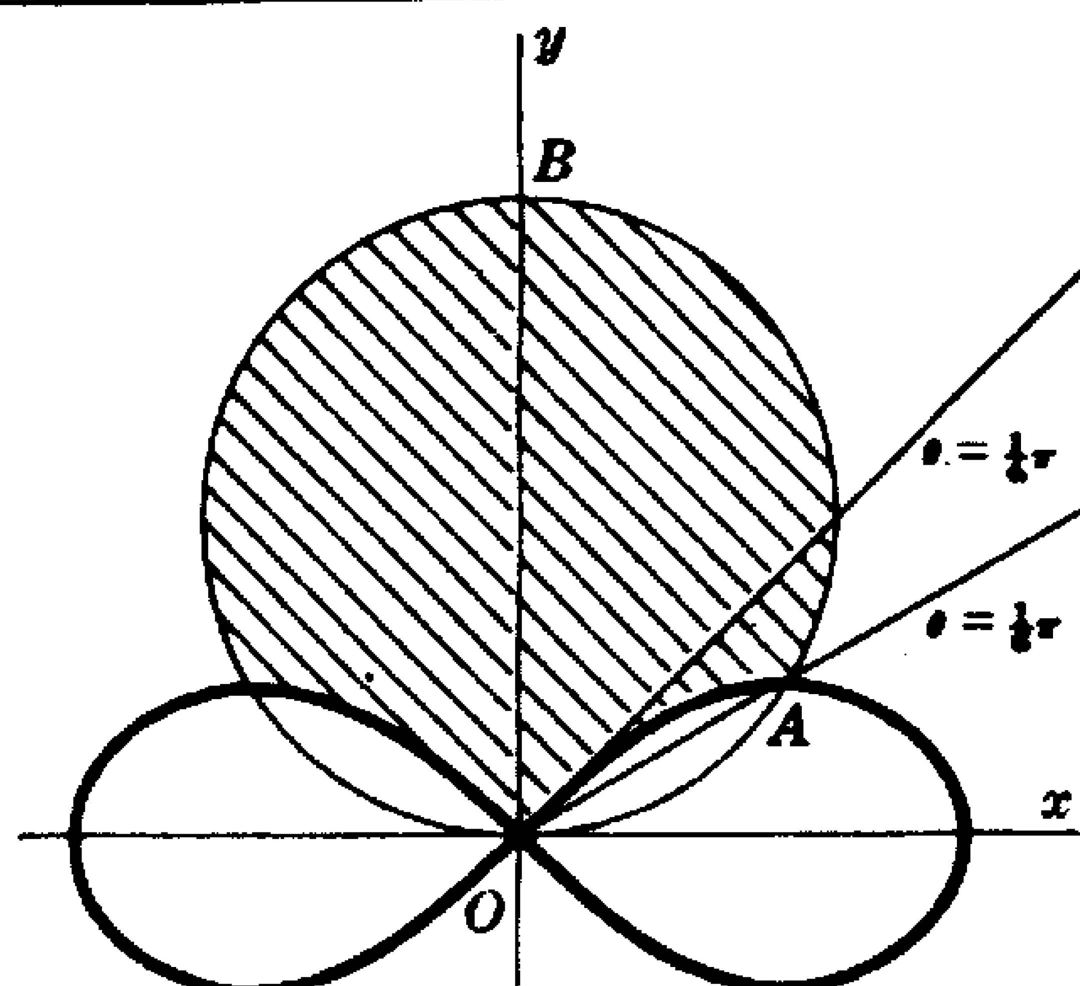


شكل ٦٤ — ٣

$$A = 2\int_{0}^{\pi/2}\int_{2}^{2(1+\cos\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta = 2\int_{0}^{\pi/2}\frac{1}{2}\rho^2\Big]_{2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$
$$= 4\int_{0}^{\pi/2}(2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$
$$= 4\left[2\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{0}^{\pi/2} = (\pi + 8) \text{ square units}$$

٤ – أحسب مساحة السطح الواقع داخل الدائرة $\rho = 4\sin\theta$ وخارج المنحنى ذو العروتين (الليمنسكات) $\rho^2 = 8\cos 2\theta$.

(إن المساحة المطلوبة تساوى ضعف مساحة قطعة السطح فى الربع الأول بين المنحنيين والمستقيم $\theta = \tfrac{1}{2}\pi$ يلاحظ أن نصف القطر المتجه OA يرسم قوس الدائرة عندما تتغير θ من $\theta = \pi/6$ إلى $\theta = \pi/2$ وعلى هذا فإنه ينبغى أن نعتبر المنطقة



شكل ٦٤ — ٤

مكونه من منطقتين إحداهما تحت المستقيم $\theta = \pi/4$ والأخرى فوقه .

إذن :

$$A = 2\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{2\sqrt{2\cos 2\theta}}^{4\sin\theta} \rho\, d\rho\, d\theta + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{4\sin\theta} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16\sin^2\theta - 8\cos 2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= (\tfrac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 4)$$

٥ — احسب قيمة $N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$

بما أن $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy,$

فإن

$$N^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \iint_{R} e^{-(x^2+y^2)}\, dA$$

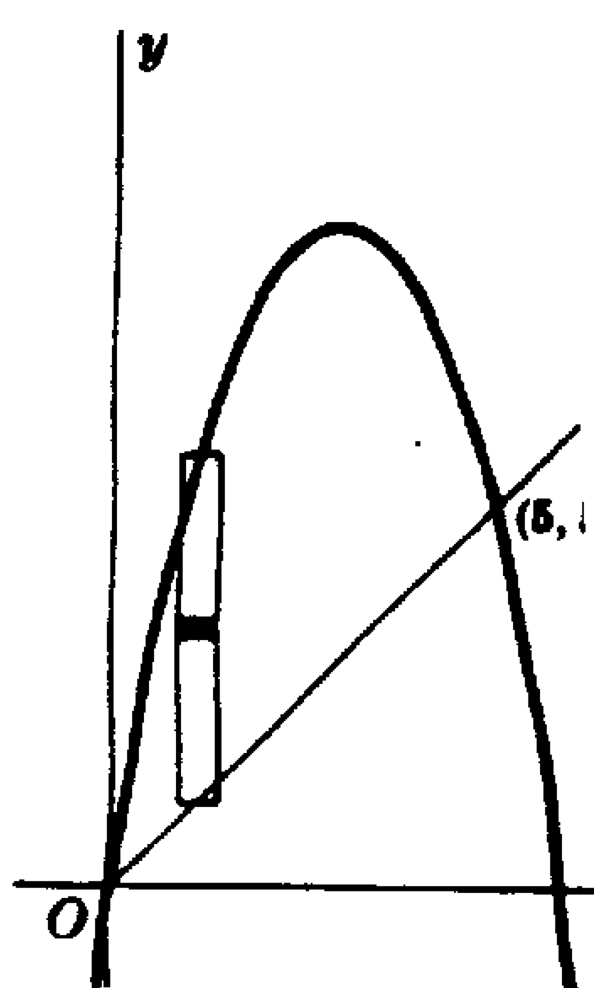
شكل ٦٤ — ٥

وبالانتقال إلى الاحداثيات القطبية $(x^2 + y^2 = \rho^2,\ dA = \rho\, d\rho\, d\theta),$

$$N^2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ \lim_{a\to+\infty} \left[(-\tfrac{1}{2}e^{-\rho^2})\right]_0^a \right\} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

ومنه $N = \sqrt{\pi}/2$.

٦ — عين المركز المتوسط للسطح المستوى المحصور بين القطع المكافئ $y = 6x - x^2$ والمستقيم $y = x$.



شكل ٦٤ — ٦

$$A = \iint_R dA = \int_0^5\int_x^{6x-x^2} dy\, dx = \int_0^5 (5x - x^2)\, dx = \frac{125}{6}$$

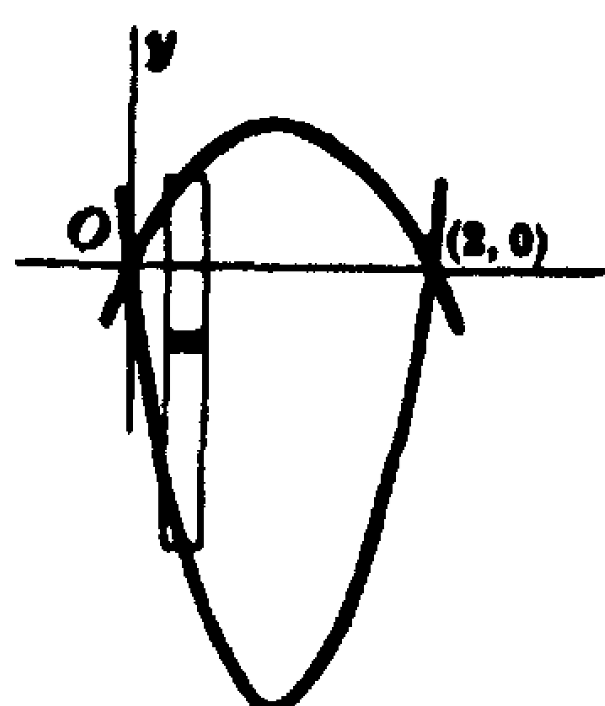
$$M_y = \iint_R x\, dA = \int_0^5\int_x^{6x-x^2} x\, dy\, dx = \int_0^5 (5x^2 - x^3)\, dx = \frac{625}{12}$$

$$M_x = \iint_R y\, dA = \int_0^5\int_x^{6x-x^2} y\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \{(6x - x^2)^2 - x^2\}\, dx = \frac{625}{6}$$

وعلى هذا فإن $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{5}{2},\ \bar{y} = \frac{M_x}{A} = 5,$ والمركز المتوسط هو النقطة (5/2 ، 5) .

٧ — عين المركز المتوسط للسطح المستوى المحصور بين القطعين المكافئين $y = 3x^2 - 6x$ و $y = 2x - x^2$.



شكل ٦٤ — ٧

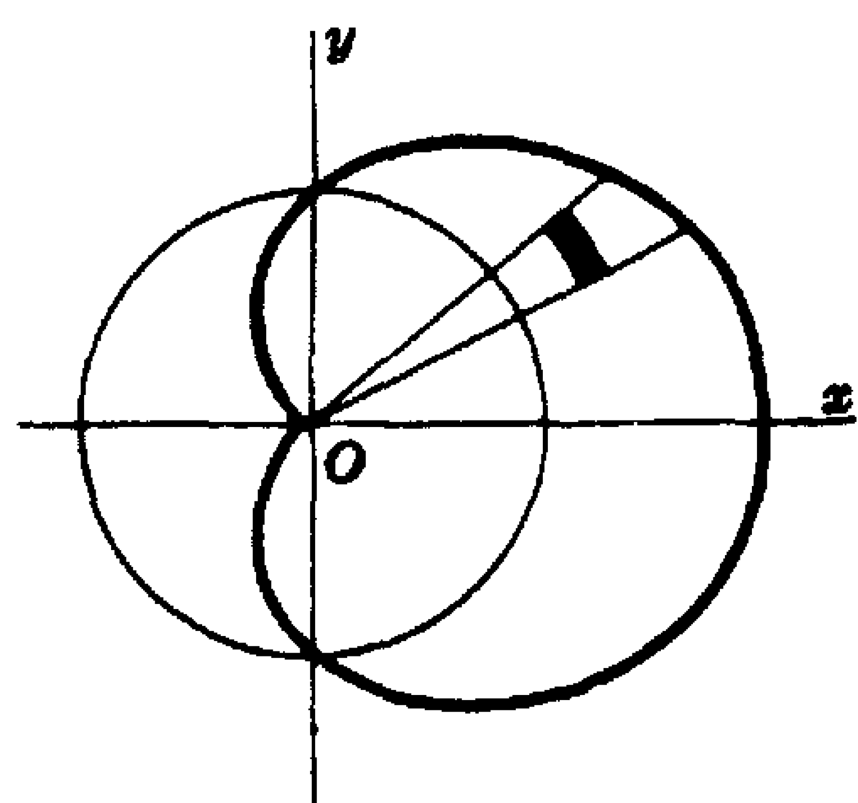
$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 (8x - 4x^2)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x\,dy\,dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \{(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2\}\,dx = -\frac{64}{15}$$

وبالتالى فإن $\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1,\ \bar{y} = \frac{M_x}{A} = -\frac{4}{5},$ والمركز المتوسط هو النقطة $(1, -4/5)$



شكل ٦٤ — ٨

٨ — عين المركز المتوسط للسطح المستوى الواقع خارج الدائرة $\rho = 1$ وداخل منحنى القلب $\rho = 1 + \cos\theta$ (انظر الشكل ٦٤ — ٨).

يتضح من الشكل ٦٤ — ٨ أن $\bar{y} = 0$ وأن $\bar{x}$ هى نفسها سواء حسبناها للسطح المفروض أو لنصفه الواقع فوق المحور القطبى.

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \{(1 + \cos\theta)^2 - 1^2\}\,d\theta = \frac{\pi + 8}{8}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

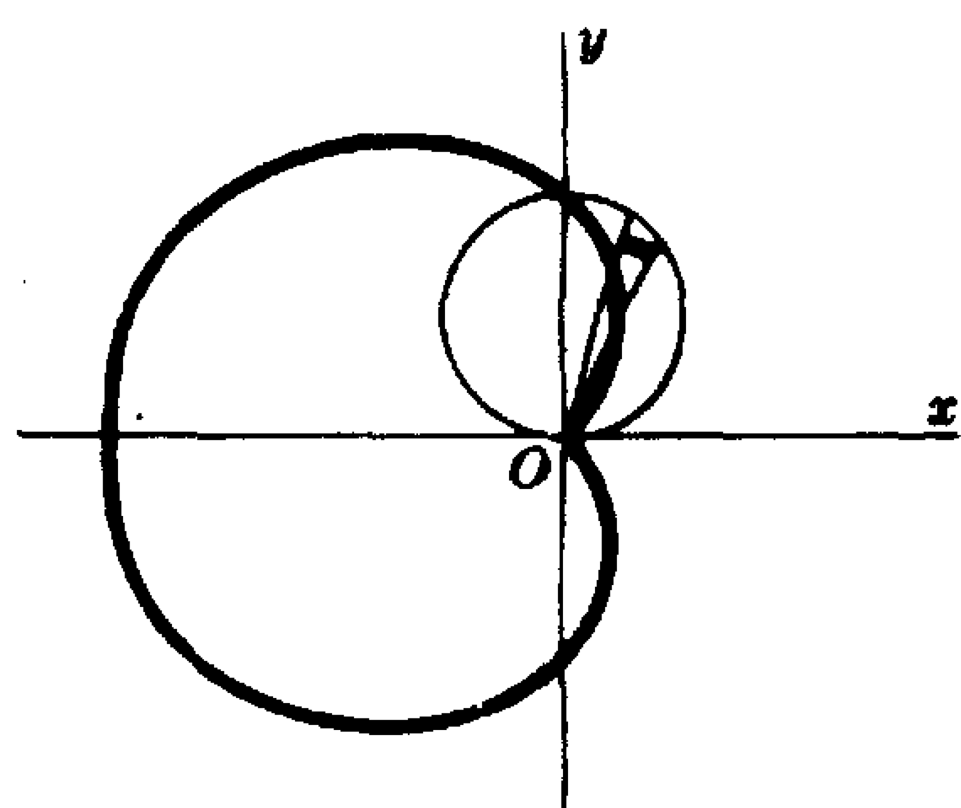
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta + 3\sin\theta - \sin^3\theta + \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{15\pi + 32}{48}$$

والمساحة الأخيرة يكون المركز المتوسط هو النقطة $\left(\frac{15\pi + 32}{6(\pi + 8)}, 0\right)$

٩ — عين المركز المتوسط للسطح الواقع داخل $\rho = \sin\theta$ وخارج $\rho = 1 - \cos\theta$ انظر الشكل ٦٤—٩

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{4 - \pi}{4}$$



شكل ٦٤ — ٩

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\cos\theta\,d\theta$$

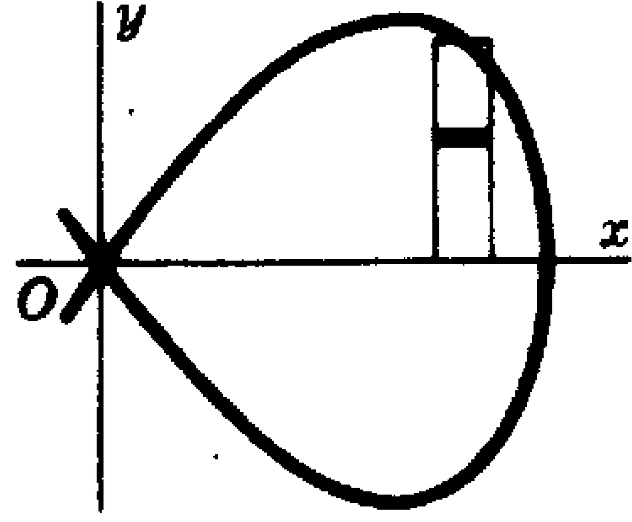
$$= \frac{15\pi - 44}{48}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos\theta}^{\sin\theta} (\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\sin^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3\pi - 4}{48}$$

فالمركز المتوسط هو النقطة $\left(\frac{15\pi - 44}{12(4 - \pi)}, \frac{3\pi - 4}{12(4 - \pi)}\right)$.



شكل ٦٤ — ١٠

١٠ - احسب I_x, I_y, I_0 للسطح الذى يحدد بعقدة المنحنى $y^2 = x^2(2-x)$.

$$A = \iint_R dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$$

$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4)\,dz = -4\left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

وذلك باستخدام التحويل $2 - x = z^2$.

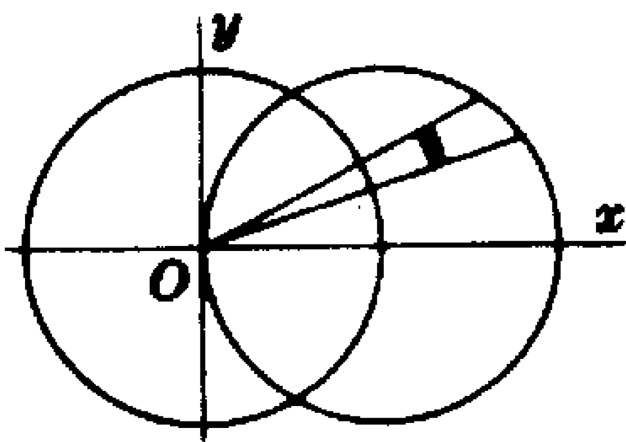
$$I_x = \iint_R y^2\,dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2\,dy\,dx = \frac{2}{3}\int_0^2 x^3(2-x)^{3/2}\,dx$$

$$= -\frac{4}{3}\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^4\,dz = -\frac{4}{3}\left[\frac{8}{5}z^5 - \frac{12}{7}z^7 + \frac{2}{3}z^9 - \frac{1}{11}z^{11}\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231}A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = 2\int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2\,dy\,dx = 2\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\,dx$$

$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^2\,dz = -4\left[\frac{8}{3}z^3 - \frac{12}{5}z^5 + \frac{6}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21}A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13312\sqrt{2}}{3465} = \frac{416}{231}A\,.$$



شكل ٦٤ — ١١

١١ - احسب I_x, I_y, I_0 للسطح فى الربع الأول خارج الدائرة: $\rho = 2a$
وداخل الدائرة: $\rho = 4a\cos\theta$

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$

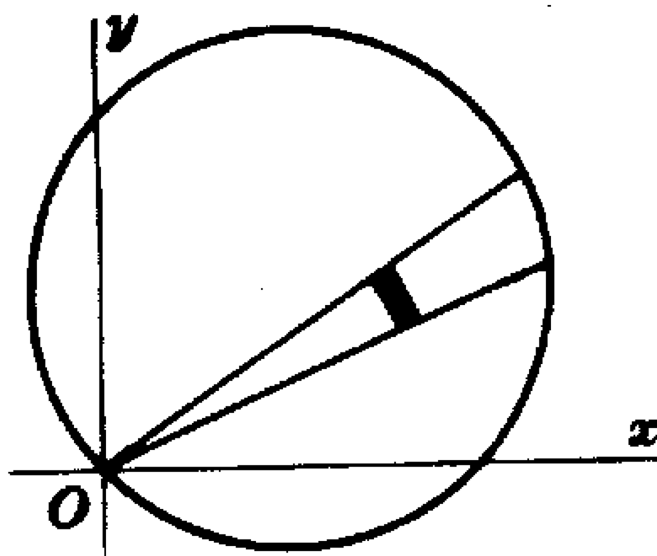
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \{(4a\cos\theta)^2 - (2a)^2\}\,d\theta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\sin\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\{(4a\cos\theta)^4 - (2a)^4\}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$= 4a^4\int_0^{\pi/3}(16\cos^4\theta - 1)\sin^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{3(12\pi + 11\sqrt{3})}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{3}a^4 = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}a^2A$$



شكل ٦٤ — ١٢

١٢ - احسب I_x, I_y, I_0 للسطح الواقع داخل الدائرة: $\rho = 2(\sin\theta + \cos\theta)$
بما أن $x^2 + y^2 = \rho^2$ فإن

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\,dA = \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{2(\sin\theta + \cos\theta)} \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} (\sin\theta + \cos\theta)^4\,d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{-1/4\,\pi}^{3/4\,\pi} = 6\pi = 3A$$

ويتضح من الشكل ٦٤ - ١٢ أن $I_x = I_y$ وبالتالى فإن $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{2}A$.

مســـائل اضـــافية

١٣ – باستخدام التكاملات الثنائية احسب مساحات السطوح التالية :

(ا) المحصورة بين $3x + 4y = 24,\ x = 0,\ y = 0.$ ج : 24 sq. un.

(ب) المحصورة بين $x + y = 2,\ 2y = x + 4,\ y = 0.$ ج : 6 sq. un.

(ﺟ) المحصورة بين $x^2 = 4y,\ 8y = x^2 + 16.$ ج : 32/3 sq. un.

(د) داخل $\rho = 2(1 - \cos\theta).$ ج : 6π sq. un.

(ﻫ) المحددة بـ $\rho = \tan\theta\sec\theta$ و $\theta = \pi/3.$ ج : $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ sq. un.

(و) خارج $\rho = 4$ ، خارج $\rho = 8\cos\theta$ ج : $8\,{}^2/_3\pi + \sqrt{3}$ sq. un.

١٤ – عين المركز المتوسط لكل من السطوح التالية :

(ا) سطح المسألة ١٣ (ا) . ج : (8/3, 2)

(ب) سطح المسألة ١٣ (ﺟ) الواقع فى الربع الأول . ج : (3/2, 8/5)

(ﺟ) السطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بـ $y^2 = 6x,\ y = 0,\ x = 6.$ ج : (18/5, 9/4)

(د) السطح المحدد بـ $y^2 = 4x,\ x^2 = 5 - 2y,\ x = 0.$ ج : (13/40, 26/15)

(ﻫ) السطح الواقع فى الربع الأول المحدد $x^2 - 8y + 4 = 0,\ x^2 = 4y,\ x = 0.$ ج : (3/4, 2/5)

(و) سطح المسألة ١٣ (ﻫ) ج : $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 6/5)$

(ز) السطح الواقع فى الربع الأول من سطح المسألة ١٣ (و) . ج : $\left(\dfrac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}, \dfrac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)$

١٥ – تحقق من أن ; $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [g_2^2(\theta) - g_1^2(\theta)]\, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta = \iint_R dA$

ثم استنتج

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_R f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

١٦ – احسب I_x, I_y لكل من السطوح التالية :

(ا) المسألة ١٣ (ا) . ج : $I_x = 6A,\ I_y = \frac{32}{3}A$

(ب) السطح المقطوع من $y^2 = 8x$ بالوتر البؤرى العمودى . ج : $I_x = \frac{16}{5}A,\ I_y = \frac{12}{7}A$

(ﺟ) السطح المحدد بـ $y = x^2$ و $y = x$. ج : $I_x = \frac{3}{14}A,\ I_y = \frac{3}{10}A$

(د) السطح المحدد بـ $y = 4x - x^2$ و $y = x$. ج : $I_x = \frac{459}{70}A,\ I_y = \frac{27}{10}A$

١٧ – احسب I_y, I_x لعقدة واحدة من المنحنى $\rho^2 = \cos 2\theta$ ج : $I_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{1}{6}\right)A,\ I_y = \left(\frac{\pi}{16} + \frac{1}{6}\right)A$

١٨ – احسب I_0 للسطحين التاليين :

(ا) عقد المنحنى $\rho = \sin 2\theta$ ج : 3/8A .

(ب) داخل المنحنى $\rho = 1 + \cos\theta$ ج : ${}^{35}/_{24}A$

الفصل الخامس والستون

الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائى

يعرف الحجم الواقع تحت السطح $z = f(x, y)$ أو $z = f(\rho, \theta)$ أى حجم العمود الرأسى الذى قاعدته العليا على السطح وقاعدته السفلى على المستوى xOy بالتكامل $V = \iint_R z\, dA,$ حيث المنطقة R القاعدة السفلى للعمود .

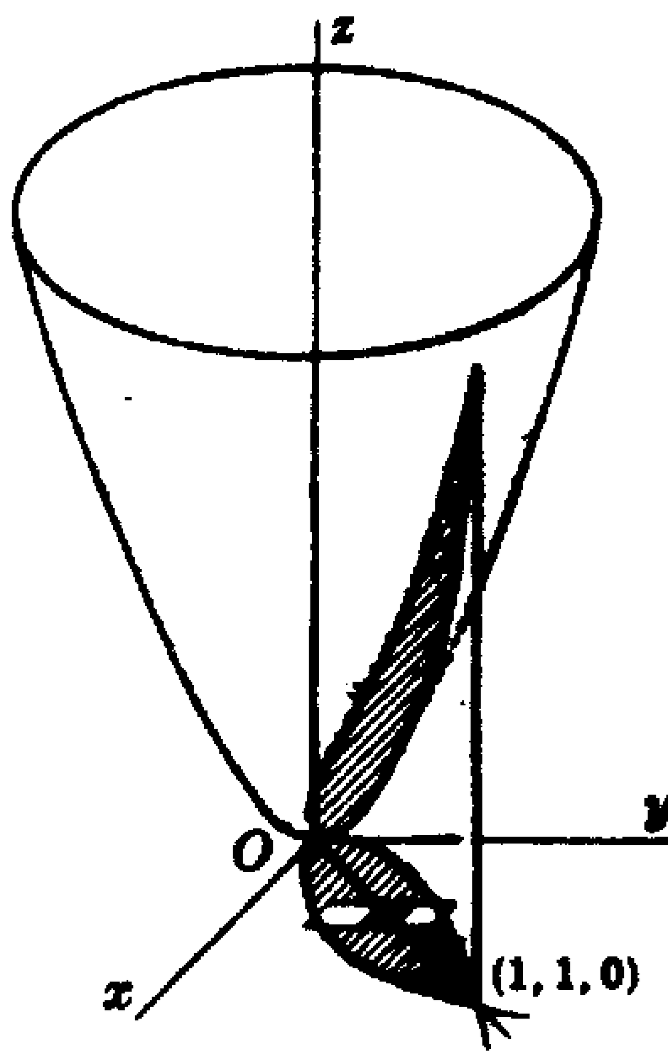
مســـائل محلولة

١ – احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ وبين المستويين $z = 0$ ، $z = x + y + 2$.

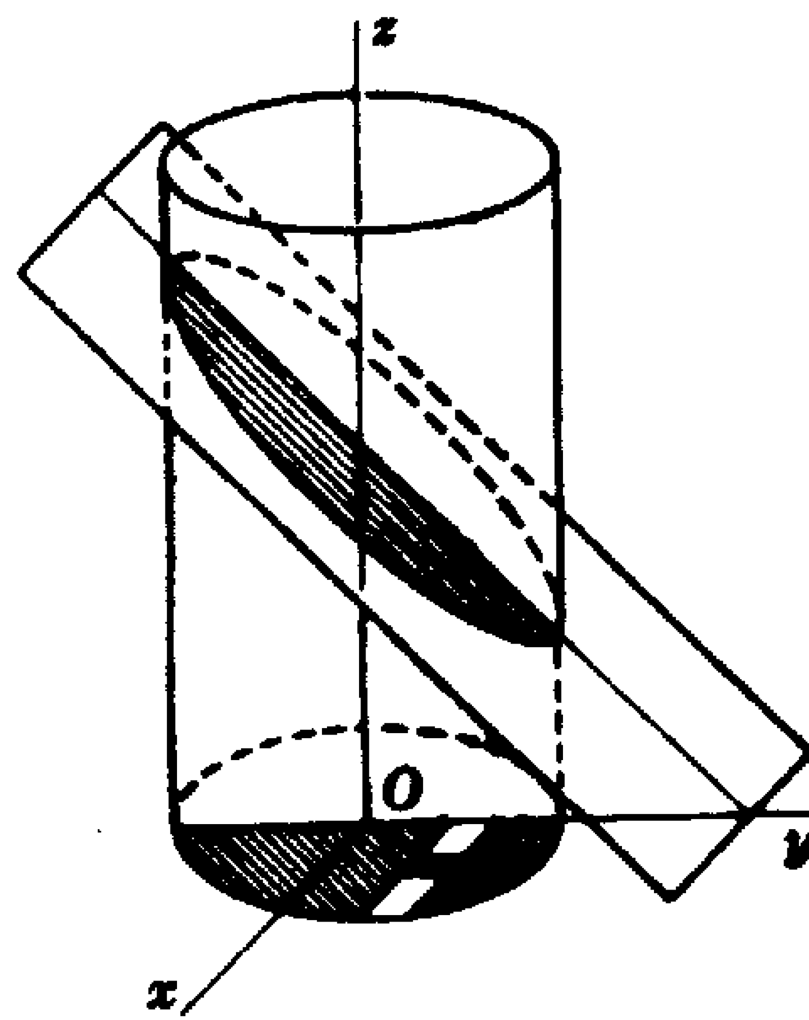
يتضح من الشكل ٦٥ – ١ أنه ينبغى تكامل $z = x + y + 2$ على ربع الدائرة $x^2 + y^2 = 16$ فى المستوى xOy لذلك فإن :

$$V = \iint_R z\, dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x + y + 2)\, dy\, dx = \int_0^4 \left(x\sqrt{16 - x^2} + 8 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16 - x^2}\right) dx$$

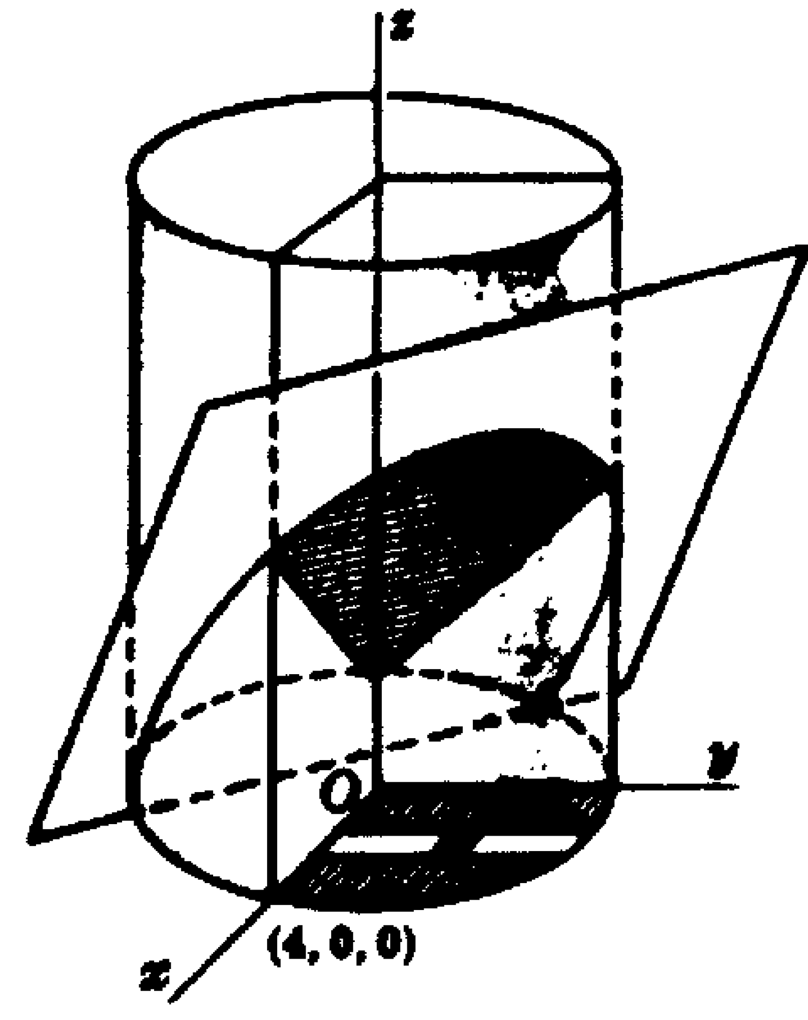
$$= \left[-\frac{1}{3}(16 - x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16 - x^2} + 16 \arcsin \frac{1}{4} x\right]_0^4 = \left(\frac{128}{3} + 8\pi\right) \text{ cubic units}$$



شكل ٦٥ – ٣



شكل ٦٥ – ٢



شكل ٦٥ – ١

٢ – أوجد الحجم المحدود بالاسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ والمستويين $y + z = 4$ و $z = 0$.

يتضح من الشكل ٦٥ – ٢ أنه ينبغى تكامل $z = 4 - y$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ فى المستوى xOy وبالتالى فإن :

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx\, dy = 2\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\, dx\, dy = 16\pi \text{ cubic units}$$

٣ – أوجد الحجم المحدود من أعلاه بمجسم القطع المكافئ $z = x^2 + 4y^2$ ومن أسفل بالمستوى $z = 0$ ومن الجوانب بالاسطوانتين $x^2 = y,\ y^2 = x$ انظر الشكل ٦٥ – ٣ .

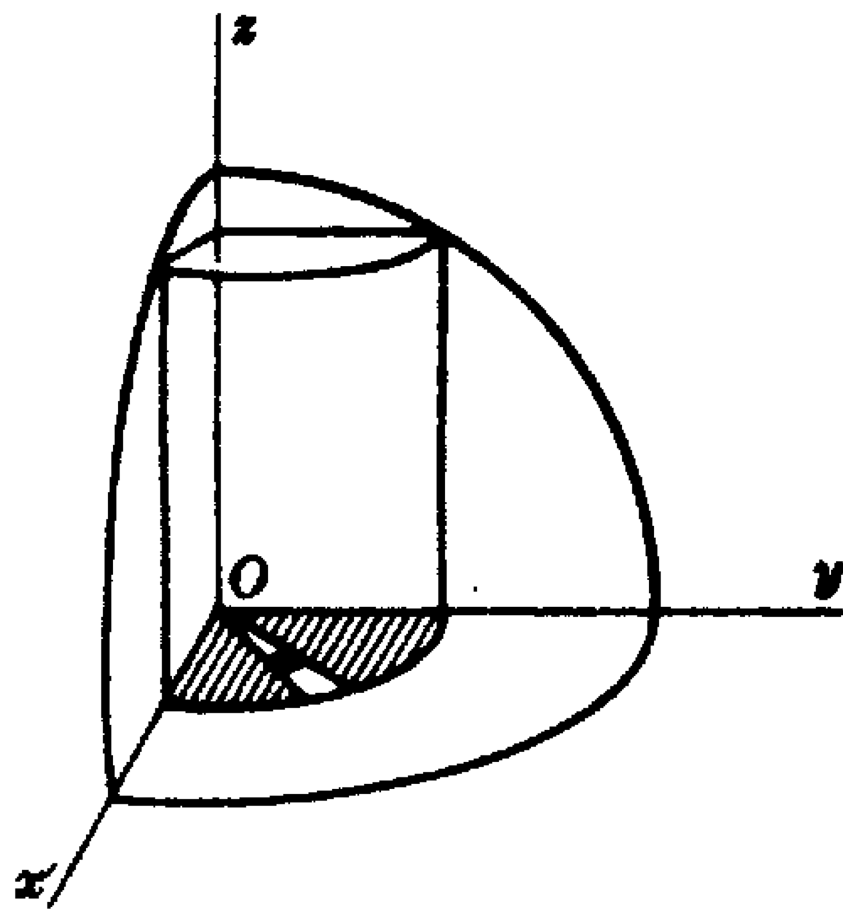
نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = x^2 + 4y^2$ على المنطقة R الواقعة بين القطعين المكافئين $x^2 = y.\ y^2 = x$ فى المستوى xOy وبالتالى فإن :

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{4}{3} y^3 \right)\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{7} \text{ cubic units}$$

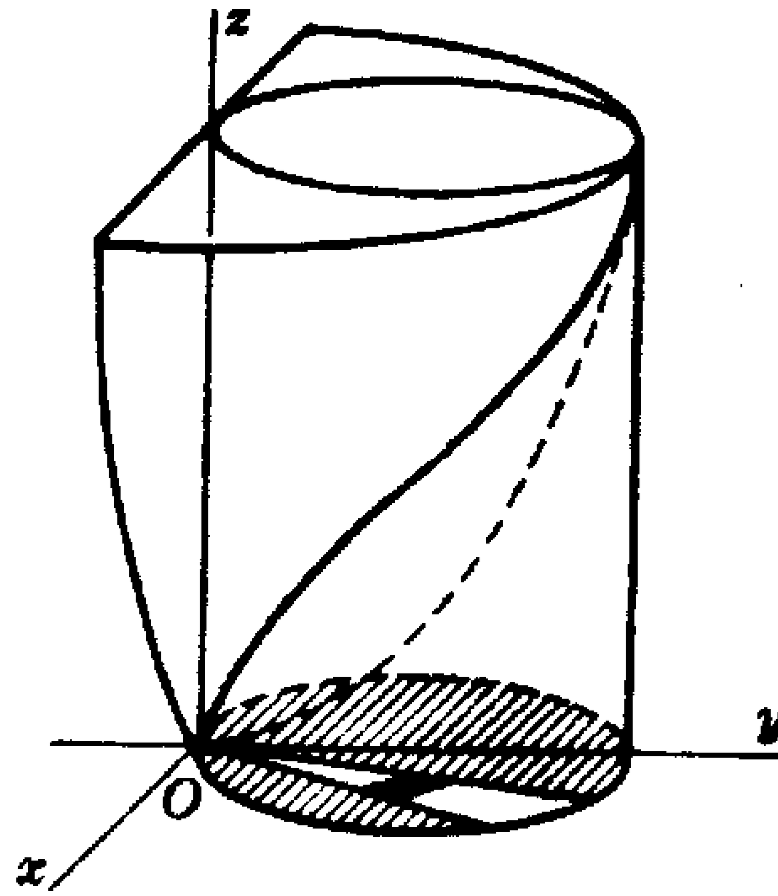
٤ – احسب حجم أحد القسمين المقتطعين من الاسطوانة $4x^2 + y^2 = a^2$ بالمستويين $z = 0$ ، $z = my$ (انظر الشكل ٦٥ – ٤) .

نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = my$ على نصف القطع الناقص $4x^2 + y^2 = a^2$ ولذلك فإن

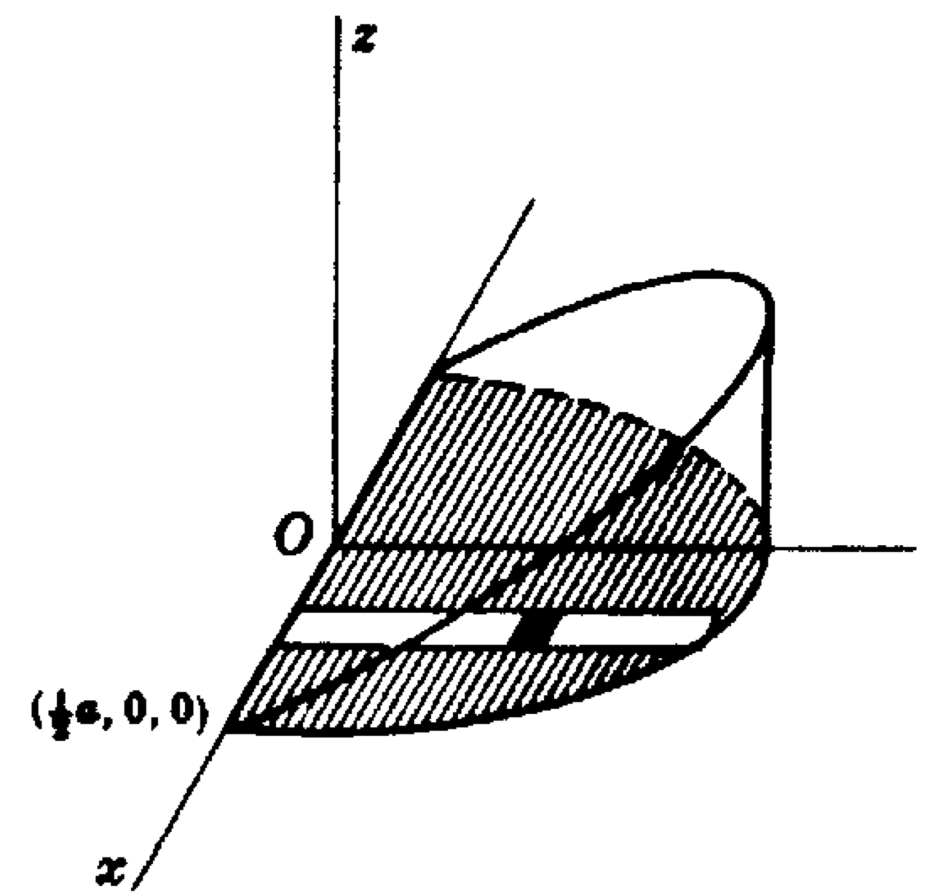
$$V = 2\int_0^{a/2} \int_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} my\, dy\, dx = m\int_0^{a/2} y^2 \Big]_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} dx = \frac{ma^3}{3} \text{ cubic units}$$



شكل ٦٥ – ٦



شكل ٦٥ – ٥



شكل ٦٥ – ٤

٥ – احسب الحجم بين مجسم القطع المكافئ $x^2 + y^2 = 4z$ والاسطوانة $x^2 + y^2 = 8y$ والمستوى $z = 0$ انظر الشكل ٦٥ – ٥ .

نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 8y$ وإذا استخدمنا الاحداثيات القطبية فإننا نحصل على الحجم المطلوب بتكامل $z = \frac{1}{4}\rho^2$ على الدائرة $\rho = 8\sin\theta$ إذن :

$$V = \iint_R z\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{8\sin\theta} z\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{\pi} \rho^4 \Big]_0^{8\sin\theta} d\theta = 256\int_0^{\pi} \sin^4\theta\, d\theta = 96\pi \text{ cubic units}$$

٦ – احسب الحجم الذى نزيله من كرة نصف قطرها $2a$ إذا حفرنا بها ثقبا يجتاز الكرة نصف قطره a وينطبق على أحد أقطار الكرة (انظر الشكل ٦٥ – ٦)

يبدو من الشكل أن الحجم المطلوب هو ثماني مرات قدر الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحصور بين الاسطوانة $\rho^2 = a^2$ والكرة $\rho^2 + z^2 = 4a^2$ والمستوى $z = 0$ ونحصل على الحجم الاخير بتكامل $z = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$ على ربع الدائرة $\rho = a$ وبالتالى فإن :

$$V = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^a \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(8a^3 - 3\sqrt{3}\,a^3)\,d\theta = \frac{4}{3}(8-3\sqrt{3})a^3\pi \text{ cubic units}$$

مسائل اضافية

٧ – احسب الحجم الذى يقطعه المستوى $z = 0$ من $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ ج : 3π cubic units .

٨ – احسب الحجم الواقع تحت المستوى $z = 3x$ وفوق السطح الواقع فى الربع الأول والمحدد بـ $x = 0$ ، $y = 0$ ، $x = 4$ ، $x^2 + y^2 = 25$

ج : 98 cubic units .

٩ – احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد بـ $x^2 + z = 9,\ 3x + 4y = 24,\ x = 0,\ y = 0,$ و $z = 0.$

ج : 1485/16 cubic units .

١٠ – احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد $x = 4$ ، $y = x$ ، $xy = 4z$ ج : 8 cubic units .

١١ – احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد $x^2 + y^2 = 25$ و $z = y$ ج 125/3 cubic units .

١٢ – احسب الحجم المشترك بين اسطوانتين $x^2 + z^2 = 16$ و $x^2 + y^2 = 16$ ج : 1024/3 cubic units .

١٣ – احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول داخل $y^2 + z^2 = 9$ وخارج $y^2 = 3x$ ج : $27\pi/16$ cubic units .

١٤ – احسب الحجم الواقع فى الثمن الأول والمحدد $x^2 + z^2 = 16$ و $x - y = 0$ ج : 64/3 cubic units .

١٥ – احسب الحجم المشترك بين $y^2 + z^2 = 4$ و $y^2 + z^2 + 2x = 16$ والواقع أمام المستوى $x = 0$

ج : 28π cubic units .

١٦ – احسب الحجم الواقع داخل $\rho = 2$ وخارج المخروط $z^2 = \rho^2$ ج : $32\pi/3$ cubic units .

١٧ – احسب الحجم الواقع داخل $y^2 + z^2 = 2$ وخارج $x^2 - y^2 - z^2 = 2$.

ج : $8\pi(4 - \sqrt{2})/3$ cubic units

١٨ – احسب الحجم المشترك بين $\rho^2 + z^2 = a^2$ و $\rho = a\sin\theta$ ج : $2(3\pi - 4)a^3/9$ cubic units .

١٩ - احسب الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ والمحدد من أسفل بـ $x^2+y^2+4z = 16$ ج : $81\pi/8$ cubic units .

٢٠ – احسب الحجم الذى يقطعه المستوى $z - y = 2$ من جسم القطع المكافئ $4x^2 + y^2 = 4z$.

ج : 9π cubic units .

٢١ – احسب الحجم الناتج عن دوران منحنى القلب $\rho = 2(1 - \cos\theta)$ وحول المحور القطبي

ج : $V = 2\pi \iint y\,\rho\, d\rho\, d\theta = 64\pi/3$ cu. un.

٢٢ – احسب الحجم الناتج عن دوران إحدى أوراق الزهرة: $\rho = \sin 2\theta$ حول أحد المحاور

ج : $32\pi/105$ cubic units .

٢٣ – حفر ثقب مربع طول ضلعه 2 units بشكل متناظر مجتازا كرة نصف قطرها 2 units ، بين أن الحجم المقطوع هو :

ج : $\frac{4}{3}(2\sqrt{2} + 19\pi - 54 \text{ Arc tan } \sqrt{2})$ cubic units

الفصل السادس والستون

مساحة سطح منحنى

التكامل الثنائي

عند حساب طول قوس (١) أسقطنا القوس على محور احداثى مناسب محددين بذلك فترة على المحور ، (٢) كاملنا الدالة $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ على هذه الفترة إذا كان الإسقاط على المحور x أو الدالة $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ إذا كان الإسقاط على المحور y .

ويمكن بطريقة مماثلة حساب المساحة S لقطعة R' من سطح $z = f(x, y)$

(١) نسقط R' على مستو احداثى مناسب محددين بذلك منطقة R على هذا المستوى .

(٢) تكامل دالة تكامل على R

فإذا أسقطنا R' على xOy فإن

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA.$$

وإذا أسقطنا R' على yOz فإن

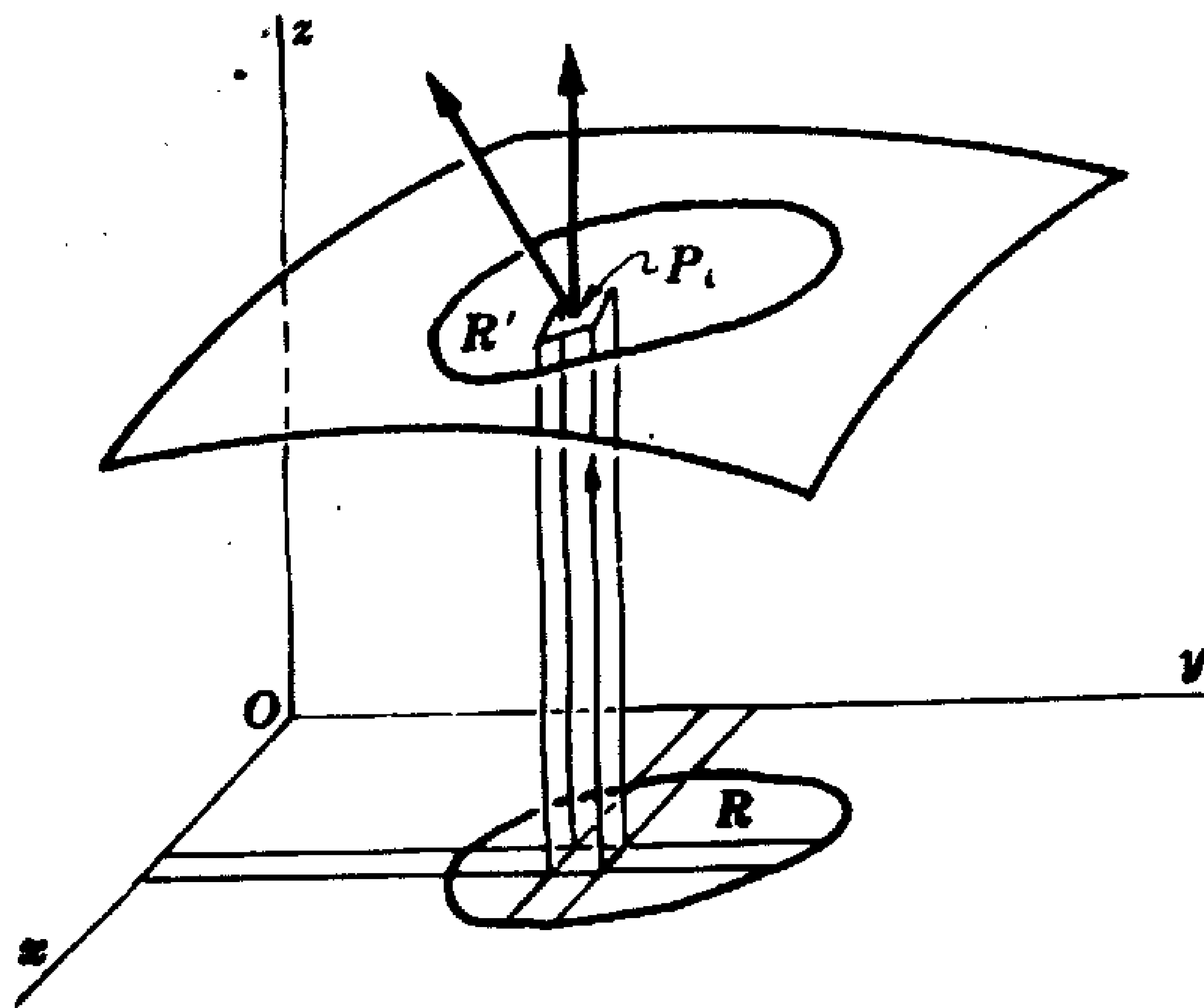
$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA.$$

أما إذا أسقطنا R' على zOx فإن

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA.$$

مسائل محلولة

١ – لننظر فى منطقة R' مساحتها S من السطح $z = f(x, y)$. لنمرر بحدود R' اسطوانة رأسية (انظر الشكل ٦٦ – ١) فتقطع المستوى xOy محددة المنطقة R . لتقسم الآن R إلى n منطقة جزئية ΔA_i (مساحاتها ΔA_i) ولنرمز بـ ΔS_i لمساحة مسقط ΔA_i على R' . لنختر فى كل منطقة جزئية ΔS_i نقطة P_i ولنرسم هناك المستوى المماس للسطح ونرمز لمساحة مسقط ΔA_i على المستوى المماس بـ ΔT_i نستخدم ΔT_i كتقريب لمساحة السطح المقابلة لـ ΔS_i .



شكل ٦٦ — ١

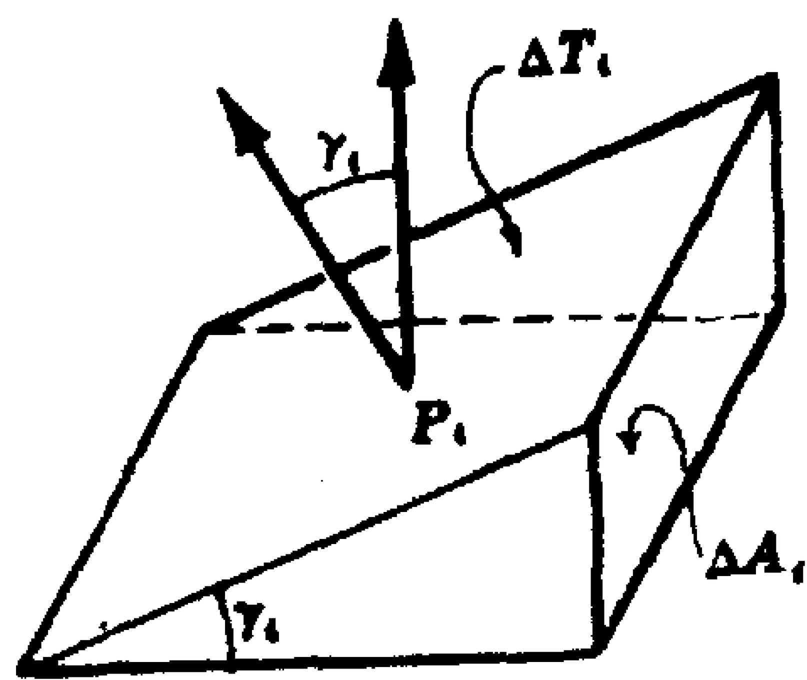
لننظر بعد ذلك فى الزاوية بين المستوى xOy

والمستوى المماس عند P_i إن هذه الزاوية تساوى الزاوية γ_i بين المحور z [0,0,1] والعمود :

$\left[-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right] = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right]$، على السطح عند P_i ومنه

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

إذن (انظر الشكل ٦٦ – ٢)



شكل ٦٦ — ٢

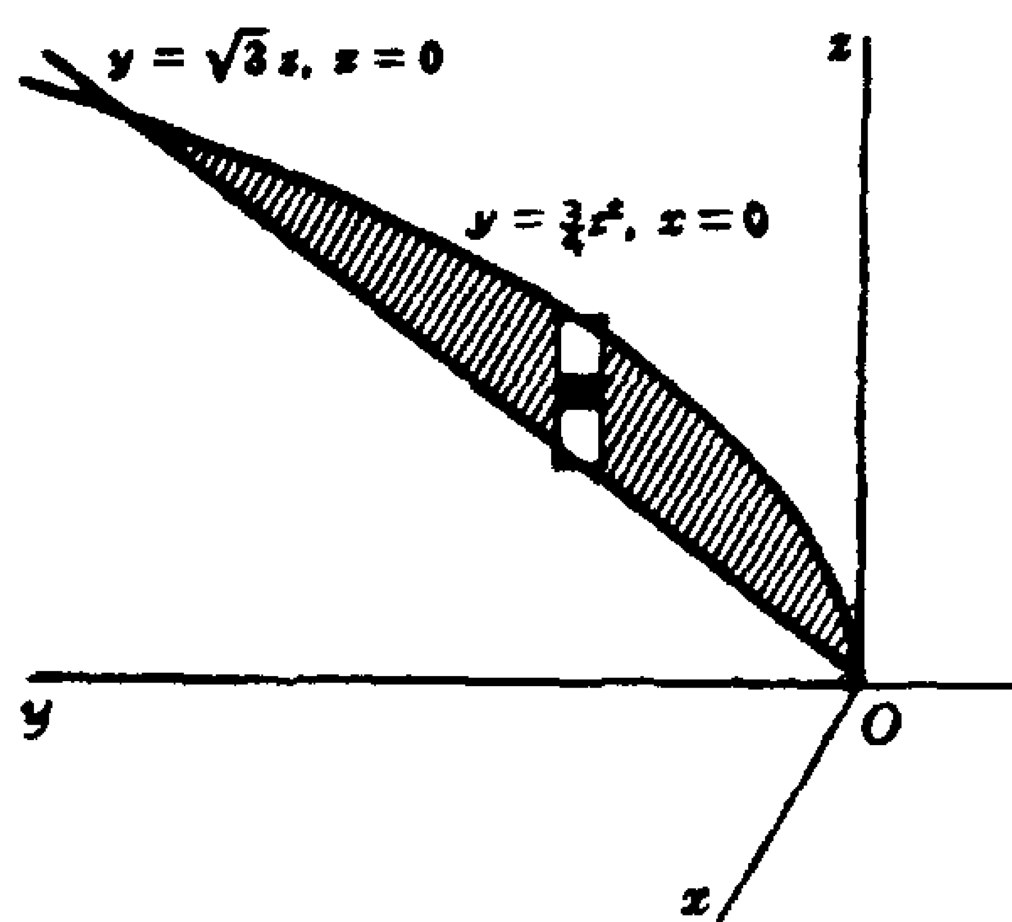
$$\Delta T_i \cdot \cos\gamma_i = \Delta A_i \quad \text{و} \quad \Delta T_i = \sec\gamma_i \cdot \Delta A_i$$

وبالتالى فإن $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sec\gamma_i \cdot \Delta A_i$، تعطينا تقريبا لـ S ومنه :

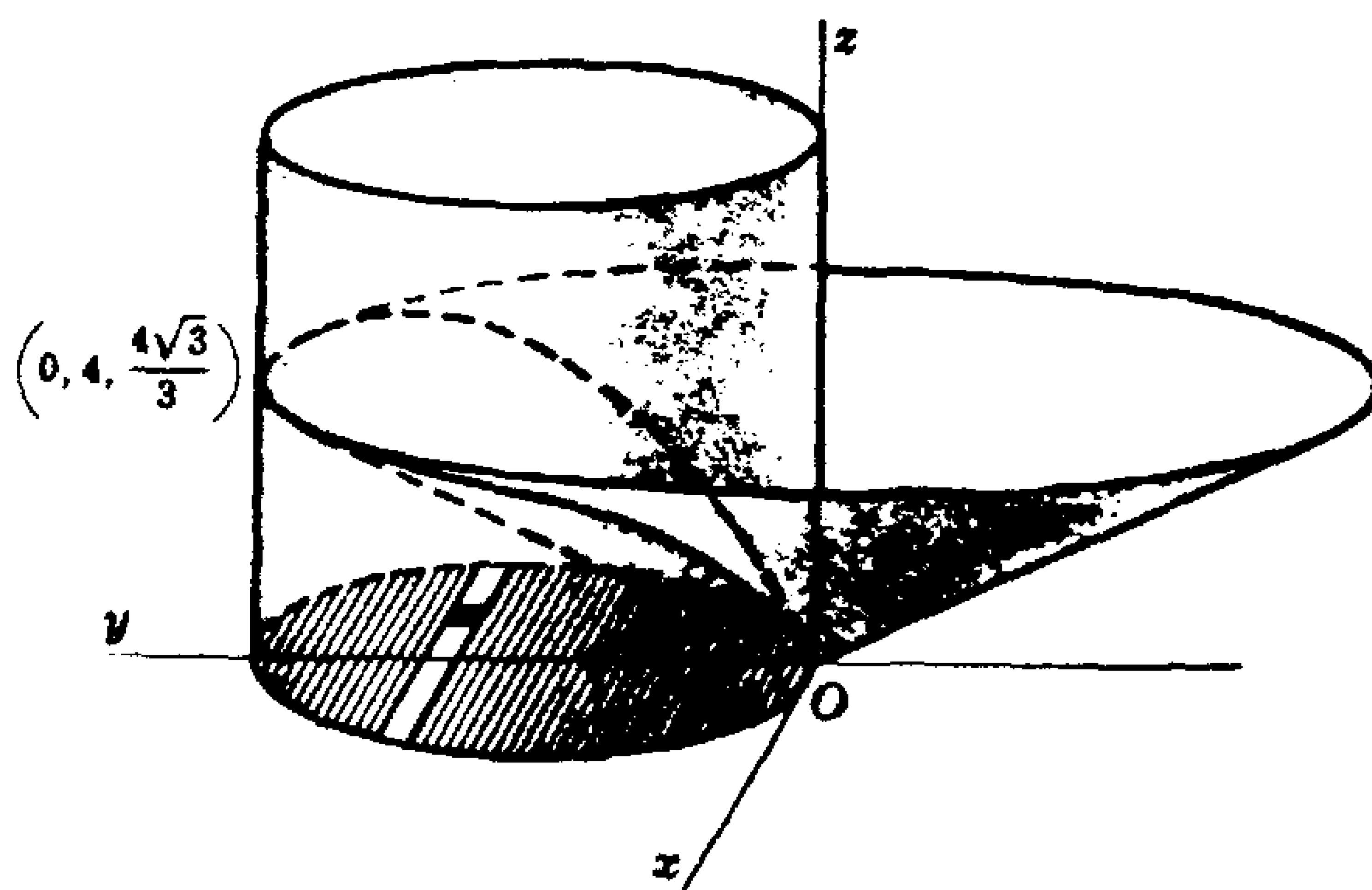
$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \sec\gamma_i \cdot \Delta A_i = \iint_R \sec\gamma \cdot dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

٢ – احسب مساحة قطعة المخروط $x^2 + y^2 = 3z^2$ الواقعة فوق المستوى xOy وداخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 4y$



شكل ٦٦ — ٤



شكل ٦٦ — ٣

حل أول : انظر إلى الشكل ٦٦ – ٣ إن مسقط قطعة السطح المفروضة على المستوى xOy هو المنطقة R المحاطة بالدائرة $x^2 + y^2 = 4y$ للمخروط يكون .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}\cdot\frac{y}{z},\quad \text{and}\quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2} = \frac{12z^2}{9z^2} = \frac{4}{3}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx\, dy = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ square units}$$

حل ثان : انظر إلى الشكل ٦٦ – ٤ إن مسقط نصف قطعة السطح المفروضة على المستوى yOz هو المنطقة R المحددة بالمستقيم $y = \sqrt{3}\,z$ والقطع المكافئ $y = 3/4z^2$ حيث حصلنا على المنحنى الأخير بحذف x من معادلتى السطحين . للمخروط يكون :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3z}{x}. \quad \text{و} \quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{3z^2 - y^2}$$

وبالتالى :

$$S = 2\int_0^4 \int_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}\,z}{\sqrt{3z^2-y^2}}\,dz\,dy = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 \sqrt{3z^2-y^2}\Big]_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} dy = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 \sqrt{4y-y^2}\,dy$$

حل ثالث : باستخدام الاحداثيات الاسطوانية فى الحل الأول نجد أنه ينبغى تكامل $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

على المنطقة R المحاطة بالدائرة $\rho = 4\sin\theta$ ومنه :

$$S = \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}}\,dA = \int_0^\pi \int_0^{4\sin\theta} \frac{2}{\sqrt{3}}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\pi \rho^2\Big]_0^{4\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}}\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ square units}$$

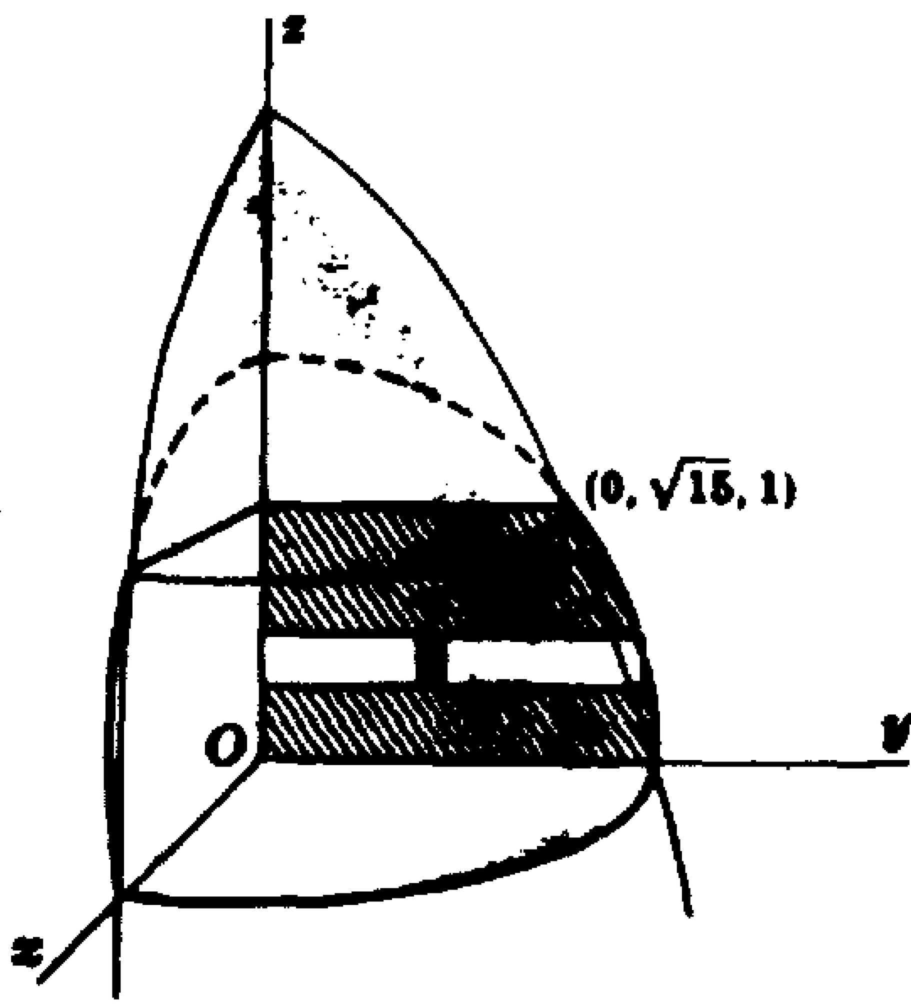
٣ — احسب مساحة قطعة الاسطوانة $x^2+z^2=16$ الواقعة داخل الاسطوانة $x^2+y^2=16$.

يوضح الشكل ٦٦ — ٥ ثمن القطعة المطلوب حساب مساحتها . إن مسقط هذه القطعة على المستوى xOy هو ربع الدائرة $x^2+y^2=16$ للاسطوانة $x^2+z^2=16$ يكون :

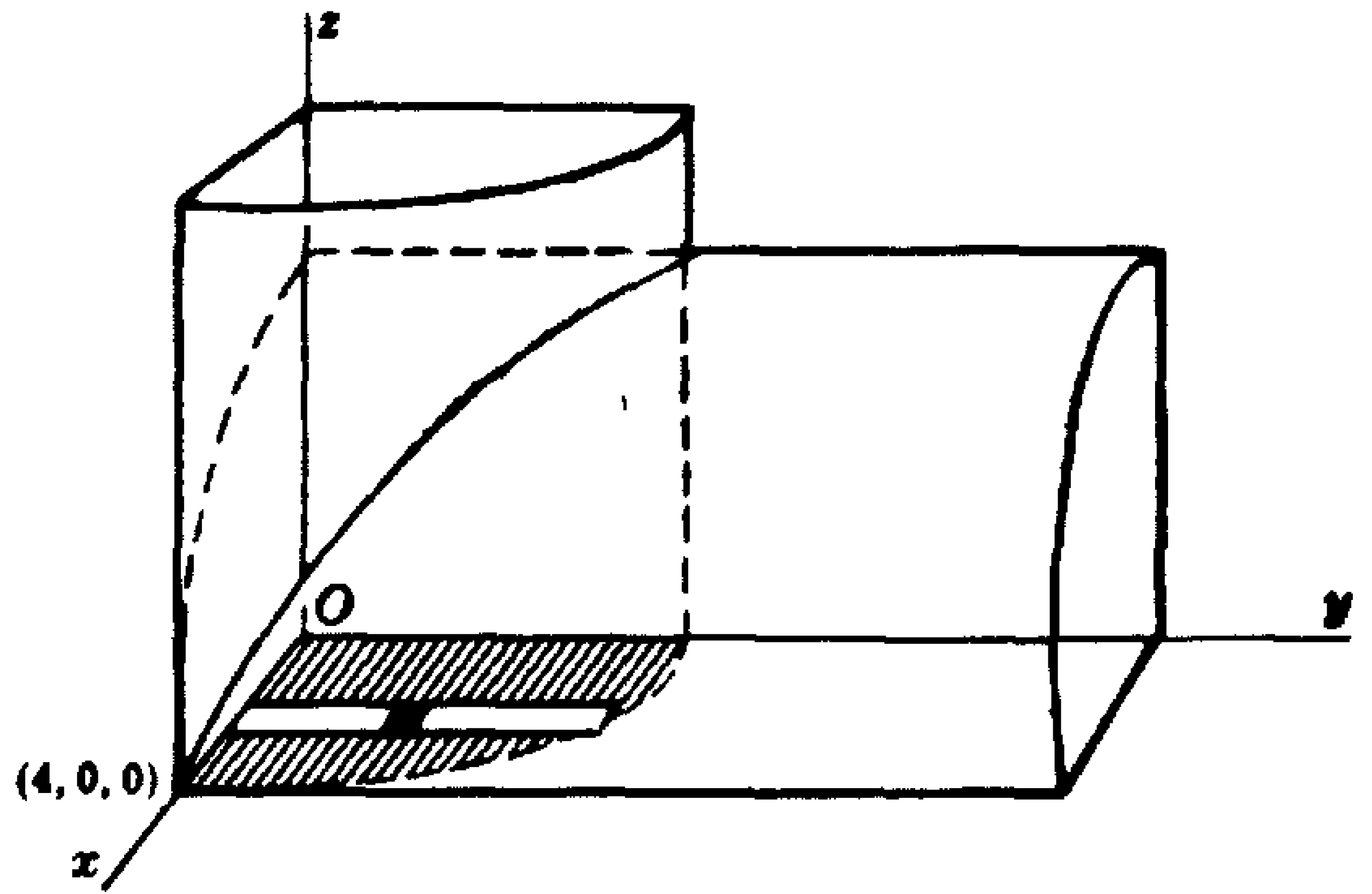
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{و} \quad 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+z^2}{z^2} = \frac{16}{16-x^2}$$

ومنه :

$$S = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\,dy\,dx = 32\int_0^4 dx = 128 \text{ square units}$$



شكل ٦٦ — ٦



شكل ٦٦ — ٥

٤ — احسب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=16$ الواقعة خارج مجسم القطع المكافىء $x^2+y^2+z=16$.

يوضح الشكل ٦٦ — ٦ ربع قطعة السطح المطلوب حساب مساحتها إن مسقط هذه القطعة على المستوى yOz هو المنطقة R المحددة بالدائرة $y^2+z^2=16$ والمحورين y و z والمستقيم $z=1$. للكرة يكون :

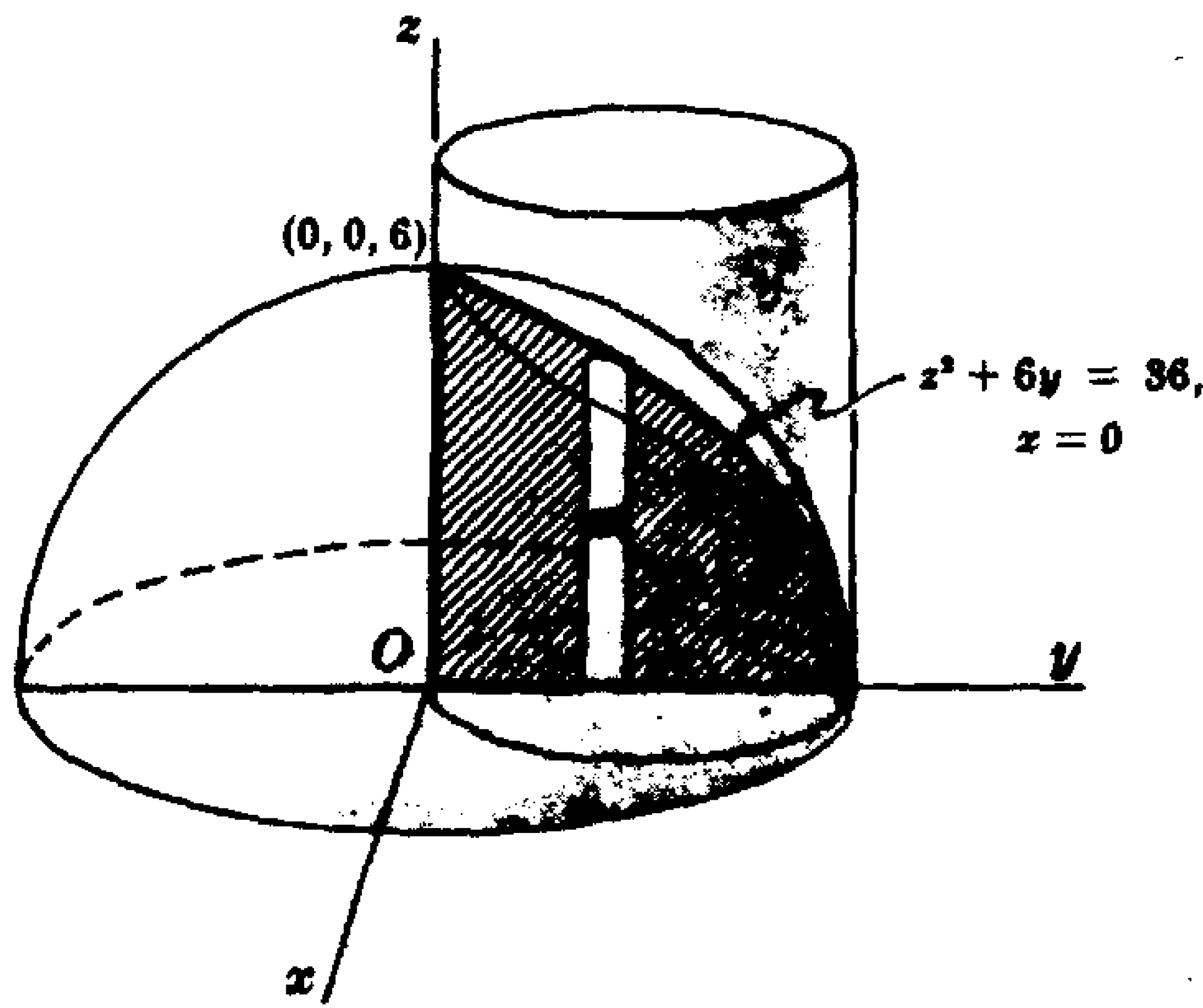
$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x}, \quad \text{و} \quad 1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2} = \frac{16}{16-y^2-z^2}$$

ومنه :

$$S = 4\iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dA = 4\int_0^1\int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{4}{\sqrt{16-y^2-z^2}}\,dy\,dz$$

$$= 16\int_0^1 \arcsin\frac{y}{\sqrt{16-z^2}}\Big]_0^{\sqrt{16-z^2}} dz = 16\int_0^1 \frac{1}{2}\pi\,dz = 8\pi \text{ square units}$$

٥ ــ احسب مساحة قطعة الاسطوانة $x^2+y^2=6y$ الواقعة داخل الكرة $x^2+y^2+z^2=36$.



شكل ٦٦ ــ ٧

يوضح الشكل ٦٦ ــ ٧ ربع قطعة السطح المطلوب حساب مساحتها . إن مسقط هذه القطعة على المستوى yOz هو المنطقة R المحددة بالمحورين z و x والقطع المكافئ $z^2+6y=36$. ولقد حصلنا على هذا المنحنى الأخير بحذف x من معادلتى السطحين . للاسطوانة يكون :

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3-y}{x},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

$$1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+9-6y+y^2}{x^2} = \frac{9}{6y-y^2}$$

$$S = 4\int_0^6\int_0^{\sqrt{36-6y}} \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}}\,dz\,dy$$

$$= 12\int_0^6 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{y}}\,dy = 144 \text{ square units}$$

مسائل اضافية

٦ ــ احسب مساحة قطعة المخروط $x^2+y^2=z^2$ الواقعة داخل المنشور الرأسى الذى قاعدته المثلث المحدد بالمستقيمات $y=x, x=0, y=1$ فى المستوى xOy .

ج : $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ sq. un. .

٧ ــ احسب مساحة قطعة المستوى $x+y+z=6$ الواقعة داخل الاسطوانة $x^2+y^2=4$.

ج : $4\sqrt{3}\pi$ sq. un. .

٨ ــ احسب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=36$ الواقعة داخل الاسطوانة $z^2+y^2=6y$.

ج : $72(\pi-2)$ sq. un. .

٩ ــ احسب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=4z$ الواقعة داخل مجسم القطع المكافئ $x^2+y^2=z$.

ج : 4π sq. un. .

١٠ ــ احسب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=25$ الواقعة بين المستويين $z=2$ و $z=4$.

ج : 20π sq. un. .

١١ – احسب مساحة قطعة السطح $z = xy$ الواقعة داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 1$.

ج : $2\pi(2\sqrt{2} - 1)/3$ sq. un. .

١٢ – احسب مساحة قطعة المخروط $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$ الواقعة فوق المستوى $z = 0$ وداخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 6y$.

ج : $3\sqrt{10}\pi$ sq. un. .

١٣ – احسب مساحة ذلك الجزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ الواقع داخل اسطوانة ناقصة المقطع $2x^2 + y^2 = 25$.

ج : 50π sq. un. .

١٤ – احسب مساحة قطعة السطح $x^2 + y^2 - az = 0$ الواقعة مباشرة فوق المنحنى ذو العروتين $4\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

ج : $S = \frac{4}{a}\iint \sqrt{4\rho^2 + a^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{a^2}{3}\left\{\frac{5}{3} - \frac{\pi}{4}\right\}$ sq. un.

١٦ – احسب مساحة قطعة السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ الواقعة مباشرة فوق منحنى القلب $\rho = 1 - \cos\theta$.

ج : $8[\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$ sq. un.

الفصل السابع والستون

التكاملات الثلاثية

ان التكامل الثلاثى $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV$ لدالة فى ثلاثة متغيرات مستقلة على منطقة R مكونة من النقط (x,y,z) ، لحجم V ، يكون عليه الدالة المفروضة وحيدة القيمة ، ومتصلة ، هو امتداد لمفهوم التكاملات البسيطة والثنائية .

فإذا كان $f(x,y,z)=1$ فعندئذ يمكن تفسير التكامل $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV$ على أنه قياس حجم المنطقة R .

حساب قيمة التكامل الثلاثى $\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV$ فى الاحداثيات المتعامدة .

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$
$$= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy,$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث يغطى المنطقة R .

حساب قيمة التكامل الثلاثى $\iiint\limits_R f(\rho,\theta,z)\,dV$ فى الاحداثيات الاسطوانية

$$\iiint\limits_R f(\rho,\theta,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho,\theta,z)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث تغطى المنطقة R .

حساب قيمة التكامل الثلاثى $\iiint\limits_R f(\rho,\phi,\theta)\,dV$ فى الاحداثيات الكرويه :

$$\iiint\limits_R f(\rho,\phi,\theta)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

على أن نختار حدود التكامل بحيث تغطى المنطقة R .

المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية : يحقق المركز المتوسط $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ لحجم ما العلاقات

$$\bar{x} \iiint_R dV = \iiint_R x\, dV, \quad \bar{y} \iiint_R dV = \iiint_R y\, dV,$$
$$\bar{z} \iiint_R dV = \iiint_R z\, dV$$

وأما عزوم التصور الذاتية لحجم بالنسبة للمحاور الاحداثية فهي :

$$I_x = \iiint_R (y^2+z^2)\, dV, \quad I_y = \iiint_R (z^2+x^2)\, dV,$$
$$I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\, dV$$

مسائل محلولة

١ – لننظر فى الدالة $f(x, y, z)$ المتصلة فى منطقة R من الفراغ العادى . لنشطر R بالمستويات $x = \xi_i$ و $y = \eta_j$ كما فى الفصل ٦٣ ، ولنتابع شطر المناطق الجزئية التى حصلنا عليها بالمستويات $z = \xi_k$. تجزئ هذه الطريقة المنطقة R إلى عدد من متوازيات المستطيلات حجومها $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k$ وإلى عدد من متوازيات المستطيلات الناقصة التى سنهملها . لنختر فى كل متوازى مستطيلات كامل نقطة $P_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$ ونحسب عندها $f(x_i, y_j, z_k)$ ثم نشكل المجموع :

$$\sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot \Delta V_{ijk} = \sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta x_i\, \Delta y_j\, \Delta z_k \qquad (\text{i})$$

يعرف التكامل الثلاثى لـ $f(x, y, z)$ على المنطقة R على أنه نهاية (i) عندما يزداد عدد متوازيات المستطيلات إلى ما لا نهاية بحيث تئول أبعاد كل منها إلى الصفر ويمكن عند حساب هذه النهاية أن نجمع أولا على كل مجموعة متوازيات المستطيلات التى تشترك فى $\Delta_i x$ و $\Delta_j y$ لقيم ثابتة لـ i و j ثم نبحث عن النهاية $\Delta_k z \to 0$ فينتج

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_j, z_k)\, \Delta_k z\, \Delta_i x\, \Delta_j y = \int_{z_1}^{z_2} f(x_i, y_j, z)\, dz\, \Delta_i x\, \Delta_j y$$

وهذه ليست إلا أعمدة ، المناطق الجزئية الأساسية ، التى رأيناها فى الفصل ٦٣ وبالتالى :

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty\\ p\to+\infty}} \sum_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot \Delta V_{ijk} = \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy = \iiint_R f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

٢ – احسب قيمة :

(١)

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-x} xyz\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{2-x} xyz\, dz \right\} dy \right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left\{ \frac{xyz^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=2-x} \right\} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{xy(2-x)^2}{2}\, dy \right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4} \Big|_{y=0}^{y=1-x} \right] dx = \frac{1}{4} \int_0^1 (4x - 12x^2 + 13x^3 - 6x^4 + x^5)\, dx = \frac{13}{240}$$

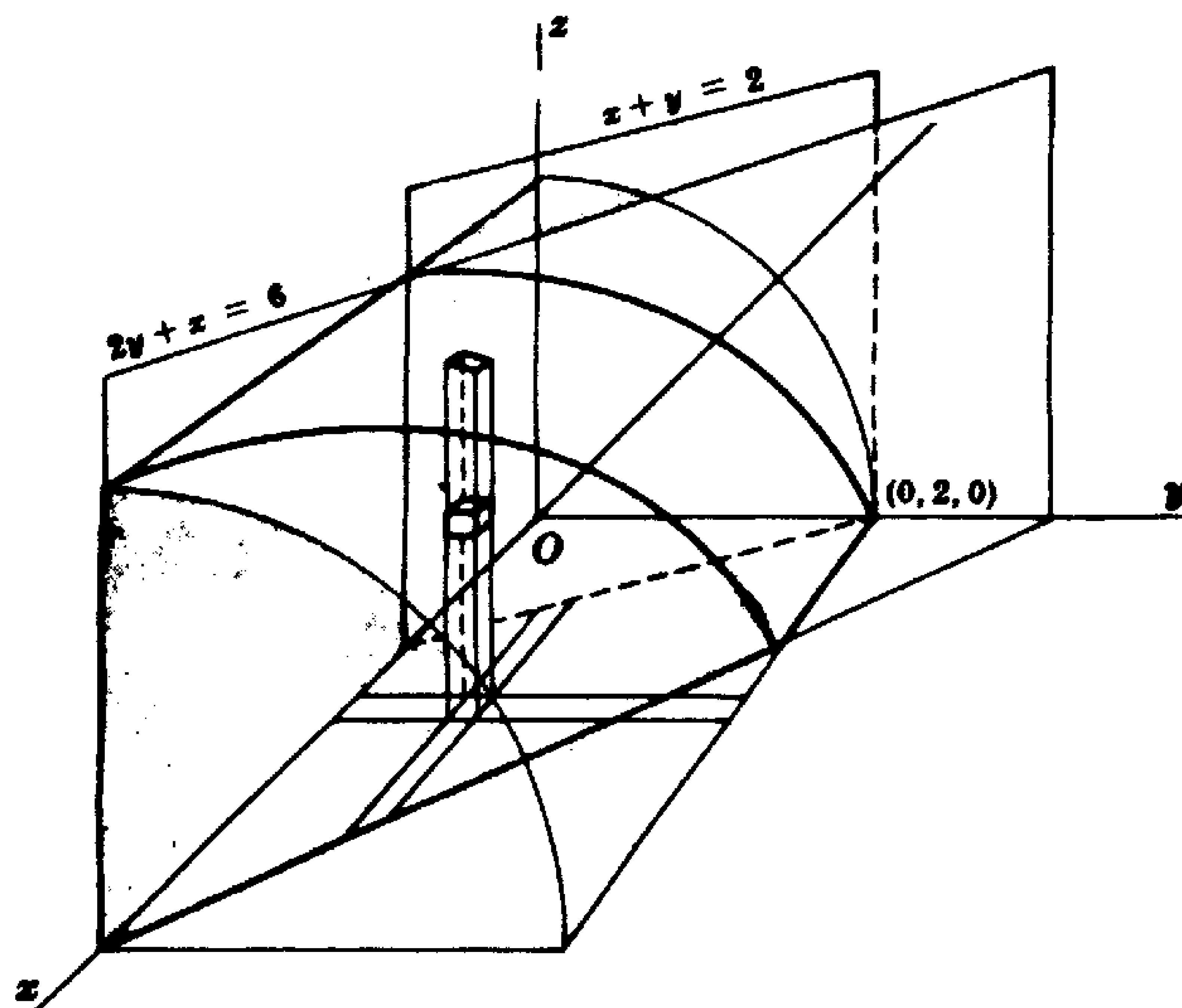
(ب)
$$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 z\rho^2 \sin\theta \, dz\, d\rho\, d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \frac{z^2}{2}\Big|_0^2 \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta \quad = \quad 2\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \rho^3\Big|_0^1 \sin\theta\, d\theta \quad = \quad -\frac{2}{3}\cos\theta\Big|_0^{\pi/2} \quad = \quad 2/3$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} \sin 2\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad = \quad 2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4} \sin\phi\, d\phi\, d\theta \quad = \quad 2\int_0^{\pi} (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\, d\theta \quad = \quad (2-\sqrt{2})\pi \text{ (جـ)}$$

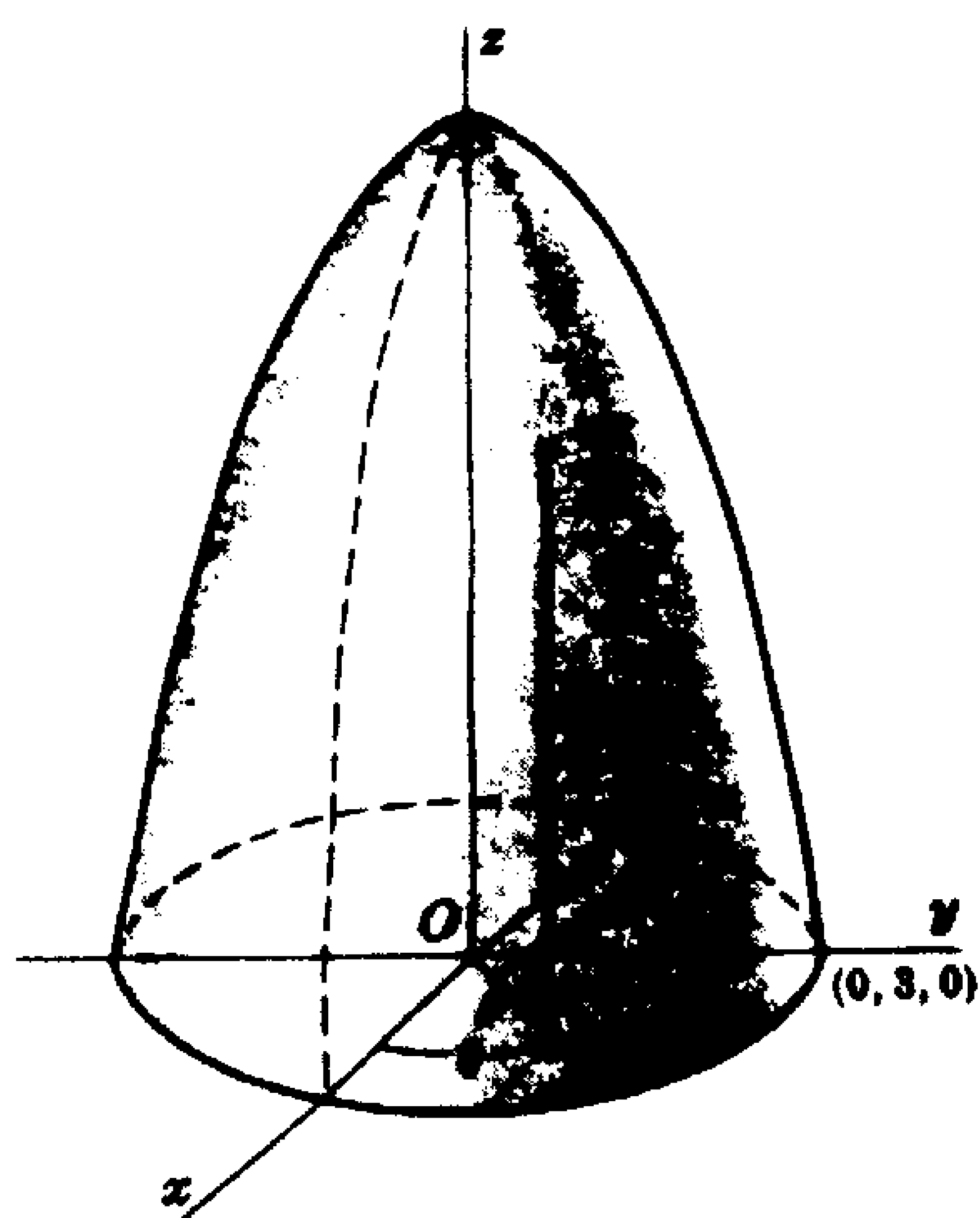
٣ – احسب قيمة التكامل الثلاثى $F(x, y, z) = z$ على منطقة R الواقعة فى الثمن الأول ومحـددة بالمستويات $y = 0$ ، $z = 0$ ، $x + y = 2$ ، $2y + x = 6$ والاسطوانة $y^2 + z^2 = 4$. انظر الشكل ٦٧ – ١ .

لنكامل أولا بالنسبة لـ z من $z = 0$ (المستوى xOy) إلى $z = \sqrt{4 - y^2}$ (الاسطوانة) ، ثم نكامل بالنسبة لـ x من $x = 2 - y$ إلى $x = 6 - 2y$ وأخيرا نكامل بالنسبة لـ y من $y = 0$ إلى $y = 2$ إذن

$$\iiint_R z\, dV \quad = \quad \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\, dz\, dx\, dy \quad = \quad \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y} (\tfrac{1}{2}z^2)\Big]_0^{\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$$
$$= \quad \frac{1}{2}\int_0^2\int_{2-y}^{6-2y} (4 - y^2)\, dx\, dy \quad = \quad \frac{1}{2}\int_0^2 (4 - y^2)x\Big]_{2-y}^{6-2y} dy \quad = \quad \frac{26}{3}$$



شكل ٦٧ — ١



شكل ٦٧ — ٢

٤ – احسب التكامل الثلاثى لـ $f(\rho, \theta, z) = \rho^2$ على المنطقة الواقعة R بين مجسم القطع المكافئ $\rho^2 = 9 - z$ والمستوى $z = 0$ انظر الشكل ٦٧ – ٢ .

لنكامل أولا بالنسبة لـ z من $z = 0$ إلى $z = 9 - \rho^2$ ثم بالنسبة لـ ρ من $\rho = 0$ إلى $\rho = 3$ وأخيرا بالنسبة لـ θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = 2\pi$ فيكون :

$$\iiint_R \rho^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{3}\int_0^{9-\rho^2} \rho^2(\rho\, dz\, d\rho\, d\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \rho^3(9-\rho^2)\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{9}{4}\rho^4 - \tfrac{1}{6}\rho^6\right)\Big]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{243}{4}\, d\theta = \frac{243}{2}\pi$$

٥ – بين أن التكاملات الثلاثية التالية تعطى نفس الحجم

(١) $4\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/4}^{4} dz\, dy\, dx,$ (ب) $4\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy\, dx\, dz,$

(ج) $4\int_0^4 \int_{y^2/4}^{4} \int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx\, dz\, dy$

(١) بالنسبة لهذا التكامل تتغير z من $z = \frac{1}{4}(x^2+y^2)$ إلى $z = 4$ ؛ والحجم محدود بمجسم القطع المكافئ $4z = x^2 + y^2$ من أسفل والمستوى $z = 4$ من أعلى . أما مدى تغير x و y فهو بحيث يغطى ربع الدائرة $x^2 + y^2 = 16$ و $z = 0$ و التي هي مسقط منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ مع المستوى $z = 4$ على المستوى xOy . وعلى هذا فإن التكامل المفروض يعطى الحجم المقتطع من مجسم القطع المكافئ بالمستوى $z = 4$.

(ب) أما فى التكامل الثانى فإن y تتغير من $y = 0$ إلى $y = \sqrt{4z - x^2}$: والحجم محدود من اليسار بالمستوى zOx ومن اليمين بمجسم القطع المكافئ $y^2 = 4z - x^2$. وأما مدى تغير x و z فهو بحيث تغطى النقطة (x و z) نصف قطعة السطح المقتطعة من القطع المكافئ $y = 0$ و $x^2 = 4z$ الذى هو منحنى تقاطع مجسم المكافئ والمستوى zOx مع المستوى $x = 4$.

وعلى هذا فالمنطقة R هى نفس المنطقة فى (١)

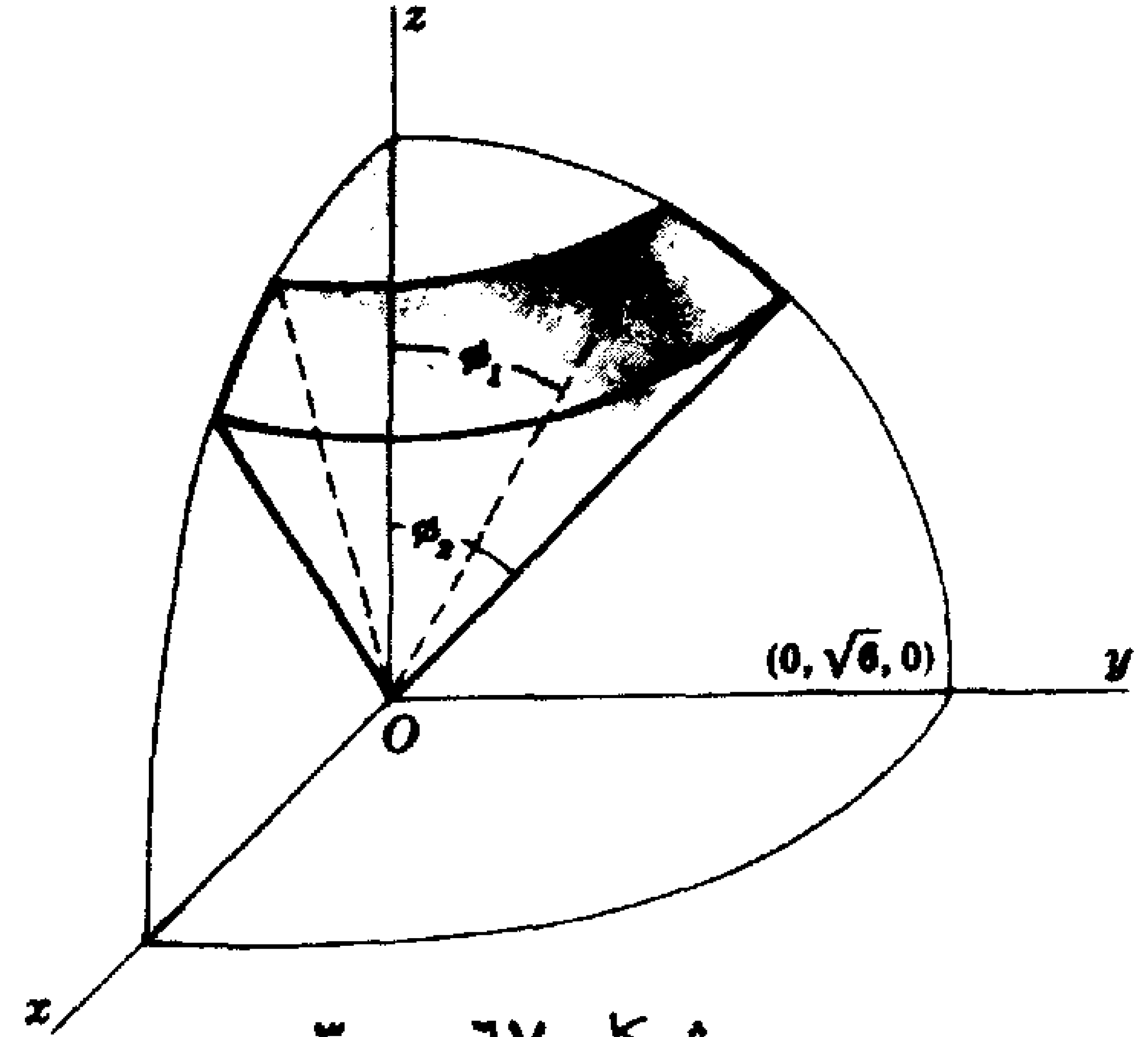
(ج) يحد الحجم فى التكامل الثالث من الخلف المستوى yOz ومن الأمام مجسم القطع المكافئ $4z = x^2 + y^2$. أما مدى تغير z و y فهو بحيث تغطى النقطة (y و z) نصف قطعة السطح المقتطعة من القطع المكافئ $x = 0$ و $y^2 = 4z$ الذى هو منحنى تقاطع مجسم القطع المكافئ والمستوى yOz مع المستوى $z = 4$. وعلى هذا فإن المنطقة R هى نفس المنطقة فى (١) .

٦ – احسب التكامل الثلاثى لـ $F(\rho, \phi, \theta) = \dfrac{1}{\rho}$ الممتد على المنطقة R الواقعة فى الثمن الأول بين المخروطين $\phi = \frac{1}{4}\pi$ و $\phi = \arctan 2$ والكرة $\rho = \sqrt{6}$. انظر الشكل ٦٧ – ٣ .

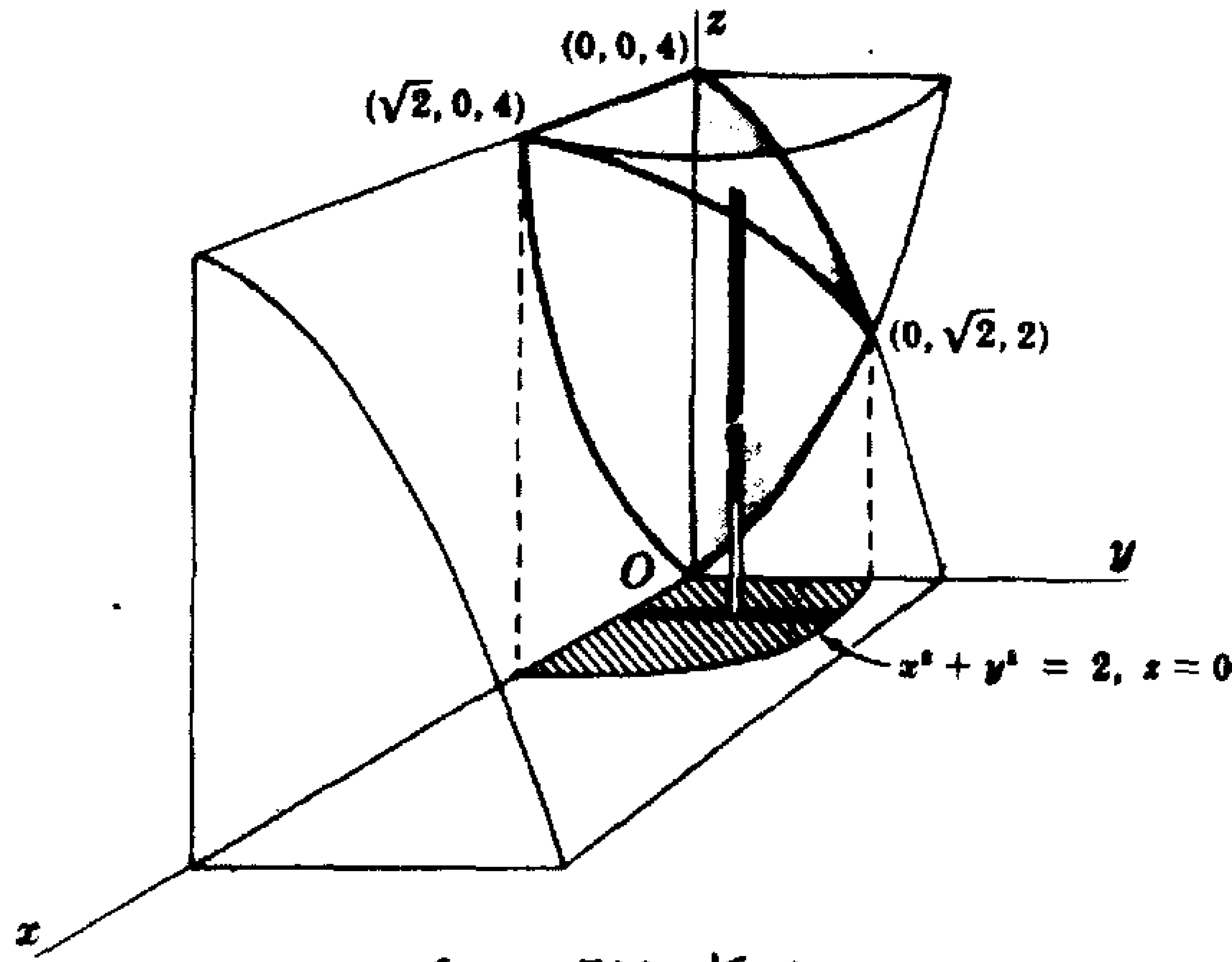
لنكامل أولا بالنسبة لـ ρ من $\rho = 0$ إلى $\rho = \sqrt{6}$ ثم بالنسبة لـ ϕ من $\phi = \frac{1}{4}\pi$ إلى $\phi = \arctan 2$ وأخيرا بالنسبة لـ θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \frac{1}{2}\pi$ فنجد :

$$\iiint_R \frac{1}{\rho}\, dV = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\arctan 2}\int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho}\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\arctan 2} \sin\phi\, d\phi\, d\theta = -3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\theta = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$



شكل ٦٧ — ٣



شكل ٦٧ — ٤

٧ — احسب الحجم الواقع بين مجسم القطع المكافئ $z = 2x^2 + y^2$ والاسطوانة $z = 4 - y^2$ انظر الشكل ٦٧ — ٤

لنكامل أولا بالنسبة لـ z من $z = 2x^2 + y^2$ إلى $z = 4 - y^2$ ثم بالنسبة لـ y من $y = 0$ إلى $y = \sqrt{2 - x^2}$ (ونحصل على $x^2 + y^2 = 2$ بحذف z من معادلتي السطحين) وأخيرا بالنسبة لـ x من $x = 0$ إلى $x = \sqrt{2}$ (نحصل على هذين الحدين بوضع $y = 0$ فى $x^2 + y^2 = 2$) فنحصل بذلك على ربع الحجم المطلوب. وهكذا فإن :

$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\,dy\,dx = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \{(4-y^2)-(2x^2+y^2)\}\,dy\,dx$$

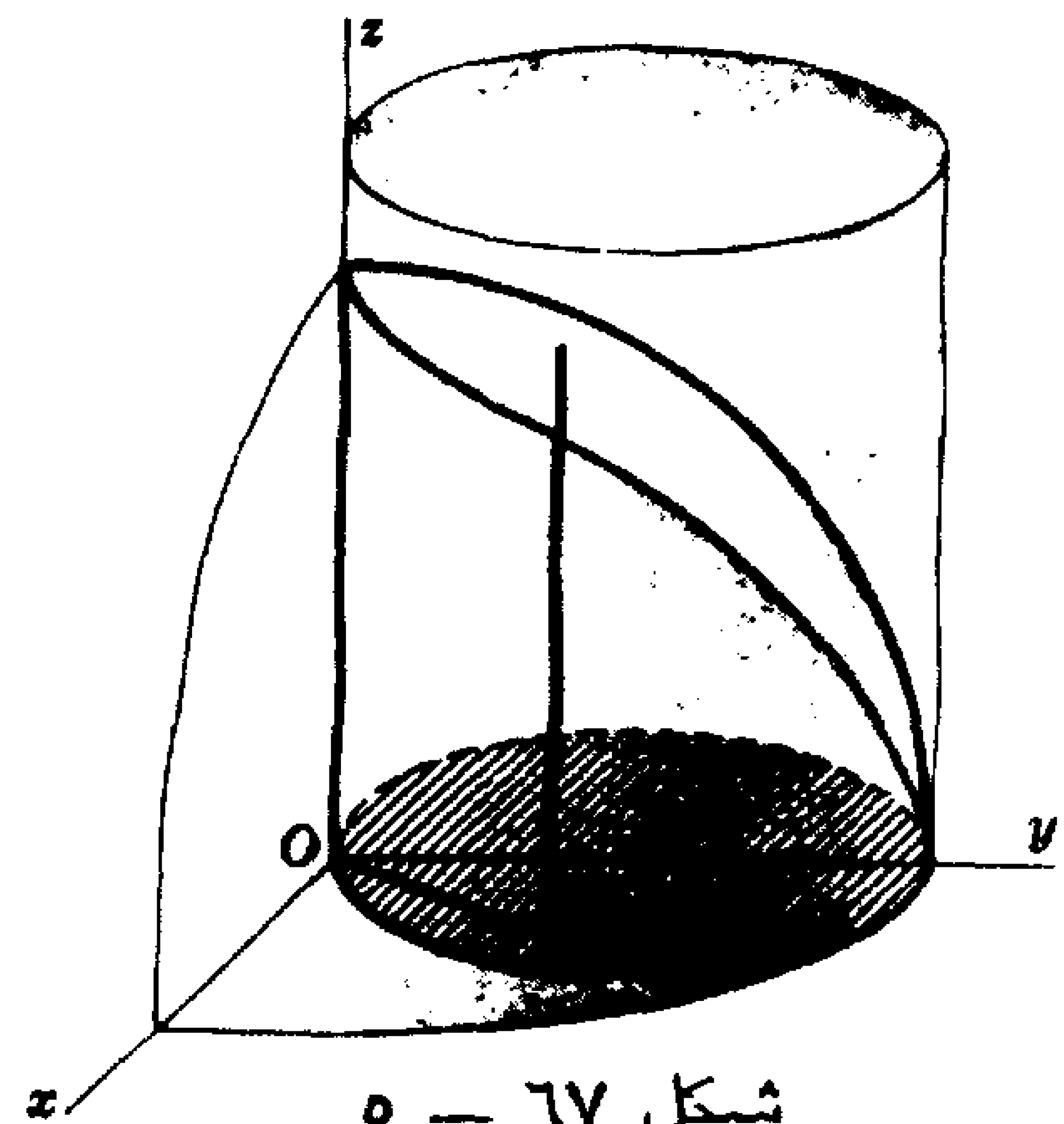
$$= 4\int_0^{\sqrt{2}}\left(4y - 2x^2y - \frac{2y^3}{3}\right)\Bigg]_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{16}{3}\int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{3/2}\,dx = 4\pi \text{ cubic units}$$

٨ — احسب الحجم داخل الاسطوانة $\rho = 4\cos\theta$ والمحدد من أعلى بالكرة $\rho^2 + z^2 = 16$ ومن أسفل بالمستوى $z = 0$ انظر الشكل ٦٧ — ٥

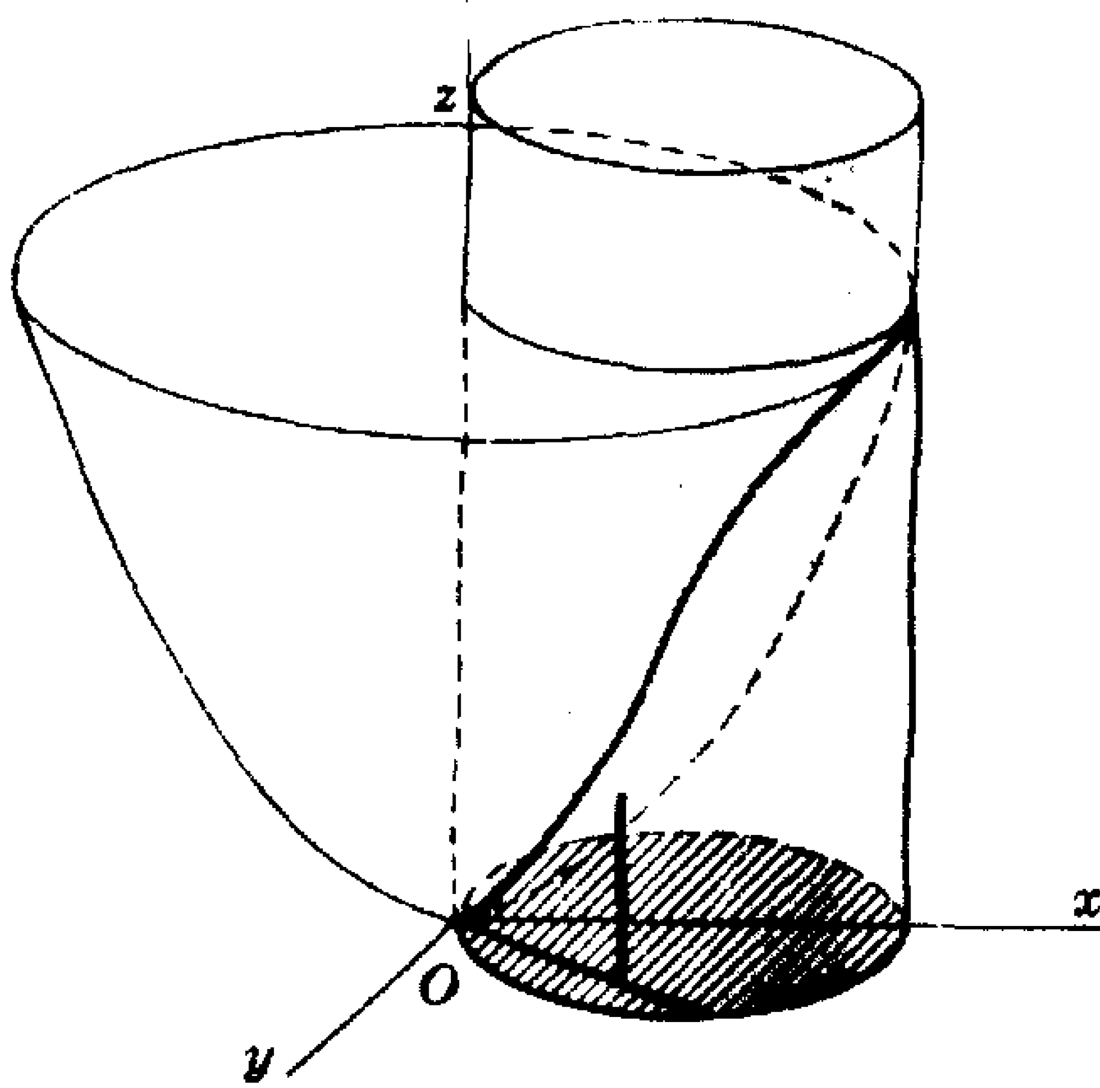
لنكامل أولا بالنسبة لـ z من $z = 0$ إلى $z = \sqrt{16 - \rho^2}$ ثم بالنسبة لـ ρ من $\rho = 0$ إلى $\rho = 4\cos\theta$ وأخيرا بالنسبة لـ θ من $\theta = 0$ إلى $\theta = \pi$ فنحصل على الحجم المطلوب . وهو :

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta}\int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta} \rho\sqrt{16-\rho^2}\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\frac{64}{3}\int_0^{\pi}(\sin^3\theta - 1)\,d\theta = \frac{64}{9}(3\pi - 4) \text{ cubic units}$$



شكل ٦٧ — ٥



شكل ٦٧ — ٦

٩ – عين المركز المتوسط الحجم الواقع داخل الاسطوانة $\rho = 2\cos\theta$ والمحدد من أعلى بمجسم القطع المكافئ $z = \rho^2$ ومن أسفل بالمستوى $z = 0$. انظر الشكل ٦٧ – ٦ .

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^4\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta = 8\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

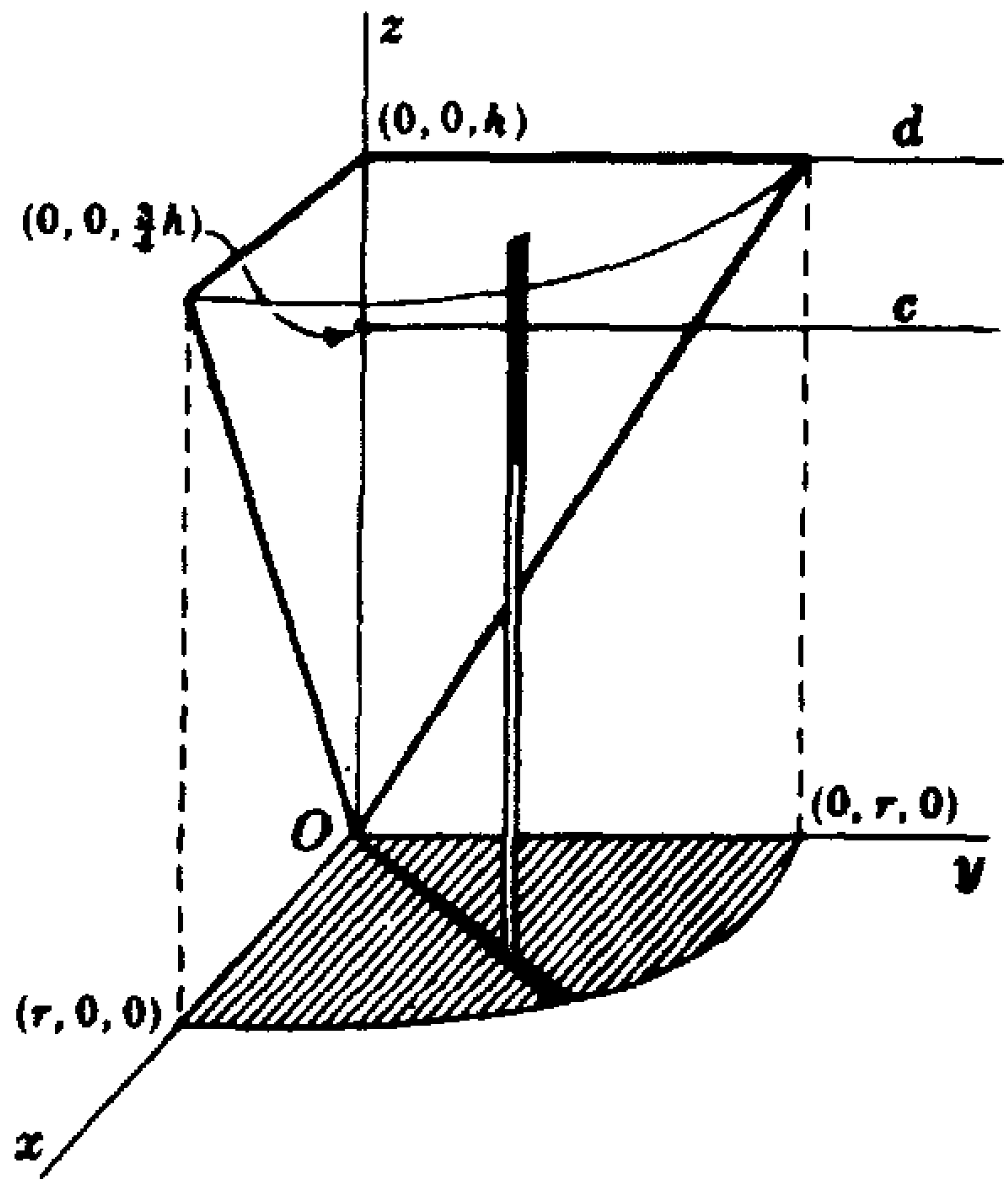
ومنه
$$M_{yz} = \iiint_R x\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\cos\theta \cdot \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^4\cos\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{64}{5}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\, d\theta = 2\pi,$$
ومنه $\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{V} = \dfrac{4}{3}$

واستنادا إلى التناظر يكون $\bar{y} = 0$ ثم إن .

$$M_{xy} = \iiint_R z\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} z \cdot \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^5\, d\rho\, d\theta$$
$$= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\, d\theta = \frac{5}{3}\pi,$$
ومنه $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{V} = \dfrac{10}{9}$

والمركز المتوسط له الإحداثيات $(4/3, 0, 10/9)$.

١٠ – لدينا مخروط دائرى قائم نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h ، أوجد (ا) مركزه المتوسط (ب) عزم قصوره الذاتى بالنسبة لمحوره (جـ) عزم قصوره الذاتى بالنسبة لأى مستقيم مار برأسه وعمودى على محوره . (د) عزم قصوره الذاتى بالنسبة لأى قطر لقاعدته .



شكل ٦٧ – ٧

لنأخذ المخروط كما فى الشكل ٦٧ – ٧ فتكون معادلته . $\rho = \dfrac{r}{h}\, z$
وبالتالى :

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\left(h\rho - \frac{h}{r}\rho^2\right) d\rho\, d\theta$$
$$= \frac{2}{3}hr^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

(ا) يقع المركز المتوسط على المحور z

$$M_{xy} = \iiint_R z\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} z\,\rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$
$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\left(h^2\rho - \frac{h^2}{r^2}\rho^3\right) d\rho\, d\theta = \frac{1}{2}h^2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{4}\pi h^2 r^2$$

ومنه $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{V} = \dfrac{3}{4}h.$ وعلى هذا يكون المركز المتوسط هو النقطة $(0, 0, \tfrac{3}{4}h)$.

(ب) $$I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^h \rho^2\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{10}\pi h r^4 = \frac{3}{10}r^2V$$

(جـ) لنأخذ المستقيم كمحور y فيكون :

$$I_y = \iiint_R (x^2+z^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^h (\rho^2\cos^2\theta+z^2)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r \left\{\left(h\rho^3-\frac{h}{r}\rho^4\right)\cos^2\theta+\frac{1}{3}\left(h^3\rho-\frac{h^3}{r^3}\rho^4\right)\right\}d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{5}\pi h r^2\left(h^2+\frac{1}{4}r^2\right) = \frac{3}{5}\left(h^2+\frac{1}{4}r^2\right)V$$

(د) ليكن المستقيم c المار بالمركز المتوسط موازيا لمحور y فيكون – استنادا إلى نظرية المستقيمات المتوازية

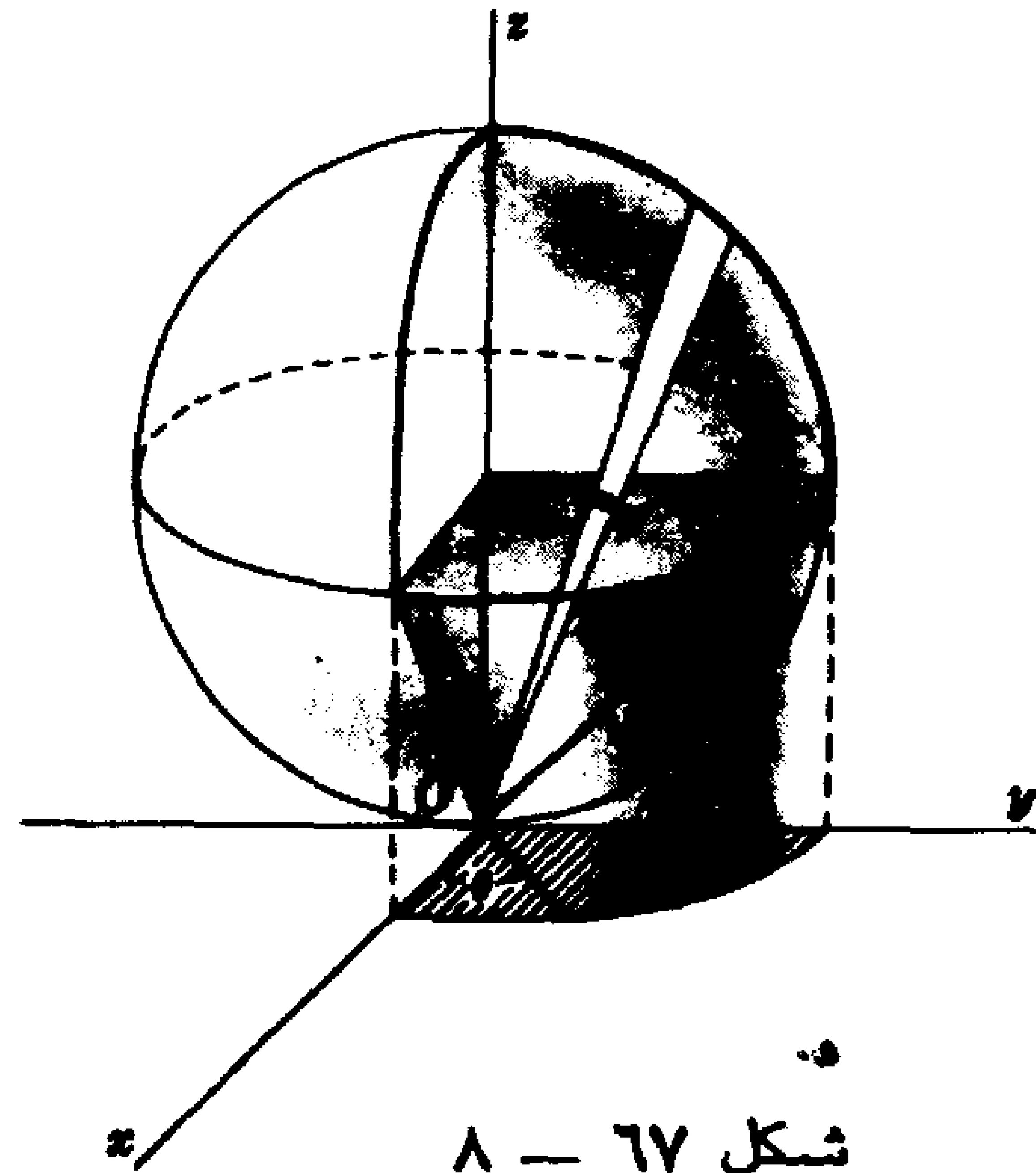
$$I_c = \tfrac{3}{5}(h^2+\tfrac{1}{4}r^2)V - \tfrac{9}{16}h^2V = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V \quad \text{و} \quad I_y = I_c + V(\tfrac{3}{4}h)^2$$

(هـ) لنرمز بـ d لقطر قاعدة المخروط الموازى للمحور y فيكون :

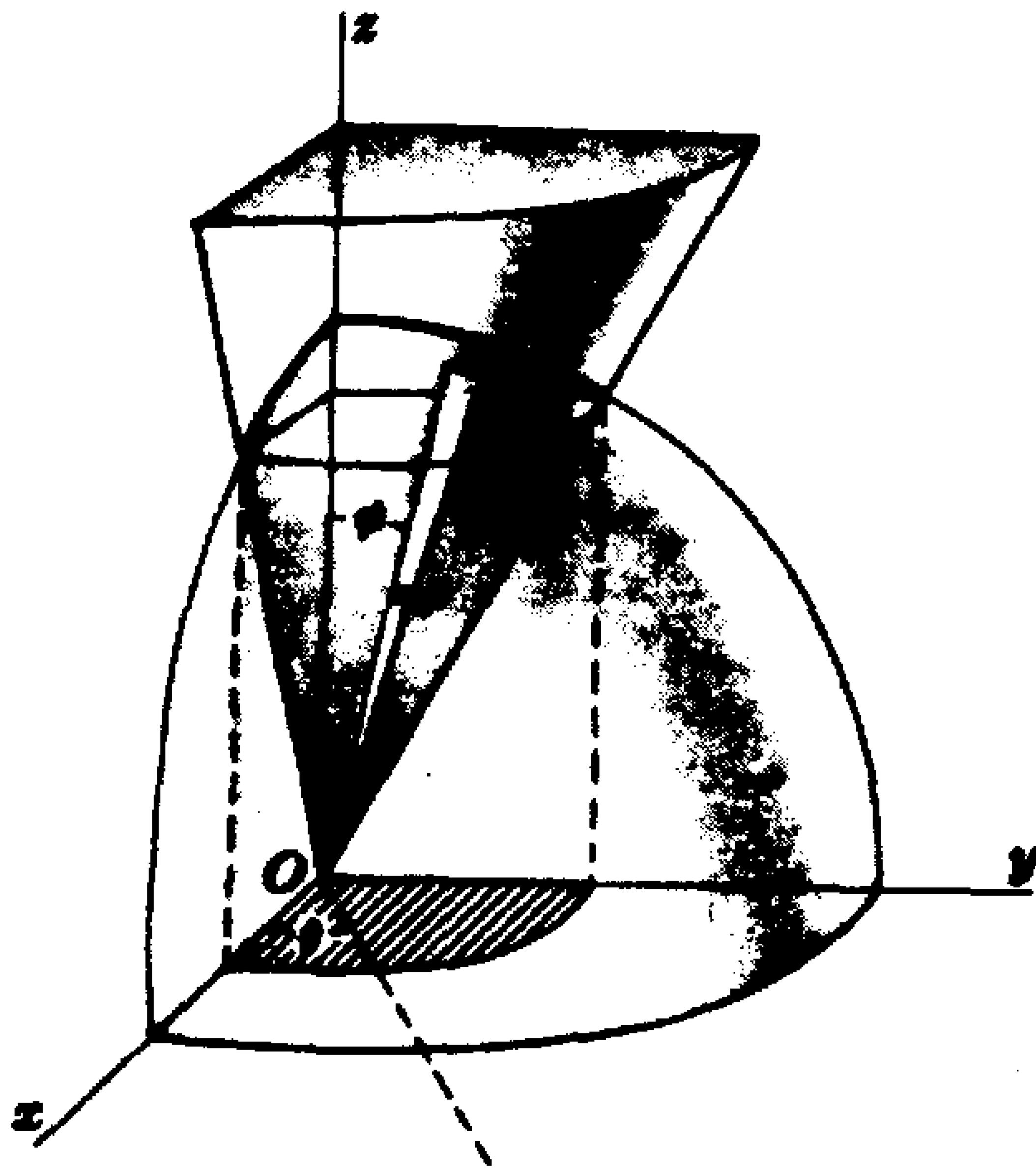
$$I_d = I_c + V(\tfrac{1}{4}h)^2 = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V + \tfrac{1}{16}h^2V = \tfrac{1}{20}(2h^2+3r^2)V$$

١١ – احسب الحجم المقتطع من المخروط $\phi = \frac{1}{4}\pi$ بالكرة $\rho = 2a\cos\phi$. انظر الشكل ٦٧ – ٨ .

$$V = 4\iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi} \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$
$$= \frac{32a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\cos^3\phi\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 2a^3\int_0^{\pi/2}d\theta = \pi a^3 \text{ cubic units}$$



شكل ٦٧ — ٨



شكل ٦٧ — ٩

١٢ – عين المركز المتوسط للحجم المقتطع من أحد فرعي المخروط الذى زاوية رأسه 60° بالكرة التى نصف قطرها 2 والتى يقع مركزها على رأس المخروط . انظر الشكل ٦٧ – ٩ .

لنأخذ السطحين كما فى الشكل ٦٧ – ٩ فيكون $\bar{x} = \bar{y} = 0$. وإذا استخدمنا الاحداثيات الكروية نجد معادلة المخروط $\phi = \pi/6$ ومعادلة الكرة $\rho = 2$.

$$V = \iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$$

$$M_{xy} = \iiint_R z \, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \sin 2\phi \, d\phi \, d\theta = \pi,$$

و $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{V} = \dfrac{3(2+\sqrt{3})}{8}$.

١٣ – احسب عزم القصور الذاتى للمجسم المحدد بالمسألة ١٢ بالنسبة للمحور z .

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2) \, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \sin^2\phi \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{128}{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \sin^3\phi \, d\phi \, d\theta = \frac{128}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{15}(16 - 9\sqrt{3}) = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{5} V$$

مسائل اضافية

١٤ – احسب قيم التكاملات الثلاثية التالية :

(ا) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2\int_2^3 dz \, dx \, dy = 1$

(ب) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x}\int_0^{xy} dz \, dy \, dx = 1/24$

(ﺟ) $\displaystyle\int_0^6\int_0^{12-2y}\int_0^{4-2y/3-x/3} x \, dz \, dx \, dy = 144 = \int_0^{12}\int_0^{6-x/2}\int_0^{4-2y/3-x/3} x \, dz \, dy \, dx$

(د) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16-\rho^2)^{1/2} \rho z \, d\rho \, dz \, d\theta = \frac{256}{5}\pi$

(ﻫ) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^5 \rho^4 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 2500\pi$

١٥ – (ا) احسب قيمة تكامل المسألة ١٤ (ب) بعد تغيير الترتيب بحيث يصبح $dz \, dx \, dy$.

(ب) احسب قيمة تكامل المسألة ١٤ (ﺟ) بعد تغيير الترتيب بحيث يصبح $dx \, dy \, dz$ وعندما يصبح أيضا $dy \, dz \, dx$.

١٦ – احسب الحجوم التالية مستخدما التكاملات الثلاثية فى الاحداثيات المتعامدة :

(ا) الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوى $z = 0$ وتحت المستوى $x + z = 4$.

ج : 36π cu. un. .

(ب) الحجم المحدد بالمستويات الاحداثية والمستوى $6x + 4y + 3z = 12$

ج : 4 cu. un.

(جـ) الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 4x$ وفوق $z = 0$ وتحت $x^2 + y^2 = 4z$.

ج : 6π cu. un.

١٧ – احسب الحجوم التالية مستخدما التكاملات الثلاثية فى الاحداثيات الاسطوانية :

(ا) حجم المسألة ٥

(ب) حجم المسألة ١٦ (جـ)

(جـ) الحجم الواقع داخل $\rho^2 = 16$ وفوق $z = 0$ وتحت $2z = y$.

ج : $64/3$ cu. un.

١٨ – عين المركز المتوسط لكل من الحجوم التالية :

(ا) الحجم الواقع تحت $z^2 = xy$ وفوق المثلث $y = x, y = 0, x = 4$ فى المستوى $z = 0$. ج : $(3, 9/5, 9/8)$

(ب) حجم المسألة ١٦ (ب) . ج : $(1/2, 3/4, 1)$

(جـ) حجم المسألة ١٦ (ا) الواقع فى الثمن الأول . ج : $\left(\frac{64 - 9\pi}{16(\pi - 1)}, \frac{23}{8(\pi - 1)}, \frac{73\pi - 128}{32(\pi - 1)}\right)$

(د) حجم المسألة ١٦ (جـ) . ج : $(8/3, 0, 10/9)$

(هـ) حجم المسألة ١٧ (جـ) . ج : $(0, 3\pi/4, 3\pi/16)$

١٩ – احسب عزوم القصور الذاتية I_x, I_y, I_z للحجوم التالية :

(ا) حجم المسألة ٥ . ج : $I_x = I_y = \frac{32}{3}V,\ I_z = \frac{16}{3}V$

(ب) حجم المسألة ١٦ (ب) . ج : $I_x = \frac{5}{2}V,\ I_y = 2V,\ I_z = \frac{13}{10}V$

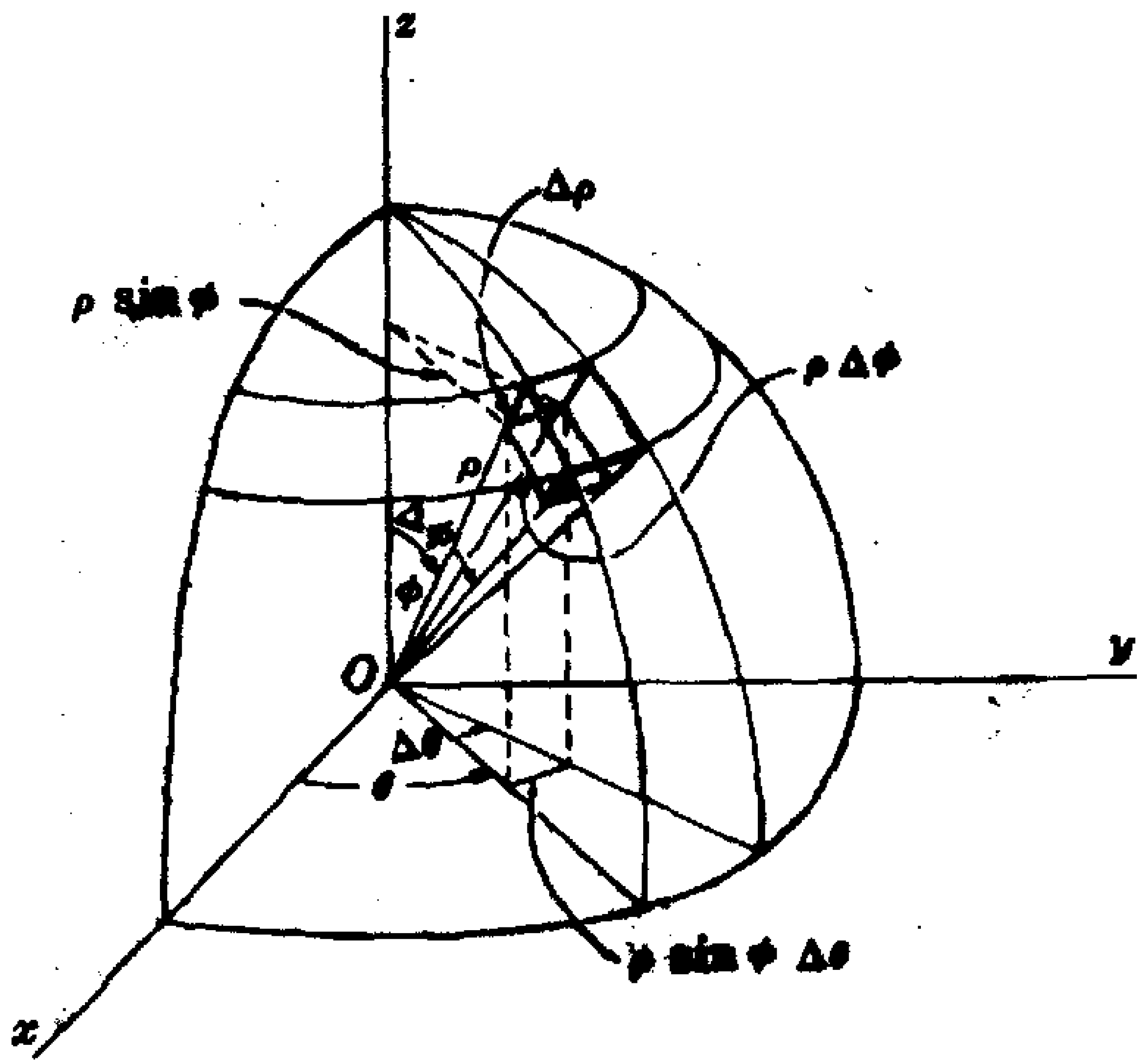
(جـ) حجم المسألة ١٦ (جـ) . ج : $I_x = \frac{55}{18}V,\ I_y = \frac{175}{18}V,\ I_z = \frac{80}{9}V$

(د) الحجم المقتطع من $z = \rho^2$ بالمستوى $z = 2$. ج : $I_x = I_y = \frac{7}{3}V,\ I_z = \frac{2}{3}V$

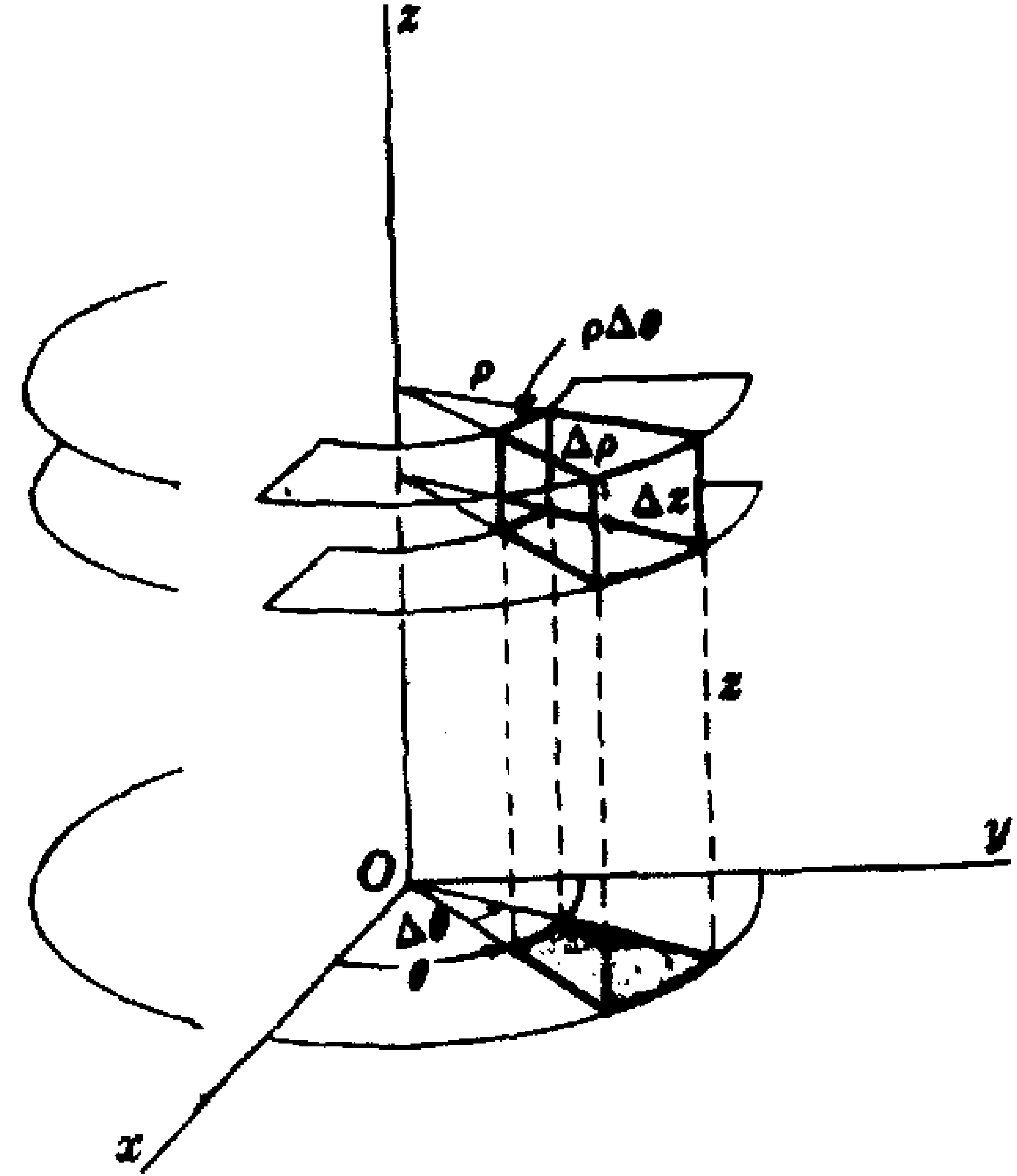
٢٠ – برهن أنه يمكن تمثيل تكامل الدالة $f(\rho, \theta, z)$ على منطقة R فى الاحداثيات الاسطوانية بـ

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho, \theta, z)\, \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

إرشاد . اعتبر المنطقة الجزئية الممثلة بـ R (انظر الشكل ٦٧ – ١٠) والمحددة بالاسطوانتين اللتين محورهما Oz ونصفا قطريهما ρ و $\rho + \Delta$ على التوالى ، وبالمستويين الأفقيين المارين بـ $(0, 0, z)$ و $(0, 0, z + \Delta z)$ على التوالى ، والمستويين الرأسيين المارين بـ Oz واللذان يصنعان مع المستوى xOy الزاويتين θ و $\theta + \Delta\theta$ على التوالى ، ثم خذ $\Delta V = (\rho\Delta\theta)\Delta\rho . \Delta z$ كتقريب لحجم هذه المنطقة الجزئية .



شكل ٦٧ ـــ ١١



شكل ٦٧ ـــ ١٠

٢١ – برهن أنه يمكن تمثيل تكامل $f(\rho, \phi, \theta)$ على منطقة R في الاحداثيات الكروية بـ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

إرشاد . اعتبر منطقة جزئية ممثلة بـ R (انظر الشكل ٦٧ – ١١) محددة بكرتين مركزهما O ونصف قطريهما ρ و $\rho + \Delta\rho$ على التوالى ومخروطى رأسيها O ومحورها Oz . ونصف زاويتى رأسيهما ϕ و $\phi + \Delta\phi$ على التوالى ، وبمستويين رأسيين مارين بـ Oz ويصنعان الزاويتين θ و $\theta + \Delta\theta$ على التوالى مع المستوى zOy. ثم خذ

$$\Delta V = (\rho\,\Delta\phi)(\rho \sin\phi\,\Delta\theta)(\Delta\rho) = \rho^2 \sin\phi\,\Delta\rho\,\Delta\phi\,\Delta\theta$$

كتقريب لحجم هذه المنطقة الجزئية .

الفصل الثامن والستون

الكتل ذات الكثافة المتغيرة

الكتل المتجانسة : سبق معالجتها في الفصول السابقة على أنها أشكال هندسية كثافتها $\delta = 1$. فكتلة جسم متجانس حجمه V وكثافته δ هي $m = \delta V$.

أما إذا كان لدينا كتلة غير متجانسة تتغير كثافتها δ بشكل مستمر من موضع لآخر فإن عنصر الكتلة dm يعطى بـ :

$\delta(x, y)\,ds$ لمنحنى مادى (مثل قطعة من سلك رفيع) .

$\delta(x, y)\,dA$ لجسيم مادى ثنائي البعد (مثل صفيحة رقيقة من المعدن)

$\delta(x, y, z)\,dV$ لجسم مادى .

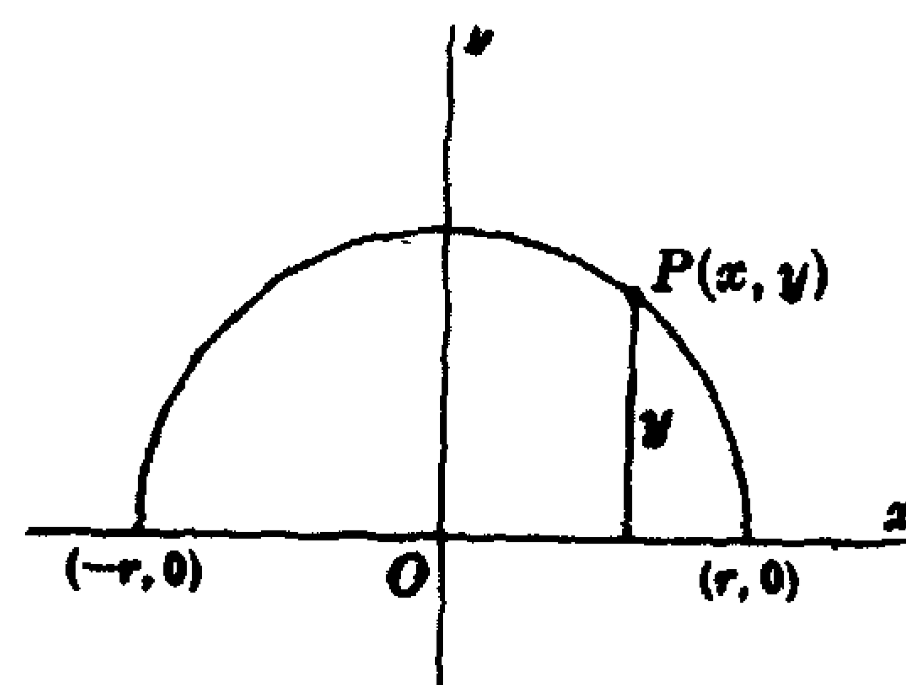
مسـائل محلولة

١ - احسب كتلة سلك نصف دائرى تتغير كثافته كتغير البعد عن القطر الذى يصل نهايتى السلك (انظر الشكل ٦٨ - ١) .

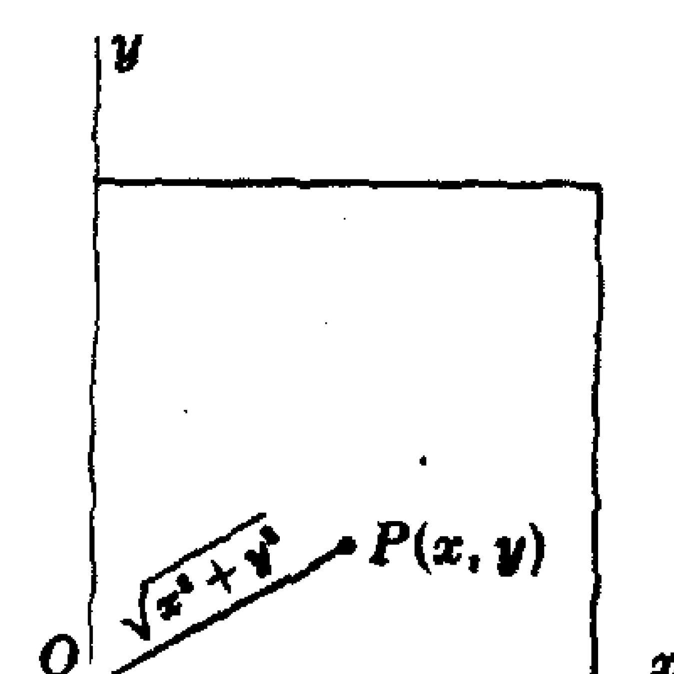
لنأخذ السلك كما فى الشكل ٦٨ - ١ فيكون $\delta(x, y) = ky$ واستنادا إلى $x^2 + y^2 = r^2$ أن نجد

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \frac{r}{y}\,dx$$

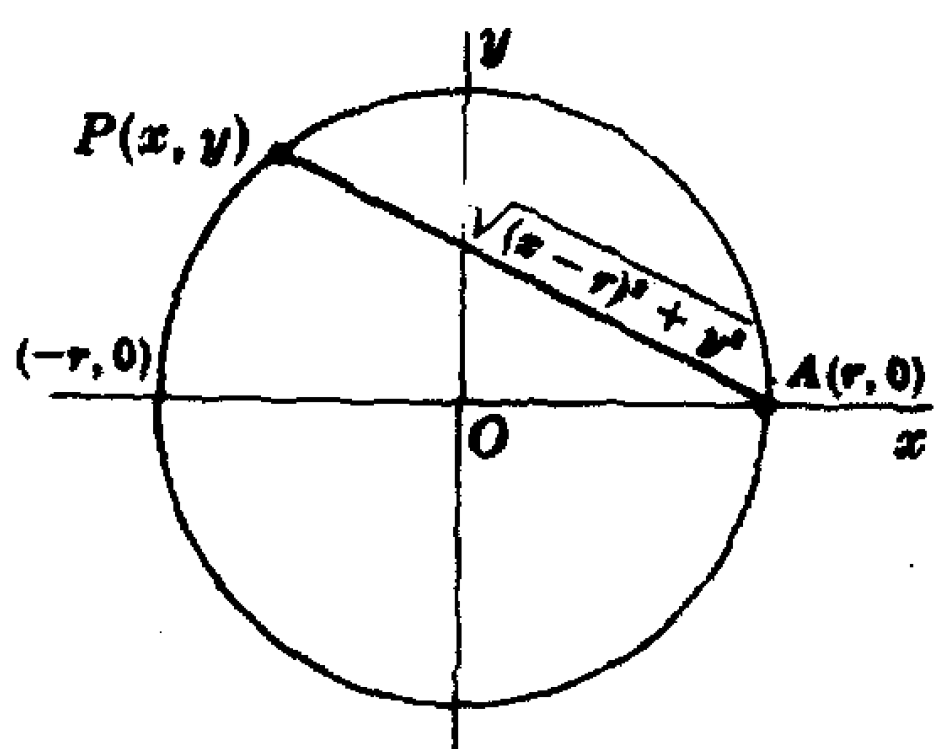
ومنه
$$m = \int \delta(x,y)\,ds = \int_{-r}^{r} ky \cdot \frac{r}{y}\,dx = kr\int_{-r}^{r} dx = 2kr^2 \text{ units}$$



شكل ٦٨ - ١



شكل ٦٨ - ٢



شكل ٦٨ - ٣

٢ – احسب كتلة صفيحة مربعة طول ضلعها a تتغير كثافتها كتغير مربع البعد عن أحد رؤوس المربع . انظر الشكل ٦٨ – ٢ .

لنأخذ المربع كما فى الشكل ٦٨ – ٢ ولنجعل الرأس الذى نقيس منها الأبعاد نقطة الأصل . يكون عندئذ $\delta(x, y) = k$ $(x^2 + y^2)$ ويكون :

$$m = \iint_R \delta(x,y)\, dA = \int_0^a \int_0^a k(x^2+y^2)\, dx\, dy = k\int_0^a (\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2)\, dy = \tfrac{2}{3}ka^4 \text{ units}$$

٣ – احسب كتلة صفيحة دائرية نصف قطرها r وتتغير كثافتها كتغير مربع البعد عن إحدى نقط محيط الدائرة انظر الشكل ٦٨ – ٣

لنأخذ الدائرة كما فى الشكل ٦٨ – ٣ ولتكن $A(r, 0)$ النقطة الثابتة على محيط الدائرة . عندئذ يكون $\delta(x,y) = k\{(x-r)^2 + y^2\}$ ومنه ؛ :

$$m = \iint_R \delta(x,y)\, dA = 2\int_{-r}^{r} \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} k\{(x-r)^2 + y^2\}\, dy\, dx = \frac{3}{2}k\pi r^4 \text{ units}$$

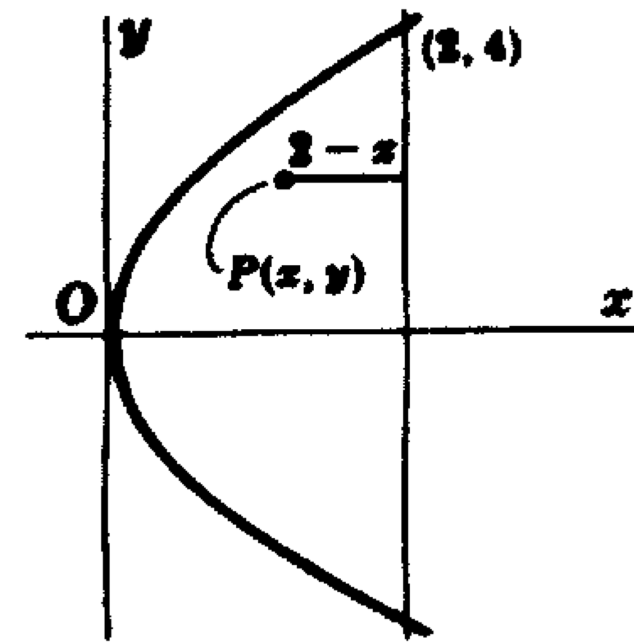
٤ – عين مركز صفيحة على شكل قطعة من القطع المكافئ $y^2 = 8x$ يقطعها منه المستقيم $x = 2$ إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن هذا المستقيم . انظر الشكل ٦٨ – ٨ .

إن $\delta(x, y) = 2 - x$ وبسبب التناظر $\bar{y} = 0$ ومن النصف العلوى من الصفيحة لدينا

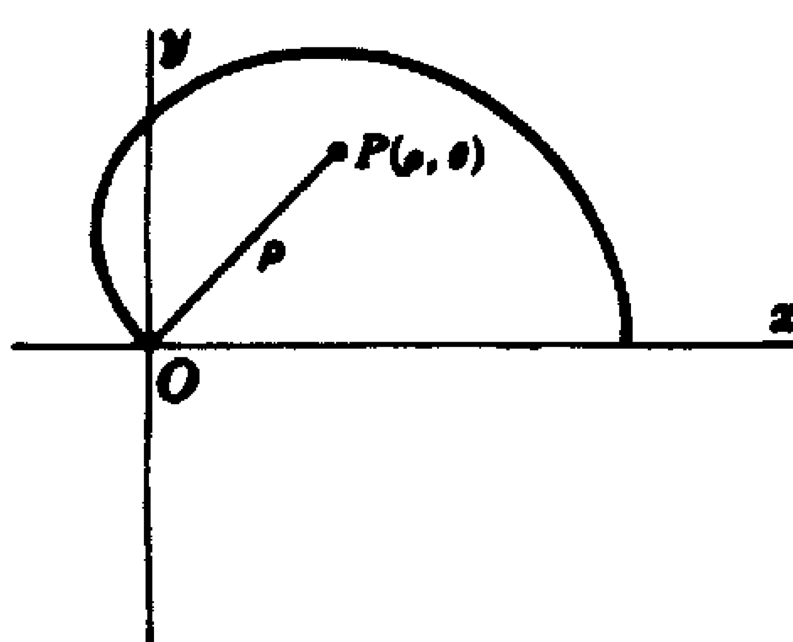
$$m = \iint_R \delta(x,y)\, dA = \int_0^4 \int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\, dx\, dy = k\int_0^4 \left(2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{128}\right) dy = \frac{64}{15}k,$$

$$M_y = \iint_R \delta(x,y)\, x\, dA = \int_0^4 \int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\,x\, dx\, dy = k\int_0^4 \left(\frac{4}{3} - \frac{y^4}{64} + \frac{y^6}{24\cdot 64}\right) dy = \frac{128}{35}k$$

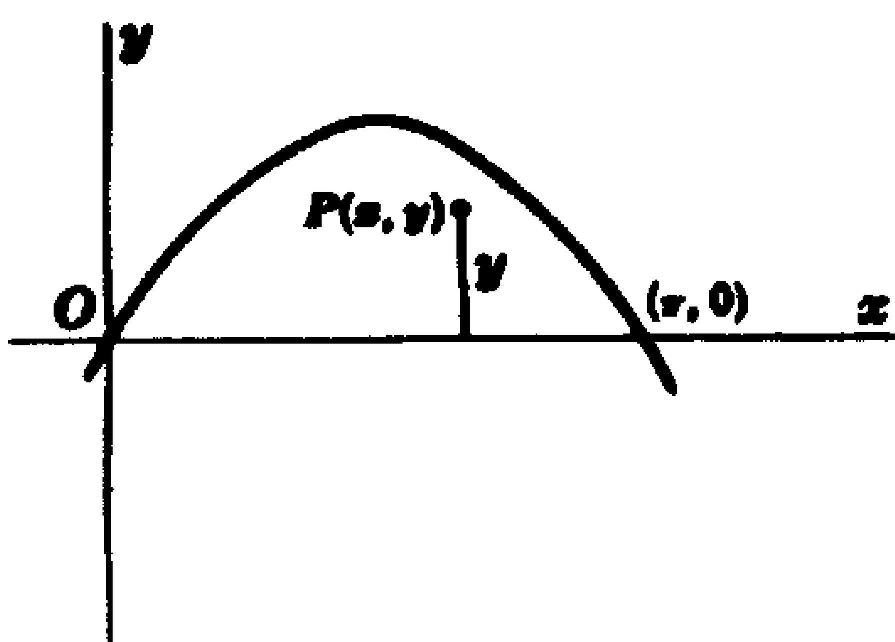
ومنه $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{6}{7}$ ومركز الكتلة هو النقطة $(6/7, 0)$



شكل ٦٨ – ٤



شكل ٦٨ – ٥



شكل ٦٨ – ٦

٥ – عين مركز كتلة صفيحة على شكل النصف العلوى من منحنى القلب $\rho = 2(1 + \cos\theta)$ إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن القطب . انظر الشكل ٦٨ – ٥

$$m = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\,d\theta = \frac{20}{3}k\pi,$$

$$M_x = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,y\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\sin\theta\,d\theta = \frac{128}{5}k,$$

$$M_y = \iint_R \delta(\rho,\theta)\,x\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta = 14k\pi$$

وعلى هذا فإن $\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{21}{10}$, $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{96}{25\pi}$, ومركز الكتلة هو النقطة $\left(\frac{21}{10}, \frac{96}{25\pi}\right)$

٦ – احسب عزم القصور الذاتى حول المحور x لصفيحة حدودها قوس واحد من المنحنى $y = \sin x$ والمحور x إذا كانت الكثافة تتغير كتغير البعد عن المحور x . انظر الشكل ٦٨ – ٦ .

$$m = \iint_R \delta(x,y)\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} ky\,dy\,dx = \frac{1}{2}k\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}k\pi$$

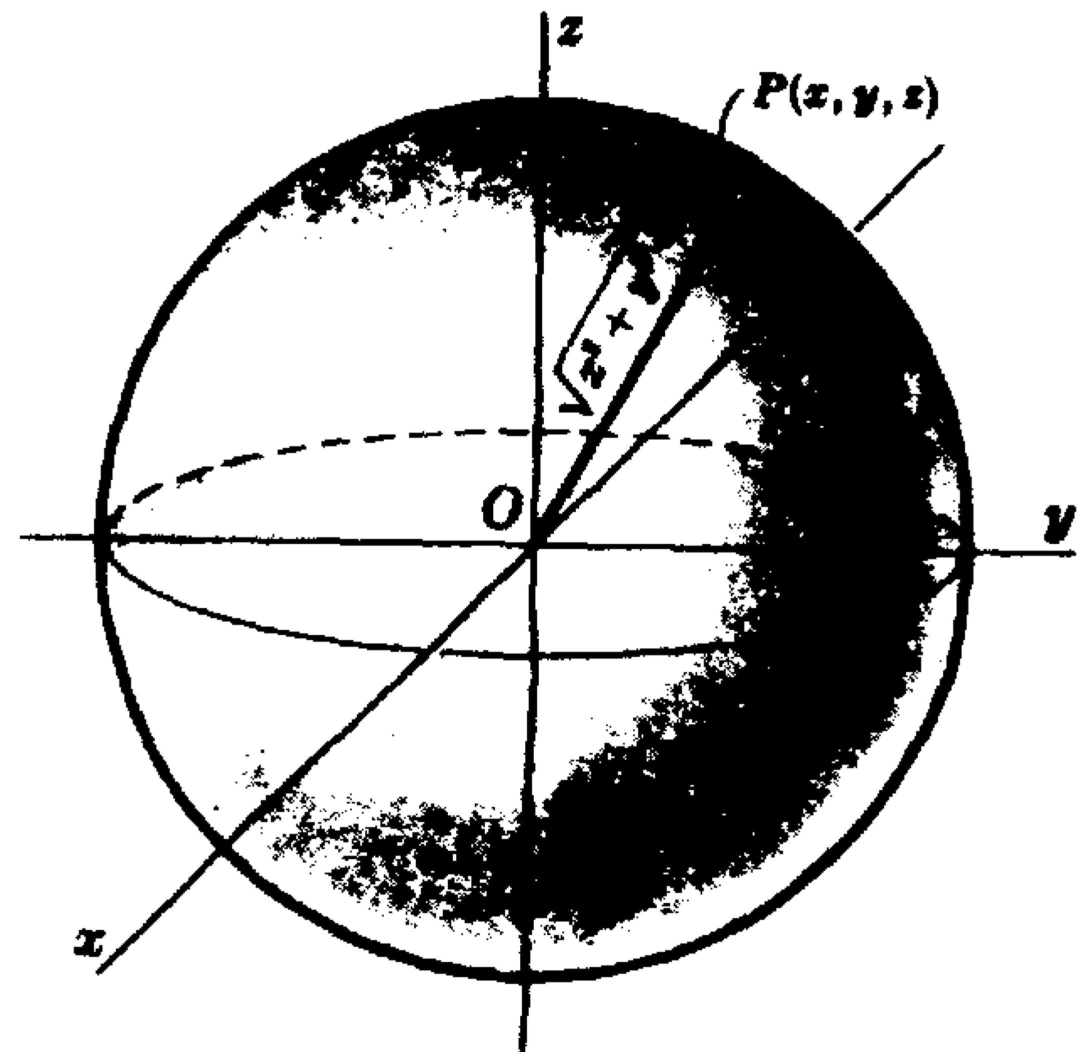
$$I_x = \iint_R \delta(x,y)\,y^2\,dA = \int_0^{\pi}\int_0^{\sin x} ky\cdot y^2\cdot dy\,dx = \frac{1}{4}k\int_0^{\pi}\sin^4 x\,dx = \frac{3}{32}k\pi = \frac{3}{8}m$$

٧ – احسب كتلة كرة نصف قطرها r تتغير كثافتها كتغير مقلوب مربع البعد عن مركزها . انظر الشكل ٦٨ – ٧ .

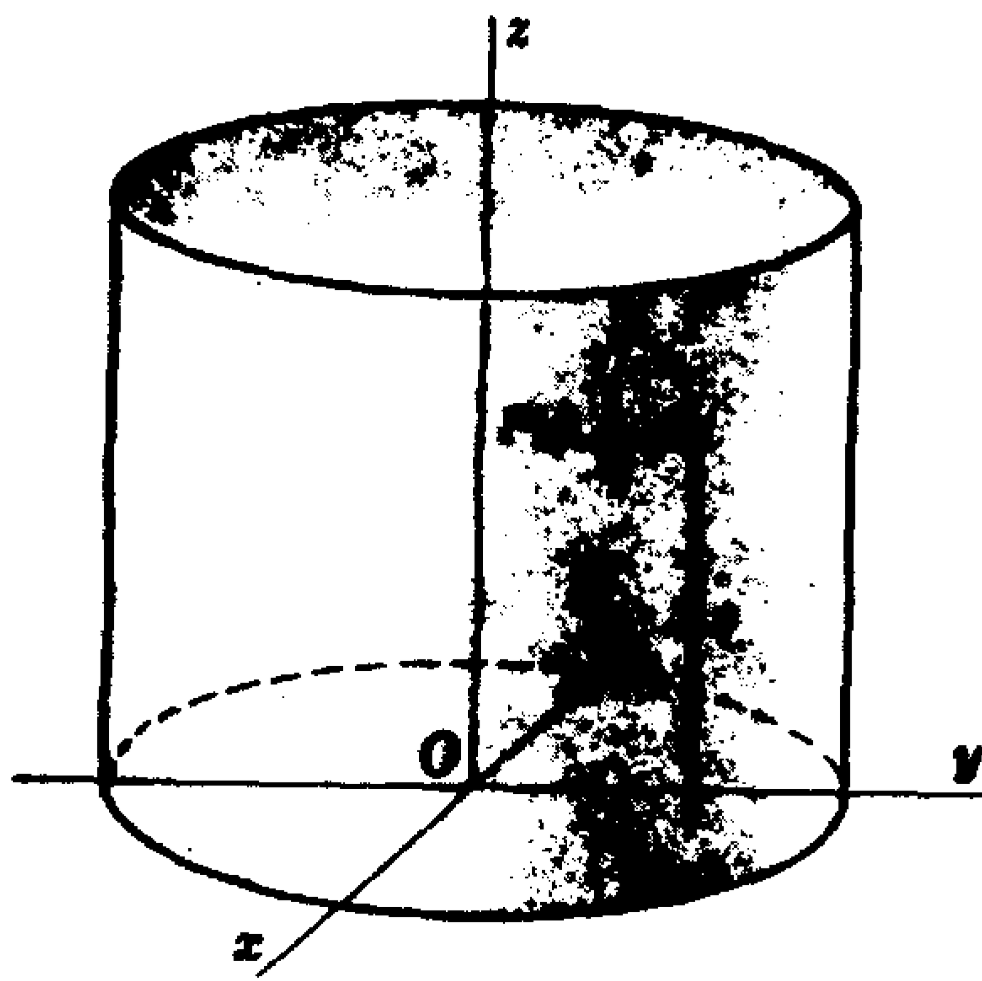
لنأخذ الكرة كما فى الشكل ٦٨ – ٧ فيكون $\delta(x,y,z) = \frac{k}{x^2+y^2+z^2} = \frac{k}{\rho^2}$ ومنه

$$m = \iiint_R \delta(x,y,z)\,dV = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{r} \frac{k}{\rho^2}\cdot\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 8kr\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 8kr\int_0^{\pi/2}d\theta = 4k\pi r \text{ units}$$



شكل ٦٨ – ٧



شكل ٦٨ – ٨

٨ — عين مركز الكتلة لاسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها r وارتفاعها h تتغير كثافتها كتغير البعد عن القاعدة . انظر الشكل ٦٨ — ٨ .

لنأخذ الاسطوانة كما فى الشكل ٦٨ — ٨ فتكون معادلتها $\rho = r$ ويكون الحجم الذى نحن بصدده هو ذاك الجزء من الاسطوانة الواقع بين المستويين $z = 0$ ، $z = h$.

من الواضح أن مركز الكتلة يقع على المحور z .

$$m = \iiint_R \delta(z,\rho,\theta)\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_0^h kz\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2kh^2\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= kh^2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}k\pi h^2r^2,$$

$$M_{xy} = \iiint_R \delta(z,\rho,\theta)\, z\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_0^h kz^2\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{4}{3}kh^3\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}kh^3r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}k\pi h^3r^2 \qquad , \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{3}h$$

مركز الكتلة إذن هو النقطة $(0, 0, {}^2/_3\, h)$

مسائل اضافية

٩ — احسب كتلة :

(ا) قضيب مستقيم طوله a وتتغير كثافته كتغير مربع البعد عن أحد طرفى القضيب .

ج : $^1/_3 k a^3$ units وحدة

(ب) صفيحة على شكل مثلث قائم طولا ضلعيه القائمين هما a و b إذا كانت الكثافة تتغير كمجموع البعدين عن الضلعين القائمين .

ج : $^1/_6 kab(a+b)$ units

(جـ) صفيحة دائرية نصف قطرها a تتغير كثافتها كالبعد عن المركز .

ج : $^2/_3 ka^3b$ units

(د) صفيحة على شكل قطع ناقص $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ إذا كانت كثافتها تتغير كمجموع البعدين عن المحورين .

ج : $^3/_4\, kab(a+b)$ units وحدة

(هـ) اسطوانة دائرية ارتفاعها b ونصف قطر قاعدتها a إذا كانت الكثافة تتغير كربع البعد عن محور الاسطوانة .

ج : $\frac{1}{2} ka^4b\pi$ units

(و) كرة نصف قطرها a تتغير كثافتها كالبعد عن مستوى قطرى ثابت .

ج : $\frac{1}{2} ka^4\pi$ units وحدة

(ز) مخروط دائرى ارتفاعه b ونصف قطر قاعدته a تتغير كثافته كالبعد عن محور المخروط .

ج : $^1/_6 La^3 b\pi$ units .

(ح) سطح كروى تتغير كثافته كالبعد عن مستو قطرى ثابت .

ج : $2ka^3\pi$ units .

١٠ – عين مركز الكتلة لـ :

(ا) مربع صفيحة المسألة ٩ (جـ) ج : $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$

(ب) ربع صفيحة دائرية نصف قطرها a تتغير كثافتها كالبعد عن أحد نصفى القطرين اللذين يحداها (المحور x) .

ج : $(3a/8, 3a\pi/16)$

(جـ) مكعب طول ضلعه a تتغير كثافته كمجموع الأبعاد عن ثلاثة من أضلاعه المتجاورة (المحاور الاحداثية)

ج : $(5a/\theta, 5a/9, 5a/9)$

(د) ثمن كرة نصف قطرها a إذا كانت الكثافة تتغير كالبعد عن أحد وجهيها المستوى .

ج : ($8a/15$ و $16a/15\pi$ و $16a/15\pi$)

(هـ) مخروط دائرى قائم ارتفاعه b ونصف قطر قاعدته a وكثافته متغيرة كالبعد عن قاعدته .

ج : $(0,0,2b/5)$

١١ – احسب عزم القصور الذاتى لـ :

(ا) صفيحة مربعة طول ضلعها a بالنسبة لأحد أضلاعها بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن أحد طرفى ذلك الضلع .

ج : $\frac{7}{15}\ a^2m$

(ب) صفيحة على شكل دائرة نصف قطرها a بالنسبة لمركزها بفرض أن كثافتها تتغير كربع البعد عن المركز .

ج : $2/3\ a^2m$

(جـ) مكعب طول ضلعه a بالنسبة لأحد أضلاعه بفرض أن كتلة كثافته تتغير كربع البعد عن أحد طرفى ذلك الضلع .

ج : $\frac{38}{45}\ a^2m$

(د) مخروط دائرى قائم ارتفاعه b ونصف قطر قاعدته a بالنسبة لمحوره بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن المحور .

ج : $2/5\ a^2m$

(هـ) مخروط (د) بفرض أن الكثافة متغيرة كالبعد عن القاعدة .

ج : $1/5\ a^2m$

الفصل التاسع والستون

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية • هي معادلة تحتوى على المشتقات أو التفاضلات ، مثلا :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0, \quad dy = (x+2y)\,dx, \quad \ldots$$ الخ

إن رتبة المعادلة التفاضلية هى رتبة أعلى مشتقة تظهر فيها . فالأولى من المعادلتين السابقتين من الرتبة الثانية ، والثانية من الرتبة الأولى والمعادلتان من الدرجة الأولى .

حل المعادلة التفاضلية هو أية علاقة بين المتغيرات خالية من المشتقات والتفاضلات وتحقق المعادلة وتجعلها مطابقة . والحل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هو ذلك الحل الذى يحتوى أكبر عدد (يساوى n) من الثوابت الاختيارية الأساسية .

انظر المسائل ١ — ٣

المعادلة من الرتبة الأولى والدرجة الأولى : هى معادلة من الشكل $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$
وإذا كان لهذه المعادلة الشكل الخاص $f_1(x)\cdot g_2(y)\,dx + f_2(x)\cdot g_1(y)\,dy = 0,$ فإن متغيراتها قابلة للفصل وحلها العام هو :

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C$$

انظر المسائل ٤ — ٦

نقول عن دالة $f(x,y)$ إنها متجانسة من الدرجة n فى متغيراتها إذا كان $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y).$ ونقول عن المعادلة $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ إنها متجانسة إذا كانت $M(x,y)$ ، $N(x,y)$ متجانستين من الدرجة نفسها وفى مثل هذه الحالة يحول التعويض :

$$y = vx, \quad dy = v\,dx + x\,dv$$

المعادلة المتجانسة إلى معادلة بالمتغيرين x و v القابلين للفصل .

انظر المسائل ٧ — ٩

بعض المعادلات التفاضلية يمكن حلها مباشرة إذا استفدنا من وجود تركيبات من الحدود القابلة للتكامل . وقد يتعذر أحيانا حل المعادلة مباشرة بالطريقة السابقة . ولكن إذا ضربناها فى دالة فى x أو فى y نختارها بشكل ملائم فإنها تصبح قابلة للحل . نسمى هذا المضروب العامل التكاملى للمعادلة .

انظر المسائل ١٠ — ١٤

والمعادلة التفاضلية التي يقال عنها خطية من الرتبة الأولى $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ حيث P و Q دالتان في x فقط لها عامل تكامل مثل $\xi(x) = e^{\int P\,dx}$

انظر المسائل ١٥ — ١٧

تحول كل معادلة من الشكل $\frac{dy}{dx} + Py = Q\,y^n$ حيث $n \neq 0,1$ و P ، Q دالتان في x فقط ، إلى معادلة خطية بالتعويض :

$$y^{1-n} = z, \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

انظر المسألتين ١٨ — ١٩

مسائل محلولة

١ — بين أن (ا) $y = 2\,e^x$ (ب) $y = 3x$ (ج) $y = C_1 e^x + C_2 x$ حيث C_2 و C_1 ثابتان اختياريان ، هي حلول للمعادلة التفاضلية $y''(1-x) + y'x - y = 0$.

(ا) لنشتق $y = 2e^x$ مرتين فنحصل على $y' = 2e^x$ و $y'' = 2\,e^x$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة $2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x = 0.$

(ب) لنشتق $y = 3x$ مرتين فنحصل على $y' = 3$ و $y'' = 0$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة $0(1-x) + 3x - 3x = 0.$

(ج) لنشتق $y = C_1e^x + C_2x$ مرتين فنحصل على $y' = C_1e^x + C_2$ ، $y'' = C_1e^x$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على المتطابقة $C_1e^x(1-x) + (C_1e^x + C_2)x - (C_1e^x + C_2x) = 0.$

إن الحل (ج) هو الحل العام للمعادلة التفاضلية لأنه يحقق المعادلة ويحتوى العدد الصحيح من الثوابت الاختيارية الأساسية . وأما الحلان (ا) و (ب) فيسميان حلين خاصين لأنه يمكن الحصول على كل منهما بإعطاء قيم خاصة للثوابت الاختيارية .

٢ — شكل المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو :

(ا) $y = Cx^2 - x$ و (ب) $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$

(ا) لنشتق $y = Cx^2 - x$ مرة فنحصل على $y' = 2Cx - 1$ ونحل المعادلة بالنسبة لـ C نجد أن $C = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)$. وبالتعويض في العلاقة المفروضة (الحل العام) نحصل على $y = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)x^2 - x$ أو $y'x = 2y + x$.

(ب) لنشتق $y = C_1x^3 + C_2x + C_3$ ثلاث مرات فنحصل على $y' = 3C_1x^2 + C_2, y'' = 6C_1x,$ $y''' = 6C_1$ ومنه نجد أن $y'' = xy'''$ هي المعادلة المطلوبة . يلاحظ أن العلاقة المفروضة هي حل للمعادلة $y^{iv} = 0$ ولكنها ليست حلا عاما لأنها لا تحتوى سوى ثلاثة ثوابت اختيارية

٣ — شكل المعادلة التفاضلية لجميع القطاعات المكافئة التي ينطبق محورها على المحور x .

إن لمجموعة القطاعات المكافئة المعادلة $y^2 = Ax + B$ حيث A و B ثابتان اختياريان . لنشتق مرتين فنحصل على $2yy' = A$ و $2yy'' + 2y'^2 = 0$. والمعادلة $2yy'' + 2y'^2 = 0$ هي المعادلة المطلوبة .

٤ ــ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0.$

نكتب المعادلة بالشكل $xy^2(1+x^2)dy + (1+y^3)dx = 0$ أو بالشكل $\frac{y^2}{1+y^3}dy + \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$ والمتغيرات قابلة للفصل . إذن

$$\frac{y^2\,dy}{1+y^3} + \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0,$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c,$$

$$2\ln|1+y^3| + 6\ln|x| - 3\ln(1+x^2) = 6c,$$

$$\ln\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = 6c \quad \text{و} \quad \frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = C.$$

٥ ــ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$

لدينا الآن $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}.$ ومنه $\arctan y = \arctan x + \arctan C$ إذن

$$y = \tan(\arctan x + \arctan C) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

٦ ــ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}.$

$\sec^2 y\,dy = \csc^2 x\,dx,$ $\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\sin^2 x},$ و $\tan y = -\cot x + C$

٧ ــ حل المعادلة $2xy\,dy = (x^2 - y^2)\,dx.$

إن المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وإذا أجرينا التحويل $y = vx$ نجد $dy = v dx + x dv$ وتصبح المعادلة

$$2x \cdot vx\,(v\,dx + x\,dv) = (x^2 - v^2x^2)\,dx \quad \text{أو} \quad \frac{2v\,dv}{1-3v^2} = \frac{dx}{x}.$$

ومنه $\ln|1-3v^2| + 3\ln|x| + \ln C' = 0$ ، $-\frac{1}{3}\ln|1-3v^2| = \ln|x| + \ln c,$ أو $C'|x^3(1-3v^2)| = 1.$

وأخيراً $\pm C'x^3(1-3v^2) = Cx^3(1-3v^2) = 1$ باستخدام $v = y/x,$ نجد $C(x^3 - 3xy^2) = 1.$

٨ ــ حل المعادلة : $x\sin\frac{y}{x}\,(y\,dx + x\,dy) + y\cos\frac{y}{x}\,(x\,dy - y\,dx) = 0.$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وإذا أجريت التحويل $y = vx$ فإن $dy = vdx + xdv$ وتصبح المعادلة .

$$x\sin v\,(vx\,dx + x^2\,dv + vx\,dx) + vx\cos v\,(x^2\,dv + vx\,dx - vx\,dx) = 0$$

$$\sin v\,(2v\,dx + x\,dv) + xv\cos v\,dv = 0, \quad \frac{\sin v + v\cos v}{v\sin v}dv + 2\frac{dx}{x} = 0$$

إذن $\ln|v\sin v| + 2\ln|x| = \ln C',$ $x^2 \cdot v \cdot \sin v = C,$ وبالتالي $xy\sin\frac{y}{x} = C.$

٩ – حل المعادلة $(1 - 2v^2)(v\,dx + x\,dv) + 2v\,dx = 0,$

إن هذه المعادلة متجانسة من الدرجة الثانية . وتؤول بعد إجراء التحويل النموذجي إلى :

$$\frac{dv}{3v} - \frac{4v\,dv}{3(3-2v^2)} + \frac{dx}{x} = 0 \qquad \frac{1-2v^2}{v(3-2v^2)}dv + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\ln|v| + \ln|3-2v^2| + 3\ln|x| = \ln C' \qquad \tfrac{1}{3}\ln|v| + \tfrac{1}{3}\ln|3-2v^2| + \ln|x| = \ln c,$$

ومنه $vx^3(3 - 2v^2) = C$ وبالتالي $y(3x^2 - 2y^2) = C.$

١٠ – حل المعادلة $(x^2 + y)\,dx + (y^3 + x)\,dy = 0.$

لنكامل $x^2\,dx + (y\,dx + x\,dy) + y^3\,dy = 0,$ حدا حدا فنحصل على : $\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^4}{4} = C.$

١١ – حل المعادلة $(x + e^{-x}\sin y)\,dx - (y + e^{-x}\cos y)\,dy = 0.$

لنكامل $x\,dx - y\,dy - (e^{-x}\cos y\,dy - e^{-x}\sin y\,dx) = 0,$ حدا حدا فنحصل على

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - e^{-x}\sin y = C$$

١٢ – حل المعادلة $x\,dy - y\,dx = 2x^3\,dx.$

إن التركيب $xdy - ydx$ يوحي إلينا بالعلاقة $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$. لذا نضرب المعادلة المفروضة

بـ $\xi(x) = \frac{1}{x^2},$ فنجد $\frac{xdy - ydx}{x^2} = 2xdx$ وبالتالي $\frac{y}{x} = x^2 + C$ أو $y = x^3 + Cx$.

١٣ – حل المعادلة $x\,dy + y\,dx = 2x^2y\,dx.$

إن التركيب $xdy + ydx$ يوحي إلينا بالعلاقة $d(\ln xy) = \frac{x\,dy + y\,dx}{xy}.$ لذا نضرب المعادلة المفروضة بـ

$\xi(x, y) = \frac{1}{xy},$ فنجد $\frac{xdy + ydx}{xy} = 2xdx$ ومنه $\ln|xy| = x^2 + C.$

١٤ – حل المعادلة $x\,dy + (3y - e^x)\,dx = 0.$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\xi(x) = x^2$ فنحصل على $x^3\,dy + 3x^2y\,dx = x^2e^x\,dx.$

ومنه $x^3y = \int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

١٥ – حل المعادلة $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 6x^3.$

هنا $P(x) = 2/x$ ومنه $\int P(x)\,dx = \ln x^2,$ وبالتالي $\xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2.$

لذا نضرب المعادلة المفروضة بـ $\xi(x) = x^2$ فنحصل على $x^2\,dy + 2xy\,dx = 6x^5\,dx.$ ومنه $x^2y = x^6 + C$.

ملاحظة ١ : إن الحدود الواقعة في الطرف الأيسر من المعادلة بعد ضربها بالعامل التكامل تشكل تركيبا قابلا للمكاملة .

ملاحظة ٢ – ليس العامل التكامل لمعادلة مفروضة جيدا ، فى المسألة الحالية نجد أن الخ و $x^2, 3x^2, {}^1/{}_2x^2$ جميعها عوامل تكاملية ، ولذلك فإننا نختار أبسط التكاملات الخاصة لـ $P(x)\,dx$ بدلا من أن نختار التكامل العام

$$\ln x^2 + \ln C = \ln Cx^2.$$

١٦ – حل المعادلة $\tan x \dfrac{dy}{dx} + y = \sec x.$

بما أن $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = \csc x,\quad \int P(x)\,dx = \int \cot x\,dx = \ln|\sin x|$

وبالتالى $\xi(x) = e^{\ln|\sin x|} = |\sin x|.$

ومن ثم $\sin x\left(\dfrac{dy}{dx} + y\cot x\right) = \sin x \csc x,\quad \sin x\,dy + y\cos x\,dx = dx,$

ومنه $y\sin x = x + C.$

١٧ – حل المعادلة $\dfrac{dy}{dx} - xy = x.$

هنا $P(x) = -x$ ومنه $\int P(x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2,$ وبالتالى $\xi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$

إذن $e^{-\frac{1}{2}x^2}dy - xye^{-\frac{1}{2}x^2}dx = xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx,\quad ye^{-\frac{1}{2}x^2} = -e^{-\frac{1}{2}x^2} + C,$

ومنه $y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} - 1.$

١٨ – حل المعادلة $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^2.$

إن المعادلة من الشكل $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ حيث $n = 2$.

نستخدم التعويض $y^{1-n} = y^{-1} = z,\quad y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dz}{dx}.$ (لنكتب المعادلة للسهولة بالشكل $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + y^{-1} = x.$)

ومنه $-\dfrac{dz}{dx} + z = x$ أو $\dfrac{dz}{dx} - z = -x.$

والعامل التكامل هو $\xi(x) = e^{\int P\,dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}.$ إذن $e^{-x}dz - ze^{-x}dx = -xe^{-x}dx$ و

$ze^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + C.$ وبما أن $z = y^{-1}$ فإنه يكون أخيرا : $\dfrac{1}{y} = x + 1 + Ce^x.$

١٩ – حل المعادلة $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = y^3\sec x.$

لنكتب المعادلة بالشكل $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} + y^{-2}\tan x = \sec x.$

نستخدم التعويض $y^{-2} = z$ فيكون $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}$ وتأخذ المعادلة الشكل $\dfrac{dz}{dx} - 2z\tan x = -2\sec x.$

إن العامل التكامل هو $\xi(x) = e^{-2\int\tan x\,dx} = \cos^2 x.$ إذن

$$\cos^2 x\,dz - 2z\cos x\sin x\,dx = -2\cos x\,dx,\quad z\cos^2 x = -2\sin x + C,$$

ومنه $\dfrac{\cos^2 x}{y^2} = -2\sin x + C.$

٢٠ – أطلقت رصاصة على كومة رمل . فإذا فرضنا أن تباطؤها يساوى الجذر التربيعي لسرعة اختراقها فإلى متى تدخل فى الرمل قبل أن تتوقف إذا فرضنا أن سرعتها عند دخول الكومة تساوى $49\ \text{ms}^{-1}$ م .

لتكن v سرعة الرصاصة بعد t ثانية من اصطدامها بالكومة .

عندئذ يكون التباطؤ $-\dfrac{dv}{dt} = \sqrt{v}$ ومنه $\dfrac{dv}{\sqrt{v}} = -dt$ أى $2\sqrt{v} = -t + C$.

عندما $t = 0$ ، $v = 49$ ، $C = 2\sqrt{49} = 14$. وعلى هذا فإن $2\sqrt{v} = -t + 14$

وهذا هو القانون الذى يحكم حركة الرصاصة . فإذا جعلنا $v = 0$ نجد $t = 14$ والرصاصة تتقدم مدة 14 sec قبل أن تقف .

٢١ – يحتوى خزان 400 litres من الماء المالح مذاب فيها 100 kg من الملح فإذا انساب فيه ماء يحتوى $^1/_8$ kg من الملح فى كل لتر بمعدل 12 litres/minute وجعلنا المزيج متجانسا بالتحريك الدائم وتركنا هذا المزيج ينسكب من الخزان بالمعدل السابق ذاته ، فما هى كية الملح الموجودة فى الخزان بعد 90 minutes .

لنرمز بـ q لوزن الملح بالكيلو جرامات ، الموجودة فى الخزان فى نهاية اللحظة t minutes . عندئذ يكون $\dfrac{dq}{dt}$ معدل تغير كية الملح فى اللحظة t .

وبما أنه يدخل إلى الخزان خلال دقيقة واحدة $1\frac{1}{2}$ kg من الملح ويخرج $0.03q$ kg فإن $\dfrac{dq}{dt} = 1.5 - 0.03q$

ومنه $\dfrac{dq}{1.5 - 0.03q} = dt,$ وبالتالى $\dfrac{\ln(0.03\,q - 1.5)}{0.03} = -t + C.$

ولكن عند اللحظة $t = 0$ فإن $q = 100$ إذن $C = \dfrac{\ln 1.5}{0.03}$

وبالتالى $\ln(0.03\,q - 1.5) = -0.03\,t + \ln 1.5,\ 0.02\,q - 1 = e^{-0.03t},$

ومنه $q = 50 + 50e^{-0.03t}$ وعندما $t = 90$ فنجد : $t = 90,\ q = 50 + 50e^{-2.7} = 53.36$ kg.

٢٢ – يتحول سكر القصب فى الماء ، تحت شروط معينة ، إلى سكر العنب بمعدل يتناسب مع الكية غير المحولة فى كل لحظة . فإذا تحول 8 grams من أصل 75 grams كانت موجودة عند اللحظة $t = 0$ ، وذلك خلال 30 minutes الأولى فأوجد الكية المتحولة خلال $1\frac{1}{2}$ hours .

لنرمز بـ q للكية المحولة خلال t minutes .

عندئذ $\dfrac{dq}{dt} = k(75 - q)$ ومنه $\dfrac{dq}{75 - q} = k\,dt$ وبالتالى $(75 - q) = -kt + C$.

عندما $t = 0$ كانت $q = 0$ ومنه $C = \ln 75$ إذن $\ln(75 - q) = -kt + \ln 75.$

وعندما أصبحت $t = 30$ كانت $q = 8$ ومنه $30k = \ln 75 - \ln 67$ و $k = .0038.$ إذن $q = 75(1 - e^{-.0038t}).$

وعلى هذا إذا وضعنا $t = 90$ نجد : $q = 75(1 - e^{-.34}) = 21.6$ grams

مسائل اضافية

٢٣ – أوجد المعادلة التفاضلية التى حلها العام :

(ا) $y = Cx^2 + 1$ (جـ) $y = Cx^2 + C^2$ (هـ) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$ (ز) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$

(ب) $y = C^2x + C$ (د) $xy = x^3 - C$ (و) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ (ح) $y = C_1e^x \cos(3x + C_2)$

ح (ا) $xy' = 2(y-1)$ (جـ) $4x^2y = 2x^2y' + (y')^2$ (هـ) $y''' = 0$ (ز) $y'' + y = 0$
(ب) $y' = (y - xy')^2$ (د) $xy' + y = 3x^2$ (و) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (ح) $y'' - 2y' + 10y = 0$

٢٤ – حل المعادلات التفاضلية :

(ا)	$y\,dy - 4x\,dx = 0$	ج :	$y^2 = 4x^2 + C$
(ب)	$y^2\,dy - 3x^5\,dx = 0$	ج :	$2y^3 = 3x^6 + C$
(جـ)	$x^2y' = y^2(x-4)$	ج :	$x^2 - xy + 2y = Cx^2y$
(د)	$(x-2y)\,dy + (y+4x)\,dx = 0$	ج :	$xy - y^2 + 2x^2 = C$
(هـ)	$(2y^2+1)y' = 3x^2y$	ج :	$y^2 + \ln\|y\| = x^3 + C$
(و)	$xy'(2y-1) = y(1-x)$	ج :	$\ln\|xy\| = x + 2y + C$
(ز)	$(x^2+y^2)\,dx = 2xy\,dy$	ج :	$x^2 - y^2 = Cx$
(ح)	$(x+y)\,dy = (x-y)\,dx$	ج :	$x^2 - 2xy - y^2 = C$
(ط)	$x(x+y)\,dy - y^2\,dx = 0$	ج :	$y = Ce^{-y/x}$
(ى)	$x\,dy - y\,dx + xe^{-y/x}\,dx = 0$	ج :	$e^{y/x} + \ln\|Cx\| = 0$
(ك)	$dy = (3y + e^{2x})\,dx$	ج :	$y = (Ce^x - 1)e^{2x}$
(ل)	$x^2y^2\,dy = (1 - xy^3)\,dx$	ج :	$2x^3y^3 = 3x^2 + C$

٢٥ – يقابل المستقيم المماس والمستقيم العمودى لمنحنى عند النقطة $P\ (x, y)$ المحور x فى N و T على الترتيب المحور y فى S و M على الترتيب .

أوجد مجموعة المنحنيات التى تحقق الشرط

(ا) $TP = PS$ ، (ب) $NM = MP$ ، (جـ) $TP = OP$ ، (د) $NP = OP$.

ج : (ا) $xy = C$ ، (ب) $2x^2 + y^2 = C$ ، (جـ) $xy = c, y = Cx$ ، (د) $x^2 \pm y^2 = C$.

٢٦ – حل المسألة ٢١ بفرض أن ماء نقيا ينسكب فى الخزان بمعدل 12 litres/minute ويتدفق المزاح منه بالمعدل ذاته.

ج : 6.72 kg .

٢٧ – حل المسألة ٢٦ بفرض أن المزاح يتدفق من الخزان بمعدل 16 litres/minute .

إرشاد : $dq = -\dfrac{4q}{100-t}\,dt$ ج : 0.01 kg .

الفصل السبعون

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

اعتبر الأنواع التالية من المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية :

(١) $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ انظر المسألة ١

(٢) $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right)$ انظر المسألتين ٢ – ٣

(٣) $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ انظر المسألتين ٤ – ٥

(٤) $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R,$ حيث P و Q ثابتان أما R فهو إما ثابت أو دالة فى x فقط .

إذا كان المعادلة $m^2 + Pm + Q = 0$ جذران مختلفان m_1 و m_2 فإن $y = C_1 e^{mx} + C_2 xe^{mx}$ هو الحل العام للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$ أما إذا كان الجذران متطابقين فإن الحل العام هو $y = C_1 e^{m_1x} + C_2 e^{m_2x}$ يسمى الحل العام للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0.$ الدالة المتممة للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = R(x).$

وإذا حقق الشرط $f(x)$ $y = f(x)$ المعادلة الأخيرة فإن الحل العام لهذه المعادلة يساوى مجموع الدالة المتممة مع و $f(x)$.

مسـائل محلولة

١ – حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x.$

هنا $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x + \cos x,$ إذن $\frac{dy}{dx} = \int (xe^x + \cos x)\,dx = xe^x - e^x + \sin x + C_1,$ ومنه

$$y = xe^x - 2e^x - \cos x + C_1x + C_2$$

٢ – حل المعادلة $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = a.$

لنضع $\frac{dy}{dx} = p$ فيكون $\frac{dp}{dx} = \frac{dy^2}{dx^2}$ وتأخذ المعادلة المفروضة الشكل $x^2\frac{dp}{dx} + xp = a$ أو $x\,dp + p\,dx = \frac{a}{x}dx.$

ومنه، $dy = a\ln|x|\frac{dx}{x} + C_1\frac{dx}{x},$ $x\frac{dy}{dx} = a\ln|x| + C_1,$ $xp = a\ln|x| + C_1,$ و $y = \frac{1}{2}a\ln^2|x| + C_1\ln|x| + C_2.$

٣ — حل المعادلة $xy'' + y' + x = 0.$

لنضع $\frac{dy}{dx} = p$ فيكون $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$ وتأخذ المعادلة المفروضة الشكل :

$$x\frac{dp}{dx} + p + x = 0 \quad \text{أو} \quad x\,dp + p\,dx = -x\,dx$$

وبالتكامل نجد $xp = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{C_1}{x}$, وأخيراً $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 \ln|x| + C_2.$

٤ — حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0.$

بما أن $\frac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y''$ فإننا نضرب المعادلة المفروضة في $2y'$ فنحصل على :

$$2y'y'' = 4yy', \qquad y'^2 = 4\int yy'\,dx = 4\int y\,dy = 2y^2 + C_1$$

ومنه $\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}$, $\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx$, $\ln|\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1}| = \sqrt{2}\,x + \ln C_2'$

وأخيراً $\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}x}$

٥ — حل المعادلة $y'' = -1/y^3$

لنضرب المعادلة في $2y'$ فنحصل على $2y'y'' = -\frac{2y'}{y^3}$ ومنه :

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + C_1y^2}}{y}, \quad \frac{y\,dy}{\sqrt{1 + C_1y^2}} = dx, \quad \sqrt{1 + C_1y^2} = C_1x + C_2$$

وأخيراً $(C_1x + C_2)^2 - C_1y^2 = 1$

٦ — حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0.$

هنا $m^2 + 3m - 4 = 0$ و $m = 1, -4$ والحل العام هو $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}.$

٧ — حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = 0.$

هنا $m^2 + 3m = 0$ و $m = 0, -3$ والحل العام هو $y = C_1 + C_2e^{-3x}.$

٨ — حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0.$

هنا $m^2 - 4m + 13 = 0$ و الجذران هما $m_1 = 2 + 3i$ ، $m_2 = 2 - 3i$ والحل العام هو

$$y = C_1e^{(2+3i)x} + C_2e^{(2-3i)x} = e^{2x}(C_1e^{3ix} + C_2e^{-3ix})$$

وبما أن $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$, فإن $e^{3ix} = \cos 3x + i\sin 3x$, $e^{-3ix} = \cos 3x - i\sin 3x$,

وبالتالي يمكن وضع الحل بالشكل

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}\{C_1(\cos 3x + i\sin 3x) + C_2(\cos 3x - i\sin 3x)\} \\ &= e^{2x}\{(C_1 + C_2)\cos 3x + i(C_1 - C_2)\sin 3x\} \\ &= e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) \end{aligned}$$

٩ – حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$

هنا $m^2 - 4m + 4 = 0$ و $m = 2, 2$ والحل العام هو $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}.$

١٠ – حل المعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2.$

إن الدالة المتممة ، استنادا إلى المسألة ٦ ، هي $y = C_1e^{x} + C_2e^{-4x}.$

لإيجاد تكامل خاص للمعادلة نلاحظ أن الطرف الأيمن هو $R(x) = x^2$ ولهذا الشكل للطرف الأيمن فإننا نقترح حلا خاصا يحتوى حدا بـ x^2 وربما حدودا أخرى تنتج بالاشتقاق المتتالى .

سنفرض أن الحل الخاص من الشكل $y = Ax^2 + Bx + C$ حيث A, B, C ثوابت ينبغى تعيينها ، لنفرض $y = Ax^2 + Bx + C,\ y' = 2Ax + B,\ y'' = 2A,$ فى المعادلة التفاضلية فنحصل على

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2, \quad -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

وبما أن هذه متطابقة فى x فإن $-4A = 1,\ 6A - 4B = 0,\ 2A + 3B - 4C = 0.$

ومنه $A = -\frac{1}{4},\ B = -\frac{3}{8},\ C = -\frac{13}{32},$ والحل الخاص هو $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$

والحل العام إذن هو : $y = C_1e^{x} + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}.$

١١ – حل المعادله $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = \cos x.$

هنا $m^2 - 2m - 3 = 0$ والجذران هما $m = -1, 3$ والدالة المتممة هى $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$ والحل الخاص فى الطرف الأيمن للمعادلة التفاضلية نقترح الحل الخاص من الشكل $A\cos x + B\sin x.$ وبالتعويض فى المعادلة التفاضلية بـ $y = A\cos x + B\sin x,\ y' = B\cos x - A\sin x,\ y'' = -A\cos x - B\sin x.$ فنحصل على

$$(-A\cos x - B\sin x) - 2(B\cos x - A\sin x) - 3(A\cos x + B\sin x) = \cos x$$
$$-2(2A + B)\cos x + 2(A - 2B)\sin x = \cos x$$

ومنه $-2(2A + B) = 1,\ A - 2B = 0$ وبالتالى $A = -\frac{1}{5},\ B = -\frac{1}{10}.$

والحل العام هو : $C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{10}\sin x = y.$

١٢ – علق وزن بزنبرك يتحرك لأعلى ولأسفل . والمعادلة التفاضلية لهذه الحركة هى $\frac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$ حيث s هو مط الزنبرك عند اللحظة t

فإذا كان $s = 2$ و $\frac{ds}{dt} = 1$ فى اللحظة $t = 0$ فأوجد s بدلالة t .

هنا $m^2 + 16 = 0$ و $m = \pm 4i$ والحل العام هو $s = A\cos 4t + B\sin 4t.$

وعند $t = 0$ فإن $s = 2 = A$ ومنه $s = 2\cos 4t + B\sin 4t.$

وعند $t = 0$ فإن $ds/dt = 1 = -8\sin 4t + 4B\cos 4t = 4B$ ومنه $B = 1/4$

والحل المطلوب هو : $s = 2\cos 4t + \frac{1}{4}\sin 4t.$

١٣ – لنفرض أن التيار الكهربائى فى دائرة معينة يعطى $\frac{d^2I}{dt^2} + 4\frac{dI}{dt} + 2504I = 110.$ فإذا فرض أن $I = 0$ و $\frac{dI}{dt} = 0$ عندما $t = 0$ فأوجد I بدلالة t .

هنا $m^2 + 4m + 2504 = 0$ ومنه $m = -2 + 50i, -2 - 50i$ والدالة المتممة هى $e^{-2t}(A \cos 50t + B \sin 50t)$.

والمعادلة الحل الخاص $I = 110/2504 = .044$.

والحل العام هو $I = e^{-2t}(A \cos 50t + B \sin 50t) + .044$.

وعند $t = 0$ يكون $I = 0 = A + .044$ ومنه $A = -.044$.

كذلك عندما $t = 0$ يكون $\frac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t}[(-2A + 50B)\cos 50t - (2B + 50A)\sin 50t] = -2A + 50B.$

ومنه $B = -.0018$ والعلاقة المطلوبة هى : $I = -e^{-2t}(0.044 \cos 50t + 0.0018 \sin 50t) + 0.044.$

١٤ – تنزلق سلسلة طولها 4 m من سقف منبسط مبتدئة من وضع تكون فيه قطعة من السلسلة طولها 1 m مدلاة من طرف السقف . أوجد بإهمال الاحتكاك (ا) سرعة انزلاق السلسلة عندما تنفصل عن السقف (ب) الزمن اللازم لذلك .

لنرمز بـ s لطول جزء السلسلة المتدلى من طرف السقف فى اللحظة t .

(ا) إن القوة التى تسبب إنزلاق السلسلة من على السطح هو وزن الجزء المتدلى وبما أن القوة تساوى حاصل ضرب الكتلة فى العجلة فإن $ms'' = \frac{1}{4}m g s$ ومنه $s'' = \frac{1}{4} g s$

وبالتالى $2s's'' = \frac{1}{2} g s s'$ بالتكامل نجد $(s')^2 = \frac{1}{4} g s^2 + C_1$

وفى اللحظة $t = 0$ يكون $s = 1, s' = 0$ إذن $C_1 = -\frac{1}{4} g$ و $s' = \frac{1}{2}\sqrt{g} \cdot \sqrt{s^2 - 1}$.

وعندما يصبح $s = 4$ يكون $s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}$ ms^{-1}

(ب) إن $\frac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, dt$ ومنه $\ln|s + \sqrt{s^2 - 1}| = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, t + C_2$.

وبما أن $s = 1$ عندما $t = 0$ فإن $C_2 = 0$ وبالتالى $\ln(s + \sqrt{s^2 - 1}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, t$.

وإذا وضعنا $s = 4$ نجد : $t = \frac{2}{\sqrt{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$

١٥ – زورق كتلته 750 kg وسرعته عندما يتوقف محركه (فى اللحظة $t = 0$) تساوى 6 ms^{-1} . فإذا فرضنا أن مقاومة الماء متناسبة مع سرعة الزورق وأنها 900 N عند اللحظة $t = 0$. فما هى المسافة التى يقطعها الزورق إلى أن تصبح سرعته 1.5 ms^{-1} .

لنرمز بـ s للمسافة التى يقطعها الزورق بعد t sec بعد توقف المحرك .

$$ms'' = -Ks' \quad \text{أو} \quad s'' = -ks'$$

لتعيين k نلاحظ أن $s' = 6$ عندما $t = 0$ وأن s'' تساوى $\frac{\text{القوة}}{\text{الكتلة}}$ أى أنها تساوى $-\frac{900}{750}$ ومنه $k = 1/5$

وعلى هذا فإن $s'' = \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{5}$ وبالتكامل نجد $\ln v = -\frac{1}{5}t + C_1$, أى أن $v = C_1 e^{-t/5}$.

وعندما $t = 0$ فإن $v = 6$. إذن $C_1 = 6 \quad v = \frac{ds}{dt} = 6e^{-t/5}$

ومنه $s = -30\, e^{-t/5} + C_2$.

وعند $t = 0$ فإن $s = 0$ و $C_2 = 30$ و $s = 30(1 - e^{-t/5})$.

وأخيرا عند $v = 1.5 = 6e^{-t/5}$, يكون : $s = 30(1 - \frac{1}{4}) = 22.5$

مسائل اضافية

١٦ – $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$ ج: $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x + C_2$

١٧ – $e^{2x}\frac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$ ج: $y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2$

١٨ – $\frac{d^2y}{dx^2} = -9\sin 3x$ ج: $y = \sin 3x + C_1x + C_2$

١٩ – $x\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4x = 0$ ج: $y = x^2 + C_1x^4 + C_2$

٢٠ – $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x - x^2$ ج: $y = x^3/3 + C_1e^x + C_2$

٢١ – $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^3$ ج: $y = x^4 + C_1x^2 + C_2$

٢٢ – $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ ج: $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

٢٣ – $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$ ج: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$

٢٤ – $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$ ج: $y = C_1 + C_2e^x$

٢٥ – $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$ ج: $y = C_1xe^x + C_2e^x$

٢٦ – $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ ج: $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

٢٧ – $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ ج: $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$

٢٨ – $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$ ج: $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$

٢٩ – $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$ ج: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + 2x + 5$

٣٠ – $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{3x}$ ج: $y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + e^{3x}/13$

٣١ – $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$ ج: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + e^{2x} + \frac{x}{9} + \frac{2}{27}$

٣٢ – $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2\sin 2x$ ج: $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\sin 2x$

٣٣ – يتحرك جسيم كتلته m فى وسط تتناسب مقاومته مع سرعة الجسيم . فإذا كان هذا الجسيم يخضع كذلك إلى قوة جذب متناسبة مع الإزاحة فأوجد معادلة الحركة إذا كان $s = 0$ و $s' = v_0$ عند اللحظة $t = 0$

إرشاد : هنا $m\frac{d^2s}{dt^2} = -k_1\frac{ds}{dt} - k_2s$ أو $\frac{d^2s}{dt^2} + 2b\frac{ds}{dt} + c^2s = 0,$ بفرض $b > 0$

ج : إذا كان $b^2 = c^2$ فإن $s = v_0te^{-bt}.$

وإذا كان $b^2 < c^2$ فإن $s = \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}}e^{-bt}\sin\sqrt{c^2 - b^2}\,t.$

أما وإذا كان $b^2 > c^2$ فإن $s = \frac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}}\left(e^{(-b + \sqrt{b^2 - c^2})t} - e^{(-b - \sqrt{b^2 - c^2})t}\right)$

CALCULUS

Glossary	المصطلحات
Chapter 1	**الفصل الاول**
Variable	متغير
Function	دالة
Set	مجموعة
Real	حقيقي
Real number	عدد حقيقي
Rational	قياسي
Rational number	عدد قياسي
Common fraction	كسر عادي
Integer	صحيح
Irrational number	عدد غير قياسي
Imaginary number	عدد تخيلي
Absolute	مطلق
Number scale	سلم عددي
Finite Interval	فترة محددة
Open interval	فترة مفتوحة
End point	نقطة نهاية
Closede interval	فترة مغلقة
Infinite interval	فترة غير محددة
Inequalities	متباينات
Dependent variable	متغير مستقل
Independent variable	متغير غير مستقل
Single - valued	وحيد القيمة
Multi - valued	متعدد القيمة
Double - valued	ثنائي القيمة
Domain of definition	حيز (مجال) التعريف
Sequence	متتابعة
Deletede- neighbourhood	جوار محذوف

Chapter 2	الفصل الثانى
Limit	نهاية
Exist	موجود
Infinity	اللانهاية
Statement	تعبير

Chapter 3	الفصل الثالث
Continuous function	دالة متصلة
Discontinuous function	دالة غير متصلة (منقطعة)
Polynomial	متعدد حدود
Denominator	مقام
Numerator	بسط

Chapter 4	الفصل الرابع
Derivative	مشتقة
Increment	تزايد
Instantaneous	لحظى
Instantaneous rate of change	معدل التغير اللحظى

Chapter 5	الفصل الخامس
Algebraic function	دالة جبرية
Inverse function	دالة عكسية
Function of a function	دالة الدالة
Higher derivative	مشتقات عليا

Chapter 6	الفصل السادس
Implicit differentiation	اشتقاق ضمنى
Implicit function	دالة ضمنية

Chapter 7	الفصل السابع
Tangent	مماس
Normal	عمود
Angle of intersection	زاوية تقاطع
Subtangent	تحت المماس
Subnormal	تحت العمود

Chapter 8	الفصل الثامن
Increasing function	دالة متزايدة
Decreasing function	دالة متناقصة

Stationary function	دالة مستقرة
Bending	انحناء
Inflection	انعطاف
Chapter 9	**الفصل التاسع**
Chapter 10	**الفصل العاشر**
Rectlinear motion	الحركة المستقيمة
Circular motion	الحركة الدائرية
Acceleration	تسارع (عجلة)
Angular velocity	سرعة زاوية
Angular acceleration	تسارع زاوى
Chapter 11	**الفصل الحادى عشر**
Related rates	المعدلات المتعلقة ببعضها
Chapter 12	**الفصل الثانى عشر**
Trigonometric function	دوال مثلثية
Radian measure	المقياس الدائرى
sin	حا
cos	حتا
tan	ظا
sec	قا
Cosec	قتا
Cotan	ظتا
Chapter 13	**الفصل الثالث عشر**
Inverse trigonometric functions	دوال مثلثية عكسية
Chapter 14	**الفصل الرابع عشر**
Exponential function	دالة أسية
Logarithmic function	دالة لوغاريتمية
Chapter 15	**الفصل الخامس عشر**
Hyperbolic function	دالة زائدية
Inverse hyperbolic function	دالة زائدية عكسية
Chapter 16	**الفصل السادس عشر**
Parametric equations	معادلات بارامترية

Chapter 17 — الفصل السابع عشر

Curvature	انحناء (تقوس)
Radius of curvature	نصف قطر الانحناء
Circle of curvature	دائرة الانحناء
Evolute	منشئ

Chapter 18 — الفصل الثامن عشر

Plane vectors	متجهات مستوية
Scalar	عددى
Speed	سرعة قياسية
Scalar or Dot product	ضرب عددى أو قياسى

Chapter 19 — الفصل التاسع عشر

Curvilineare motion	الحركة الخطية الانحنائية

Chapter 20 — الفصل العشرون

Polar coordinates	احداثيات قطبية
Angle of inclination	زاوية الميل
Angle of intersection	زاوية التقاطع
Cardioid	منحنى القلب

Chapter 21 — الفصل الحادى والعشرون

The law of the Mean	قانون القيمة المتوسط
Generalized law	قانون عام
Extended law	قانون موسع

Chapter 22 — الفصل الثانى والعشرون

Indeterminate	غير محدد

Chapter 23 — الفصل الثالث والعشرون

Chapter 24 — الفصل الرابع والعشرون

Curve Tracing	رسم المنحنيات
Extent	حيز
Asymtotes	خط (مستقيم) مقارب
Singular point	نقطة مفردة
Node	عقدة
Cusp	ناب
Tacnode	عقدة تماس
Isolated point	نقطة منعزلة

Chapter 25	**الفصل الخامس والعشرون**
Integration	تكامل
Indefinite integral	تكامل غير محدد
Chapter 26	**الفصل السادس والعشرون**
Integration by parts	تكامل بالتجزئة
Reduction formulas	صيغ الاختزال
Chapter 27	**الفصل السابع والعشرون**
Identities	متطابقات
Chapter 28	**الفصل الثامن والعشرون**
Chapter 29	**الفصل التاسع والعشرون**
Integration by partial fractions	تكامل بالكسور الجزئية
Real coefficient	معامل حقيقى
Rational fraction	دالة جذرية
Proper	حقيقى
Distinct linear factors	معاملات خطية متمايزة
Repeated linear factors	معاملات خطية متكررة
Quadratic	تربيعى
Quadratic factor	معامل تربيعى
Chapter 30	**الفصل الثلاثون**
Chapter 31	**الفصل الحادى والثلاثون**
Chapter 32	**الفصل الثانى والثلاثون**
Indefinite integrals	تكامل غير محدد
Orthogonal trajectories	مسارات متعامدة
Chapter 33	**الفصل الثالث والثلاثون**
Definite integrals	تكامل محدد (محدود)
Chapter 34	**الفصل الرابع والثلاثون**
Slicing	شريحة
Horizontal slicing	شريحة أفقية
Vertical slicing	شريحة رأسية
Parabola	قطع مكافئ
Cycloid	منحنى دويرى (سيكلوئيد)
Loop	عروة

Chapter 35	**الفصل الخامس والثلاثون**
Shell	قشرة
Chapter 36	**الفصل السادس والثلاثون**
Ellipse	قطع ناقص
Chapter 37	**الفصل السابع والثلاثون**
Centroid	مركز متوسط
Moment	عزم
Hypocycloid	منحنى دويرى تحتى
Chapter 38	**الفصل الثامن والثلاثون**
Moment of inertia	عزم القصور الذاتى
Radius of gyration	نصف قطر الدوران
Chapter 39	**الفصل التاسع والثلاثون**
Fluid pressure	ضغط السائل
Submerged	مغمور
Chapter 40	**الفصل الأربعون**
Work	شغل
Variable force	قوة متغيرة
Modulus of spring	معامل الزنبرك
Chapter 41	**الفصل الحادى والأربعون**
Length of arc	طول قوس
curve of prusuit	منحنى المطاردة
Chapter 42	**الفصل الثانى والأربعون**
Chapter 43	**الفصل الثالث والأربعون**
Chapter 44	**الفصل الرابع والأربعون**
Limacon	منحنى ليماسون
Cardioid	منحنى القلب
Spiral of Archmides	حلزون أرشميدس
Chapter 45	**الفصل الخامس والأربعون**
Chapter 46	**الفصل السادس والأربعون**
Improper Integrals	تكاملات معتله

Chapter 47	**الفصل السابع والأربعون**
Sequence	متوالية
Series	متسلسلة
Converge	متقارب
Convergent sequence	متوالية متقاربة
Divergent sequence	متوالية متباعدة
Chapter 48	**الفصل الثامن والأربعون**
Chapter 49	**الفصل التاسع والأربعون**
Alternating Series	متسلسلة متناوبة
Absolute convergence	تقارب مطلق
Conditional convergence	تقارب مشروط
Chapter 50	**الفصل الخمسون**
Chapter 51	**الفصل الحادى والخمسون**
Power series	متسلسلة قوى
Interval of convergence	فترة التقارب
Uniform convergence	تقارب منتظم
Remainder	الباقى
Chapter 52	**الفصل الثانى والخمسون**
Expansion	فك أو مفكوك
Chapter 53	**الفصل الثالث والخمسون**
Chapter 54	**الفصل الرابع والخمسون**
Chapter 55	**الفصل الخامس والخمسون**
Trapezoidal	شبه المنحرف
Prismoidal	شبه المنشور
Chapter 56	**الفصل السادس والخمسون**
Partial Derivatives	مشتقات جزئية
Implicity	ضمنى
Chapter 57	**الفصل السابع والخمسون**
Total differential	تفاضلات كلية
Total derivatives	مشتقات كلية

Chain rule	قاعدة السلسلة
Power	قدرة
Chapter 58	**الفصل الثامن والخمسون**
Implicit functions	دوال ضمنية
Chapter 59	**الفصل التاسع والخمسون**
Chapter 60	**الفصل الستون**
Directional derivatives	مشتقات متجهة
Gradient	تدرج
Direction numbers	أعداد اتجاه
Direction cosines	جيوب تمام الاتجاه
Chapter 61	**الفصل الحادى والستون**
Analytic geometry	هندسة تحليلية
Triple scalar product	حاصل الضرب الثلاثى العددى
Triple vector product	حاصل الضرب المتجه الثلاثى
Chapter 62	**الفصل الثانى والستون**
Osculating plane	مستوى ملاصق
Normal plane	مستوى عمودى
Rectifying plane	مستوى مقوم
Operator	مؤثر
Divergence	التفرق
Curl	الدوران
Line integral	تكامل خطى
Chapter 63	**الفصل الثالث والستون**
Iterated integrals	تكاملات مكررة
Doubie integrals	تكامل ثنائى
Chapter 64	**الفصل الرابع والستون**
Chapter 65	**الفصل الخامس والستون**
Octant	ثمن $\frac{1}{8}$
Paraboloid	مجسم القطع المكافئ

Chapter 66	**الفصل السادس والستون**
Conc	مخروط
Elliptic cylinder	اسطوانة ناقصة المقطع
Lemniscate	منحنى ذو عروتين
Chapter 67	**الفصل السابع والستون**
Chapter 68	**الفصل الثامن والستون**
Chapter 69	**الفصل التاسع والستون**
Differential equation	معادلة تفاضلية
Order	رتبة
Degree	درجة
Integrating factor	عامل تكامل
Chapter 70	**الفصل السبعون**

الفهـــــرس

مطابع
المكتب المصري الحديث

